제 11 장 탐구문제

1. n-공간에서, 주어진 벡터 $\mathbf{v}$ 와 무한급 미분가능함수 f, g 에 대하여,

$$D_{\mathbf{v}}{}^{k}(fg) = \sum_{a+b=k} \binom{k}{a} \left(D_{\mathbf{v}}{}^{a} f\right) \left(D_{\mathbf{v}}{}^{b} g\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

임을 보이라.

2. (**라플라스 작용소**) 구면좌표계에서

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

임을 보이라.

3. 다음 연립 방정식이 해를 가지는 지 판정하라.

$$x^3 + 2xy - 3ye^{\sin x}\cos x = -7, \qquad y^5 + x^2 - 3e^{\sin x} = 5.$$

4. (**Hölder 부등식**) 양수 p, q 가 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ 을 만족시킬 때, 벡터

$$a = (a_1, \ldots, a_n), \qquad b = (b_1, \ldots, b_n)$$

에 대하여 부등식

$$|a \cdot b| \le \left(|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p\right)^{1/p} \left(|b_1|^q + \cdots + |b_n|^q\right)^{1/q}$$

을 증명하라.

5. 함수 $L(x, y, z)$ 에 대하여 공간 $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}^1[a, b] \mid f(a) = y_a,\ f(b) = y_b\}$ 에서 정의된 범함수

$$\mathcal{L}(f) := \int_a^b L(u, f(u), f'(u))\, du$$

의 Euler-Lagrange 방정식이

$$D_2 L(u, f(u), f'(u)) = \frac{d}{du} D_3 L(u.f(u), f'(u))$$

임을 보이라.

6. 최단강하선 문제에서 f 가 직선이거나 원호이면 걸리는 시간은 얼마인가?

7. 좋은 기록이 나오도록 스키장을 건설하려면 어떻게 설계하는 것이 좋은가?