이다. 이제 $\mathbf{x} = \sum_i x_i \,\mathbf{e}_i$ 로 두면,

$$\mathbf{x} \times \mathbf{F}(P+\mathbf{x}) = \sum_{i,j} x_i f_j(P+\mathbf{x})\,\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} x_i f_j(P+\mathbf{x})\,\mathbf{e}_k$$

를 얻는다. 한편 테일러 전개에서

$$f_j(P+\mathbf{x}) = f_j(P) + \sum_l x_l D_l f_j(P) + o(\mathbf{x})$$

이므로

$$\mathbf{x} \times \mathbf{F}(P+\mathbf{x}) = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} x_i \left( f_j(P) + \sum_l x_l D_l f_j(P) + o(\mathbf{x}) \right) \mathbf{e}_k$$

이다. 이로부터

$$\mathbf{G}(r) = \frac{4\pi r^4}{3} \operatorname{curl} \mathbf{F}(P) + o(r^4)$$

임을 보이라. 또 이 식으로부터 회전장의 의미를 설명하라.

4. 벡터장 $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ 에 대하여 다음을 보이라.

$$\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{G}$$

5. (이 문제는 회전장이 좌표계의 선택과 무관함을 보여 준다.) 공간에서 새로운 기저 $\tilde{\mathbf{e}} = \left(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3\right)$ 는 기존의 기저 $\mathbf{e} = \left(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\right)$ 에 대하여 일차결합으로 표현된다: $\tilde{\mathbf{e}}_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} \mathbf{e}_i$. 이때 행렬 $A := \left(a_{ij}\right)$ 를 사용하여 위 식을 간단히 $\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e}A$ 와 같이 나타낼 수 있다. 행렬 $A$ 의 역행렬을 $B = \left(b_{ij}\right)$ 라 하자.

   (a) 공간의 점들을 새로운 기저 $\tilde{\mathbf{e}}$ 에 의하여 나타내면 점들의 새로운 좌표 $\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix}$ 는 기존의 좌표 $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 에 대하여 $\tilde{X} = BX$ 임을 보이라.

   (b) 연쇄법칙을 이용하여 편미분 사이의 관계식

   $$D_j = \sum_i b_{ij} \tilde{D}_i \qquad (\text{즉, } \nabla = \tilde{\nabla} B)$$

   를 유도하라.

   (c) 벡터장 $\mathbf{F} = \sum_i f_i \mathbf{e}_i$ 를 새로운 기저에 대하여 $\mathbf{F} = \sum_j \tilde{f}_j \,\tilde{\mathbf{e}}_j$ 로 둘 때 $f_i = \sum_j a_{ij} \tilde{f}_j$ (즉, $f = A\tilde{f}$) 임을 보이라.

   (d) 다음 식을 유도하라.

   $$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \sum_{i,j} \left(D_i f_j \,\mathbf{e}_i\right) \times \mathbf{e}_j = \sum_{i,j} \left(\tilde{D}_i \tilde{f}_j \,\tilde{\mathbf{e}}_i\right) \times \tilde{\mathbf{e}}_j .$$