

1.2.1 보기

극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$ 이 존재하는지 알아 보자.

주어진 수열의 일반항은

$$\frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

이다. 그러므로 극한값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

1.2.2 기본연습문제

n 이 짝수이면 $a_n = n$ 이고, n 이 홀수이면 $a_n = 1/n$ 이라 하자. 이때 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 이 존재하는가?

1.2.3 보기

양수 ϵ 에 대하여 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \epsilon)^n}{n}$ 의 수렴·발산을 조사하여 보자.

이항 정리에⁷ 의하면

$$(1 + \epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{1}{2}n(n-1)\epsilon^2 + \cdots + n\epsilon^{n-1} + \epsilon^n > \frac{1}{2}n(n-1)\epsilon^2$$

이다. 그러므로

$$\frac{(1 + \epsilon)^n}{n} > \frac{1}{2}(n-1)\epsilon^2$$

이고, 이 값은 n 이 커지면 ~~한없이~~ 증가한다. 따라서 주어진 수열은 무한대로 발산한다.

그러므로 다음을 얻는다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n} = \infty \quad (a > 1)$$

⁷ $\binom{n}{k} := {}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 으로 두면,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$