Affine Group Scheme 의 이해

이 인 석
서울대학교 수리과학부

— 정재명 선생님의 60回 생신을 축하드리며 —

대수기하학에 門外漢인 주제에 감히 scheme 이란 單語가 題目에 포함된 글을 쓰게 되다니 실로 황당하기 짝이 없다. 되도록 소문나지 않기 바라며, 대수기하의 高手들께서는 애교로 보아 넘겨 주시길 바란다.

그러나, 경험에 의하면, 적지 않은 이들이 이 글의 내용 중 base ring k 와 k-algebra R 의 역할을 혼동하고 있는 듯하여 감히 pen 을 들게 되었다.

神話 時代에는 모든 사람들이 신화의 내용과 起源을 잘 알고 있으므로, 이를 記錄하여 둘 필요가 없다. 그러나 세월이 지나면 기록이 남아있지 않음으로 因하여, 오히려 신화의 내용을 이해하기 힘들어진다. 이 글에서는 現在 대수기하학의 言語가 scheme languege 로 굳어지게 된 뿌리에 관해 이야기하고자 한다. 요즘 대수기하를 처음 접하는 대학원생들이 scheme languege 를 배우면서, 왜 그리고 어떤 '꿈'을 갖고 scheme languege 가 태어나게 되었는지 이해하지 못하는 듯하다. 기록이 남지 않음으로 말미암아, 이미 神話가 되었으므로⋯⋯.[1]

이 글은 '대수 캠프'에서의 5 시간에 걸친 강의를 요약한 것이다.[2] 캠프에서의 강의는 대수기하를 전공하지 않는 대학원생을 主대상으로 하였으므로, algebraic set 와 affine variety 의 개념부터 시작하였으나, 이 글에서는 그 부분은 생략하기로 한다.

표기법 0.1 이 글의 모든 ring 과 algebra 는 항상 commutative with 1 이고, 모든 homomorphism 은 1 을 1 로 보낸다. 그리고, functor 는 covariant functor 를 의미한다. 또, $\mathcal{C}$ 가 category 일 때, C 가 $\mathcal{C}$ 의 object 이면 간단히 $C \in \mathcal{C}$ 로 표기한다.

[1] 저자는 이 글의 내용을 [6] 에서 처음 배웠다.
[2] 제 8차 캠프에서 4 시간, 제 11차 캠프에서 1 시간.

제 1 절 Natural Equivalence

이 글에는 homological algebra 의 여러 개념들이 등장한다. 그리고 대부분의 standard terminology 의 정의는 생략하기로 한다.

정의 1.1 Caregory $\mathcal{C}$ 와 $\mathcal{D}$ 가 isomorphic 하다는 말은 $G \circ F = id_{\mathcal{C}}$ 이고 $F \circ G = id_{\mathcal{D}}$ 인 functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 와 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$가 존재한다는 뜻이다.

보기 1.2 (가) The category of abelian groups 와 the category of $\mathbb{Z}$-modules 는 서로 isomorphic 하다.

(나) The category of rings 와 the category of $\mathbb{Z}$-algebras 는 isomorphic 하다.

(다) k 가 고정된 ring 일 때, category $\mathcal{A}_k$ 를 다음과 같이 정의하자. 먼저, $\mathcal{A}_k$ 의 object 를 [ring A 와 ring homomorphism $\alpha : k \to A$ 의 pair] (A, α) — 혹은, 간단히 화살표 $\left(k \xrightarrow{\alpha} A\right)$ — 라고 정의하자. 또, φ 가 [$\left(k \xrightarrow{\alpha} A\right)$ 에서 $\left(k \xrightarrow{\beta} B\right)$ 로 가는 $\mathcal{A}_k$ 의 morphism] 이란 말은 φ 가 다음 diagram ;

$$\begin{tikzcd}
 & k \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
A \arrow[rr, "\varphi"'] & {} & B
\end{tikzcd}$$

을 commute 시키는 ring homomorphism 이란 뜻으로 정의하자. 그러면, $\mathcal{A}_k$ 는 the category of k-algebras 와 서로 isomorphic 하다. (Lang [3] 은 언제나 k-algebra 를 $\mathcal{A}_k$ 로 정의한다.)

다시 말하면, isomorphic category 는 완전히 똑같은 category 를 뜻한다. (따라서, 별로 재미가 없다.) 우리에게 필요한 개념은 equivalent category 이다.

정의 1.3 (가) Category $\mathcal{C}$ 와 $\mathcal{D}$ 가 equivalent 하다는 말은 $G \circ F \xrightarrow{\sim} id_{\mathcal{C}}$ 이고 $F \circ G \xrightarrow{\sim} id_{\mathcal{D}}$ 인 functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 와 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$가 존재한다는 뜻이다. 여기에서, '$\xrightarrow{\sim}$'는 functor 들 間의 natural equivalence 를 의미한다. 이 때, $\mathcal{C} \xrightarrow{\approx} \mathcal{D}$ 로 표기하기로 한다.

(나) Category $\mathcal{C}$ 와 $\mathcal{D}$ 가 anti-equivalent 하다는 것은 앞 (가) 항에서 functor 들이 contravariant 일 때를 말한다. 이 때에는 $\mathcal{C} \xrightarrow[\text{anti}]{\approx} \mathcal{D}$ 의 표기법을 사용하기로 한다.

위 정의를 쉽게 (?) 풀어 쓰면 다음과 같다.

보조정리 1.4 Caregory $\mathcal{C}, \mathcal{D}$가 equivalent 하다는 말은 다음 조건 ;

(1) F는 full and faithful

(2) 각각의 $D \in \mathcal{D}$에 대해, $D \approx F(C)$인 $C \in \mathcal{C}$ 존재

을 만족하는 functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$가 존재한다는 말과 동치이다. 이때, F를 equivalence 라고 부른다.

증명 : 이 글에서 생략된 증명은 모두 독자들의 몫이다. □

위 보조정리는 참고문헌에서 자주 발견되지 않는다 ([5, p. 82] 참조[3]). 그 이유는 axiom system 의 선택에 따라서는 위 보조정리는 위험해질 수도 있기 때문이다. 즉, 위 보조정리를 증명하다 보면, Axiom of Choice 의 적용 범위에 대한 의문이 생기게 된다.

그래서 대부분의 책에서는 위 보조정리의 동치조건을 equivalence 의 정의로 삼는다. 이 글에서는 isomorphic category 와 equivalent category 의 비교를 위하여 조금 무리를 하였다. 그러나, 다른 한편, category 의 equivalence 가 equivalence relation 이라는 설명을 하려면 정의 1.3 이 필요하다.

이 글을 읽다 보면, 그 이외에도, natural transformation 을 morphism 으로 갖는 functor 들의 category 에서, morphism 들이 집합을 이루는가 하는 질문도 나올 수 있다. 그러나, 이 글에서는 **수학적 기초론과 수리논리학의 문제는 論外**로 하기로 한다.[4] [5]

보기 1.5 Countable-개의 object 를 갖는 category $\{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}\}$는 the category of cyclic groups 와 equivalent 하다. (그러나, 물론 isomorphic 할 수는 없다.)

보기 1.6 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$가 equivalence 이고 $C, C' \in \mathcal{C}$일 때, $C \approx C'$일 필요충분조건은 $F(C) \approx F(C')$인 것이다.

---

[3] [5] 을 저자에게 80 년대 말에 소개해 주신 분은 정재명 선생님이셨다.

[4] 마치 잘 안다는듯이······? 남의 일이란듯이······?

[5] Category theoretic foundation 은 우리가 많이 접해 본 set theoretic foundation 과는 제법 차이가 있고, 무척 골치 아프다. 독자들은 관심을 갖지 말기를 강추.

제 2 절 Classical Language

다음 정리는 equivalent category 의 첫번째 non-trivial example 이라고 할 수 있다.

정리 2.1 (k 가 algebraically closed field 일 때) The category of finitely generated reduced k-algebras 와 [the category of affine varieties over k] 는 서로 anti-equivalent 하다.

앞서 언급한 바와 같이, '대수 캠프'에서의 강의는 algebraic set 와 affine variety 의 개념부터 시작하였다. 그리고, affine variety 의 정의를 위하여 sheaf 와 ringed space 의 개념도 이 단계에서 소개하였다. 그러나, 이 글에서는 classical language[6] 부분은 생략하기로 한다.[7]

독자들은, 만약 앞의 용어들이 익숙하지 않다면, [1, pp. 1–20] 과 [4, pp. 1–9] 를 먼저 익히기 바란다.

제 3 절 꿈★들의 Category

이제 **구름 위로** 올라가자.

우선, 예를 들어, 다음의 notation 을 생각해 보자.

$$\begin{aligned}
\mathbf{SL}_n(R) &= \{(r_{ij}) \in R^{n^2} \mid \det(r_{ij}) - 1 = 0\},\\
\mathbf{O}_n(R) &= \{(r_{ij}) \in R^{n^2} \mid {}^{\mathbf{t}}(r_{ij}) \cdot (r_{ij}) - I = 0\},\\
\mu_n(R) &= \{r \in R \mid r^n - 1 = 0\},\\
\mathbf{E}(R) &= \{(r,s) \in R^2 \mid s^2 - 5r^3 + \sqrt{2}r - 1 = 0\}.
\end{aligned}$$

우리의 '꿈★'은 $\mathbf{SL}_n$, $\mathbf{O}_n$, μ_n, $\mathbf{E}$ 등을 functor 로 이해하려는 것이다.[8] 그리고 이 functor 自身이 각각 어떤 geometric structure 를 갖기를 원한다.

[6] 요즘은 scheme language 를 classical language 라고 부르는 형편이니, ancient language 라고 하는 편이⋯⋯.

[7] 언젠가 한가한 (!) 때가 오면 보충할 것을 약속.

[8] 캠프의 강의에서는 '꿈★'을 '계획'이라고 불렀다. 사전을 찾아 보면, 'scheme'의 뜻이 (1) 계획, (2) 꿍꿍이로 풀이 되어 있다. (이 부분은 '강의 윤리 심사 위원회'의 검열 후 수정되었음을 밝힌다.)

가장 먼저 지적할 점은, 예를 들어, 위의 마지막 보기에서 $\sqrt{2}$ 나 5 가 어디에 살고 있는지 분명히 해야 한다는 것이다. 즉, 우리가 생각하려고 하는 다항식들이 어디에서 정의되어 있는지를 우선 분명히 밝혀야 한다는 것이다.

물론, 우리가 생각하려고 하는 다항식의 계수들은 fixed ring k 로부터 왔다. 따라서, 위 표기법에서 R 은 k-algebra 라고 할 수밖에 없다. 즉, 우리의 꿈은, 예를 들어, functor $\mathbf{SL}_n$ 을

$$\mathbf{SL}_n : k\text{-}\mathcal{A}lg \to \mathcal{S}et$$

로 이해하려는 것이다.

한 가지 강조할 점이 있다. 즉, 우리의 'base ring' k 의 역할이 classical language 때와는 微妙한 차이가 있다는 것이다. 다시 말해, classical language 에서의 k 의 역할이 지금은 k 와 R 로 分化된 것이다. 이 점은 많은 이들이 착각하고 있는 부분이므로, 매우 조심하여야 한다.

따라서, 지금부터 우리의 **base ring** k **는 고정**되어 있다고 가정한다.[9]

이제 꿈★들의 category 를 정의하자. 하나의 꿈 $\mathbf{F} : k\text{-}\mathcal{A}lg \to \mathcal{S}et$ 는 다음의 data 로 이루어진다. 즉,

$$\begin{cases} I \ ; \ \text{an index set,} \\ X_i \ ; \ \text{an indeterminate,} \quad (\text{단},\ i \in I), \\ T \ ; \ \text{a subset of the polynomial algebra } k[\{X_i\}_{i \in I}]. \end{cases}$$

그리고, 꿈 $\mathbf{F} : k\text{-}\mathcal{A}lg \to \mathcal{S}et$ 는 다음과 같이 정의된다 (Classical language 의 algebraic set 와 비교해 보라.) ;

$$\mathbf{F}(R) = \left\{ (r_i) \in \prod_{i \in I} R \;\middle|\; f((r_i)) = 0 \ \text{ for all } \ f \in T \right\}, \qquad (R \in k\text{-}\mathcal{A}lg)$$

한편, $\xi \in \mathsf{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(R, S)$ 일 때, function $\mathbf{F}(\xi) : \mathbf{F}(R) \to \mathbf{F}(S)$ 를

$$\mathbf{F}(\xi) : (r_i) \mapsto (\xi(r_i)), \qquad (\,(r_i) \in \mathbf{F}(R)\,)$$

로 정의하면, $\mathbf{F}$ 는 functor 임을 쉽게 확인할 수 있다. 물론 꿈들의 category 는 functor 들의 category 이므로, 꿈 間의 morphism 은 natural transformation 으

[9] 적어도 이 글에서는 k 는 不變이다. 그러나, 물론, ring homomorphism $k \to k'$ 이 주어지면, 통상적인 restriction 과 extension 을 통한 base change 가 가능하다.

로 주어진다. 즉, 꿈들의 category 를 functor category $\mathcal{F}un(k\text{-}\mathcal{A}lg, \mathcal{S}et)$ 의 full subcategory 로 생각한다.

제 4 절 Representable Functor over k

그런데, 앞 節에서 정의한 꿈들의 category 를 좀 더 산뜻하고 고상하게 묘사할 수는 없을까?

정의 4.1 $\mathbf{F} : k\text{-}\mathcal{A}lg \to \mathcal{S}et$ 를 functor 라고 할 때, $\mathbf{F} \approx \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(A, -)$ 인 k-algebra A 가 존재하면, 우리는 $\mathbf{F}$ 를 [representable functor (over k)] 라고 부른다. 또, 이 때 A 가 $\mathbf{F}$ 를 represent 한다고 말한다.

위 정의는 functor category $\mathcal{F}un(k\text{-}\mathcal{A}lg, \mathcal{S}et)$ 內部의 이야기이므로 ‘$\approx$’와 ‘$\xrightarrow{\sim}$’는 같은 의미를 갖는 점에 유의하기 바란다.

보조정리 4.2 꿈 $\mathbf{F}$ 가 앞 節과 같다고 할 때, 꿈 $\mathbf{F}$ 는 k-algebra

$$A = k[\{X_i\}_{i \in I}] \,/\, \langle T \rangle$$

에 의해 represent 된다.

증명 : Natural transformation $\Phi : \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(A, -) \longrightarrow \mathbf{F}$ 를

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(A, R) & \xrightarrow{\Phi_R} & \mathbf{F}(R) \\ \varphi & \longmapsto & (\varphi(\overline{X_i})) \end{cases} \qquad (R \in k\text{-}\mathcal{A}lg)$$

(단, $\overline{X_i}$ 는 X_i 의 A 에서의 image) 로 정의하면, 함수 Φ_R 은 well-defined 되어 있고 — 즉, $(\varphi(\overline{X_i})) \in \mathbf{F}(R)$ 이고 — Φ_R 이 bijection 인 것을 쉽게 확인할 수 있다. (이런 의미에서 우리는 $(\overline{X_i})$ 를 꿈 $\mathbf{F}$ 의 ‘the most general solution’이라고 부른다.) 한편,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(A, R) \arrow[r, "\Phi_R"] \arrow[d, "\xi_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{F}(R) \arrow[d, "\mathbf{F}(\xi)"] \\
\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(A, S) \arrow[r, "\Phi_S"'] & \mathbf{F}(S)
\end{tikzcd} \qquad (\xi \in \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(R, S))$$

인 것은 당연. □

보조정리 4.3 앞 보조정리 4.2의 역도 성립한다. 즉, [representable functor (over k)]는 꿈★이다.

증명 : 이건 거의 말장난 수준. (모든 k-algebra B는 보조정리 4.2의 A의 꼴과 isomorphic 하므로.) □

따라서 이 節의 결론은 다음과 같다.

정리 4.4 [꿈★들의 category] = [representable functor (over k) 들의 category].

지금 다음의 질문은 매우 자연스럽다. 대답은 다음 節에서 다룬다.

질문 4.5 $A, B \in k\text{-}\mathcal{A}lg$가 동시에 꿈 $\mathbf{F}$를 represent 하면, $A \approx B$ 인가? 즉, $\mathsf{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(A, -) \approx \mathsf{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(B, -)$이면, $A \approx B$ 인가?

보기 4.6 모든 $R \in k\text{-}\mathcal{A}lg$에 대해, $|\mathbf{e}(R)| = 1$인 꿈 $\mathbf{e}$는 k-algebra k에 의해 represent 된다 (즉, 꿈의 정의에서 $I = \emptyset$이고 $T = 0$인 경우). 그리고, 동시에, $\mathbf{e}$는 $k[X] / \langle X \rangle$와 $k[X, Y] / \langle X - 1, Y - 2 \rangle$ 등에 의해서도 represent 된다.

제 5 절 Yoneda's Lemma와 k-algebra

Yoneda's Lemma는 생각할 때마다 妙한 느낌이 드는 명제이다. 이렇게 단순한 abstract non-sense가 그토록 깊은 意味를 갖는 것을 놀라운 일이다.

이 節에서는 다음의 notation을 사용한다. 즉, $A, B \in k\text{-}\mathcal{A}lg$일 때,

$$\mathbf{F} = \mathsf{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(A, -), \quad \mathbf{E} = \mathsf{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(B, -)$$

로 놓기로 한다. 즉, $\mathbf{F}$와 $\mathbf{E}$는 각각 A와 B가 represent 하는 representable functor 이다. 이제, k-algebra homomorphism $\psi : B \to A$가 주어졌을 때, 임의의 k-algebra R에 대해 함수 $\Psi_R : \mathbf{F}(R) \to \mathbf{E}(R)$을

$$\Psi_R(\mu) = \mu \circ \psi, \qquad (\mu \in \mathbf{F}(R))$$

로 정의하자. 그러면, 다음 diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}(R) \arrow[r, "\Psi_R"] \arrow[d, "\xi_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{E}(R) \arrow[d, "\xi_*"] \\ \mathbf{F}(S) \arrow[r, "\Psi_S"'] & \mathbf{E}(S) \end{tikzcd} \qquad (\xi \in \mathsf{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(R,S))$$

이 commute 하는 것은 당연하고, 따라서, $\Psi : \mathbf{F} \to \mathbf{E}$ 는 natural transformation 인 것을 알 수 있다. 아래 보조정리에서는 간단한 표기법을 위하여, Mor $(\mathbf{F}, \mathbf{E})$ 는 $\mathbf{F}$ 에서 $\mathbf{E}$ 로 가는 morphism — 즉, natural transformation — 전체의 집합을 뜻하기로 한다.

보조정리 5.1 (Yoneda's Lemma) (가) 위에서 정의한 대응관계

$$\begin{cases} \mathsf{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(B,A) & \longrightarrow & \mathsf{Mor}\,(\mathbf{F},\mathbf{E}) \\ \qquad \psi & \longmapsto & \Psi \end{cases} \qquad (\psi \in \mathsf{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(B,A))$$

는 bijection 이다.

(나) 앞 (가)항의 Ψ 를 $[\psi]$ 로 표기하면, 대응관계 $\psi \leftrightarrow [\psi]$ 는 다음의 functorial property ;

$$[id] = id, \quad [\psi' \circ \psi] = [\psi] \circ [\psi']$$

을 만족한다. 따라서, ψ 가 isomorphism 일 필요충분조건은 $[\psi]$ 가 natural equivalence 인 것이다.

증명 : (가) 먼저 surjectivity 를 보이기 위해, $\Phi \in$ Mor $(\mathbf{F}, \mathbf{E})$ 라고 하고 $id_A \in \mathbf{F}(A)$ 를 생각하자. (지금의 경우에는 id_A 를 'the most general solution'으로 생각할 수 있다.) 그리고,

$$\Phi_A(id_A) = \psi \in \mathbf{E}(A)$$

라고 놓자 (단, $\Phi_A : \mathbf{F}(A) \to \mathbf{E}(A)$). 그러면, 다음 commuting diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}(A) \arrow[r, "\Phi_A"] \arrow[d, "\mu_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{E}(A) \arrow[d, "\mu_*"] \\ \mathbf{F}(R) \arrow[r, "\Phi_R"'] & \mathbf{E}(R) \end{tikzcd} \qquad (R \in k\text{-}\mathcal{A}lg, \;\; \mu \in \mathbf{F}(R))$$

으로부터, $\Phi_R = \Psi_R$, 즉 $\Phi = \Psi$ 임을 알 수 있다. 한편, injectivity 는

$$\Psi_A(id_A) = \psi$$

로부터 자명하다. (나) 항은 abstract non-sense. □

위 (나) 항은 앞 節의 질문 4.5 에 대한 대답이다. 이제 다음 정리는 자명하다.

정리 5.2 k-$\mathcal{A}lg$ 는 [the category of representable functors (over k)] 와 서로 anti-equivalent 하다.

따라서, 지금까지의 논의를 정리하면 ;

$$\begin{bmatrix}\text{꿈★들의} \\ \text{category}\end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix}\text{category of} \\ \text{representable} \\ \text{functors over } k\end{bmatrix} \quad \xleftarrow[\text{anti}]{\approx} \quad k\text{-}\mathcal{A}lg$$

$$\text{꿈★ } \mathbf{F} \quad \longleftrightarrow \quad \mathsf{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(A, -) \quad \longleftrightarrow \quad A$$

로 요약할 수 있다.

Yoneda's Lemma 와 특히 'the most general solution' id_A 를 이해하는 데에는 다음 보기가 도움이 된다.

보기 5.3 (앞 제 2 절의 notation 참조.) 아래 왼쪽의 꿈들은 각각 오른쪽의 k-algebra 들에 의해 represent 되는 것은 당연하다 ;

$$\mathbf{O}_n \longleftrightarrow A = k[\{X_{ij}\}] \,/\, \langle n^2\text{-개의 다항식 } {}^{\mathbf{t}}(X_{ij}) \cdot (X_{ij}) - I \rangle,$$
$$\mu_2 \longleftrightarrow B = k[X] \,/\, \langle X^2 - 1 \rangle.$$

한편, 우리는 함수

$$\det_R : \mathbf{O}_n(R) \to \mu_2(R), \qquad (R \in k\text{-}\mathcal{A}lg)$$

의 의미를 이미 잘 알고 있다. 그리고,

$$\det : \mathbf{O}_n \to \mu_2$$

가 꿈들 間의 morphism (natural transformation) 인 것도 이젠 당연하다. (나중에 affine group scheme 을 정의하면, det 는 물론 [morphism of affine group schemes] 가 된다.) 그러면, det **에 대응되는** $\delta \in \mathsf{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(B, A)$ **는 무엇일까 ?** 우선, 보조정리 4.2 에 의해 꿈과 representable functor 를 **identify** 하면, Yoneda's Lemma 의 증명으로부터 $\delta = \det_A(id_A)$ 인 것을 알 수 있다. 이제,

$$\begin{tikzcd} \mathbf{O}_n(A) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\det_A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathsf{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(A, A) \arrow[d, "\det_A"] \\ \mu_2(A) \arrow[r, "\approx"'] & \mathsf{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(B, A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\overline{X_{ij}}) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\det_A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & id_A \arrow[d, "\det_A"] \\ \det(\overline{X_{ij}}) \arrow[r, "\approx"'] & \delta \end{tikzcd}$$

이므로, det 와 대응되는 $\delta \in \mathsf{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(B, A)$ 는, 우리가 기대했던 대로,

$$\delta(\overline{X}) = \det(\overline{X_{ij}})$$

로 정의된다.

제 6 절 꿍꿍이

이제 abstract non-sense 는 끝내고, 기하학을 시작하자. '꿍꿍이'는 scheme 을 번역한 것이고, 이 글에서 정확히는 [affine scheme over $\mathbb{Z}$] 를 뜻한다.

神話 時代에는 제 5절까지의 내용은 오히려 잘 알려져 있었고 (지금은 별로 그런 것 같지 않지만), 마지막 단계인 꿍꿍이의 정의가 主된 관심사였다. 즉, 각각의 꿍꿍이에 어떤 기하적 구조 — k-algebra R 과는 無關한 기하적 구조 — 를 주면 우리의 꿈 ★ 을 이룰 수 있을까 ?

다음에 소개할 꿍꿍이의 정의는 하루 아침에 만들어진 것은 물론 아니었다. 꿍꿍이는 많은 경쟁자들을 물리치고 대수기하학의 'modern language'로 자리를 잡았던 것이다. '캠프'의 강의에서도 따라서 제 6절과 제 7절에 가장 많은 시간을 할애한 것은 당연한 일이었다.

그러나, 이 글에서는 Hartshorne [1] 의 도움을 받아 TEX 노동의 고통 (!) 을 줄여 보고자 한다.[10] 즉, [1, pp. 60–74] 의 모든 정의와 표기법 그리고 결과들을 그대로 사용하려고 한다. 그러니 독자들께서도 옆에 [1] 을 준비하기 바란다.

[10] 이 *이쁜* 책이 예쁜 것을 하는건 난생처음이다.

즉, 독자들이 sheaf, the category of sheaves, direct limit, stalk, spectrum, locally ringed space[11] 등의 개념을 이해했다고 가정하고······.

⋮ ⋮ ⋮

한참 지난 후에······, 이제 [1, p. 74] 의 Definition 을 우리의 용어로 옮겨 적으면 다음과 같다.

정의 6.1 어떤 **ring** A 가 존재하여, locally ringed space $(X, \mathcal{O}_X)$ 가 (locally ringed space 로써) spectrum $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ 와 isomorphic 하면, $(X, \mathcal{O}_X)$ 를 우리는 **꿍꿍이**라고 부른다. 물론, **꿍꿍이들의** category 는 the category of locally ringed spaces 의 full subcategory 로 정의한다.

이 節의 목표는 다음 정리를 **state** 하는 것이다.

정리 6.2 The category of rings 와 — 즉, $\mathbb{Z}$-$\mathcal{A}lg$ 와 — [꿍꿍이들의 category] 는 서로 anti-equivalent 하다.

증명 : Faithfulness 만을 제외하곤 모든 것이 [1, p. 73, Proposition 2.3] 에 증명되어 있다.[12] 그리고, faithfulness — 즉, [1] 의 대응관계

$$\varphi \longmapsto (f, f^\sharp)$$

의 injectivity — 는 다음 commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "f^\sharp(\operatorname{Spec} A)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(\operatorname{Spec} B) \arrow[r, "\approx"'] & B
\end{tikzcd}$$

[11] Classical language 의 ringed space 와는 엄연히 다른 개념이다. ([4, p. 8, 1.4.7] 과 비교.) 다시 말해, the category of locally ringed spaces 는 the category of ringed spaces 의 full subcategory 가 아니다.

[12] 그러나, [1] 에서 위 정리 6.2 의 statement 는 찾을 수 없다. [1, p. 20] 에서 우리의 정리 2.1 을 대서특필한 것에 비추어 볼 때, 함부로 말하자면, 정말 *이쁜* [1] 은 정리 6.2 을 비밀로 하고 싶었거나 아니면 몰랐거나 두 가지 가능성밖에 없다! ㅋㅋ.

으로부터 明白하다.[13] □

처음 이 부분을 배울 때, 가장 不自然스러운 것이 morphism of locally ringed spaces 의 정의이다. 그리고, [1, p. 74, Caution 2.3.0] 에도 강조되어 있듯이, 이는 morphism of ringed spaces 와는 다른 개념이다.[14] 즉, 우리는 morphism of ringed spaces 中에서 ring homomorphism 에 대응하는 것들만을 morphism of locally ringed spaces 라고 命名한 것이다. 왜냐하면, 그래야만 우리의 꿈 ★ 이 이루어지므로……

제 7 절 꿍꿍이 over k

이 節에서는 마지막 단계로 [꿍꿍이 over k] 를 정의한다.

정의 7.1 [꿍꿍이 over k 들의 category] 를 다음과 같이 정의하자. 우선, [꿍꿍이 over k] 를 [**꿍꿍이** $(X, \mathcal{O}_X)$ 와 morphism of locally ringed spaces $(f, f^\sharp) : X \to \operatorname{Spec} k$ 의 pair] $\big((X, \mathcal{O}_X), (f, f^\sharp)\big)$ — 혹은, 간단히 화살표 $\Big(X \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} k\Big)$ — 로 정의하자. 또, $(h, h^\sharp) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ 가

$$(h, h^\sharp) \in \mathsf{Mor}_{\text{꿍꿍이}/k}\left(\Big(Y \xrightarrow{g} \operatorname{Spec} k\Big), \Big(X \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} k\Big)\right)$$

라는 말은 $(h, h^\sharp)$ 이 다음 diagram;

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "g"'] \arrow[rr, phantom, shift right=6, "\circlearrowright"] & & X \arrow[dl, "f"] \\ & \operatorname{Spec} k & \end{tikzcd}$$

을 commute 시키는 morphism of locally ringed spaces 라는 뜻으로 정의하자.

이제, 제 1절의 보기 1.2 (다) 항과 앞 節의 정리 6.2 를 함께 생각하면;

정리 7.2 k-$\mathcal{A}lg$ 와 [꿍꿍이 over k 들의 category] 는 서로 anti-equivalent 하다.

증명 : Abstract non-sense. □

[13] 사실은 이 부분도 [1, p. 73, Proposition 2.3.(c)] 의 증명 시작 부분에 쓰여져 있다.
[14] [4, p. 8, 1.4.7] 참조.

보기 7.3 결국 앞 제6절의 꿍꿍이는 [꿍꿍이 over $\mathbb{Z}$] 인 셈이다. 물론, ring homomorphism $(\mathbb{Z} \to A)$ 는 유일하므로, morphism of locally ringed spaces $(\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z})$ 도 유일하다.

지금까지의 모든 논의를 종합하면;

$$\begin{bmatrix}\text{category of}\\ \text{representable}\\ \text{functors over } k\end{bmatrix} \quad \xleftarrow[\text{anti}]{\approx} \quad k\text{-}\mathcal{A}lg \quad \xrightarrow[\text{anti}]{\approx} \quad \begin{bmatrix}\text{category of}\\ \text{꿍꿍이 over } k\end{bmatrix}$$

$$\text{꿈}\bigstar \approx \mathsf{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(A, -) \quad \longleftrightarrow \quad (k \to A) \quad \longleftrightarrow \quad (\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} k)$$

로 나타낼 수 있다. (k-$\mathcal{A}lg$ 와 보기 1.2 (다) 항의 $\mathcal{A}_k$ 를 identify 하였다.)

정의 7.4 [꿈★], 혹은 [representable functor over k], 혹은 [k-algebra], 혹은 [꿍꿍이 over k] 를 모두 **identify** 하고 [affine scheme over k] 라고 부른다.

제 8 절 Affine Group Scheme over k

우리는 앞에서 [affine scheme over k] 가 여러 가지 개념의 'mixture'인 것을 살펴 보았다. 따라서, 당연히, [affine group scheme over k] 에도 여러 개념이 섞여 있을 수밖에 없다.

그러나, 우리가 뒤에서 간단히 언급할 [group scheme over k] 보다 [affine group scheme over k] 가 월등히 다루기 쉬운 이유는 이들을 representable functor 로 이해할 수 있기 때문이다.

정의 8.1 Functor

$$\mathbf{G} : k\text{-}\mathcal{A}lg \longrightarrow \mathcal{G}roup$$

이 [꿈★, 즉 representable functor over k] 일 때, $\mathbf{G}$ 를 [affine group scheme over k] 라고 부른다.

주의 8.2 약간의 보충 설명이 필요하다. 즉;

(가) k-algebra A 가 [affine group scheme over k] $\mathbf{G}$ 를 represent 한다고 할 때, 위 정의는 각각의 k-algebra R 에 대해 $\mathsf{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(A, R)$ 에 group structure 가

주어져 있다는 뜻이다. 이 group structure 는 물론 $\mathsf{Hom}_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(A,R)$ 의 natural abelian group structure 와는 전혀 상관이 없다.

(나) $\xi : R \to S$ 가 k-algebra homomorphism 이면, $\mathbf{G}(\xi) : \mathbf{G}(R) \to \mathbf{G}(S)$ 는 당연히 group homomorphism 이다.

(다) $\Phi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ 가 [morphism of affine group schemes over k] 라는 말은, Φ 가 natural transformation 이라는 뜻이므로, 모든 k-algebra R 에 대해 $\Phi_R : \mathbf{G}(R) \to \mathbf{H}(R)$ 이 group homomorphism 이어야 한다.

(라) 지금까지의 [affine scheme over k] 는 'set functor' 라고 부르고, [affine group scheme over k] 는 'group functor' 라고 구분해 부르기도 한다.

보기 8.3 제 3절의 꿈 $\mathbf{SL}_n$, $\mathbf{O}_n$, μ_n 은 모두 [affine group scheme over k] 이다. 그리고 the additive group scheme $\mathbf{G_a}$ 는 $k[X]$ 에 의해 represent 되고, the multiplicative group scheme $\mathbf{G_m}$ 은 $k[X,Y] / \langle XY-1\rangle$ 에 의해 represent 된다. 마찬가지로 $\mathbf{GL}_n$ 은 $k[X_{ij},Y] / \langle Y\cdot\det(X_{ij})-1\rangle$ 에 대응된다.

다음 논의를 위해서는 [the category of affine schemes over k] 의 categorical product 가 필요하다.

보조정리 8.4 $\mathbf{E}$ 와 $\mathbf{F}$ 가 각각 k-algebra A 와 B 에 의해 represent 되는 [affine scheme over k] 일 때, $\mathbf{E},\mathbf{F}$ 의 categorical product 는

$$(\mathbf{E}\times\mathbf{F})(R) = \mathbf{E}(R)\times\mathbf{F}(R), \qquad (R\in k\text{-}\mathcal{A}lg)$$

로 주어지고,[15] k-algebra $A\otimes_k B$ 에 의해 represent 된다.

증명 : $A\otimes_k B$ 가 k-$\mathcal{A}lg$ 의 categorical coproduct 이므로 당연해 보이지만, 언제나 알딸딸한 부분이다. 독자들에게 맡긴다. □

이제, $\mathbf{G}$ 를 [affine group scheme over k] 라고 하자. 그러면, 모든 k-algebra homomorphism $\xi : R\to S$ 에 대해, $\mathbf{G}(\xi) : \mathbf{G}(R)\to\mathbf{G}(S)$ **가 group homomorphism 이므로** 다음 diagram (단, $mult_R : \mathbf{G}(R)\times\mathbf{G}(R)$ 은 $\mathbf{G}(R)$ 의 group multiplication) ;

[15] $\mathbf{E}(R)\times\mathbf{F}(R)$ 은 집합의 product 이다. $\mathbf{E}(R)$ 과 $\mathbf{F}(R)$ 을 각각 polynomial 들의 zero set 으로 보는 꿈의 입장에서는, polynomial 의 변수 개수를 늘린 것으로 이해할 수 있다.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G}(R)\times\mathbf{G}(R) \arrow[r, "mult_R"] \arrow[d, "\mathbf{G}(\xi)\times\mathbf{G}(\xi)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{G}(R) \arrow[d, "\mathbf{G}(\xi)"] \\
\mathbf{G}(S)\times\mathbf{G}(S) \arrow[r, "mult_S"'] & \mathbf{G}(S)
\end{tikzcd} \qquad (\xi \in \mathsf{Hom}_{k\text{-}\mathcal{Alg}}(R,S))$$

이 commute 하게 된다. 따라서, $mult : \mathbf{G}\times\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ 를 **natural transformation** 으로 생각할 수 있고, 다음 commutative diagram ;

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G}\times\mathbf{G}\times\mathbf{G} \arrow[r, "id\times mult"] \arrow[d, "mult\times id"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{G}\times\mathbf{G} \arrow[d, "mult"] \\
\mathbf{G}\times\mathbf{G} \arrow[r, "mult"'] & \mathbf{G}
\end{tikzcd}$$

을 얻는다. 마찬가지로, 다음 4개 (2개는 생략) 의 commutative diagram (단, $unit : \mathbf{e} \to \mathbf{G}$ 는 identity 이고,[16] $inv : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ 는 inversion) ;

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{e}\times\mathbf{G} \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "unit\times id"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{G} \arrow[d, "||"] \\
\mathbf{G}\times\mathbf{G} \arrow[r, "mult"'] & \mathbf{G}
\end{tikzcd} \qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{G} \arrow[r, "inv\times id"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{G}\times\mathbf{G} \arrow[d, "mult"] \\
\mathbf{e} \arrow[r, "unit"'] & \mathbf{G}
\end{tikzcd}$$

을 얻을 수 있다.

역으로, [affine schemes over k] $\mathbf{G}$ 가 위 5개의 사각형을 commute 시키는 natural transformation $mult$, $unit$, inv 을 가지면, $\mathbf{G}$ 가 [affine group schemes over k] 가 되는 것은 자명하다.

다음에는, k-algebra A 가 [affine group scheme over k] $\mathbf{G}$ 를 represent 한다고 하자. 이제, Yoneda's Lemma 를 사용해 k-algebra 의 觀點에서 보면, 위 5 개의 commutative diagram 의 화살표 방향이 모두 바뀐다. 즉 ;

[16]꿈 $\mathbf{e}$ 는 보기 4.6 참조.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A \otimes_k A \arrow[d, "\Delta \otimes id"] \\ A \otimes_k A \arrow[r, "id \otimes \Delta"'] & A \otimes_k A \otimes_k A \end{tikzcd}$$

이고,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "||"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A \otimes_k A \arrow[d, "\varepsilon \otimes id"] \\ A \arrow[r, "\approx"'] & k \otimes_k A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & k \arrow[d] \\ A \otimes_k A \arrow[r, "S \otimes id"'] & A \end{tikzcd}$$

가 된다. 이 때, $\Delta : A \to A \otimes_k A$ 는 comultiplication, $\varepsilon : A \to k$ 는 augmentation, $S : A \to A$ 는 antipode 라고 부른다. 그리고, 이러한 조건을 만족하는 k-algebra A 를 [Hopf algebra over k] 라고 부른다. 이를 요약하면;

정리 8.5 [The category of (commutative) Hopf algebras over k] 와 [the category of affine group schemes over k] 는 서로 anti-equivalent 하다.[17]

정리 8.5 로 因하여, 특히 '大家'들 사이에서는,

$$[\,\text{group}\,] = [\,\text{affine group scheme}\,] = [\,\text{Hopf algebra}\,]$$

의 용어 사용 (濫用?) 이 오랜 전통이 되어 왔다.[18] 그래서, [Hopf algebra 이지만 애당초 group 일 수는 없는] quantum group 을 group 이라고 命名했던 것이다. ([2] 참조.)

보기 8.6 The additive group scheme $\mathbf{G_a}$ 는 $k[X]$ 에 의해 represent 된다. (보기 8.3 참조.) 이 경우에

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \qquad \varepsilon(X) = 0, \qquad S(X) = -X$$

임을 확인할 수 있다.

[17] 따라서, 일반적으로 affine group scheme 은 [commutative but non-cocommutative Hopf algebra] 이다. 反面에, group algebra $k[G]$ 는 일반적으로 [non-commutative but cocommutative Hopf algebra] 이다. 그래서 수학자들은 오랫동안 [non-commutative and non-cocommutative Hopf algebra] — 예를 들어, quantum group — 을 찾으려고 노력했다. [2] 참조.

[18] 마치 모르면 빠지란듯이⋯⋯. 이젠 우리도⋯⋯?

보기 8.7 k-algebra A 가 [affine group scheme over k] $\mathbf{G}$ 를 represent 한다고 할 때, $\mathbf{G}$ 가 commutative group scheme — 즉, 모든 $\mathbf{G}(R)$ 이 commutative group — 이기 위한 필요충분조건은 A 가 [cocommutative Hopf algebra over k] 인 것이다.

보기 8.8 A 가 affine group scheme $\mathbf{G}$ 를 represent 한다고 할 때, $\mathbf{G}$ 의 linear representation 은 Hopf algebra A 의 comodule 에 대응된다.

⋮ ⋮ ⋮

정리 8.9 만약 k 가 field 이면, 모든 affine group scheme 은 어떤 $\mathbf{GL}_n$ 의 closed subgroup 과 isomorphic 하다.

정리 8.9 를 설명하려면, 기하학 — 즉, spectrum — 으로 돌아가야 한다. 이 정도에서 마무리하자.

제 9 절 Epilogue ; Group Scheme

어쩌다 보니, 아직 projective variety 나 projective scheme 에 대해서는 한 번도 언급할 기회가 없었다. 어차피 이 글에서는 이를 다루지 않을 것이니, 다음 정의에 만족하기로 하자.

정의 9.1 Locally ringed space $(X, \mathcal{O}_X)$ 가 *"locally looks like an affine scheme"* 이면, $(X, \mathcal{O}_X)$ 를 scheme 이라고 부른다. [scheme over k] 도 제 7절에서와 같은 방법으로 정의한다.

그런데, 이번에는 위 정의 9.1 을 이용해 group scheme 을 정의할 수는 없다. *"Locally group"* 이라는 말은 non-sense 이기 때문이다. 따라서, group scheme 은 제 8절에서와 같은 5개의 commutative diagram 으로 정의하여야 한다. 문제는 identity element 인데……. 다음 기회로 미룬다.

이 글의 목표 中 하나는 우리 대학원생들이 혹 타원곡선이 group scheme 이라는 말을 듣더라도 '쫄지' 않도록 격려하는 것이었다. 또, 어쩌다 만난 책이나 논문이 다음 문장 ;

"Soit $\mathbf{G}$ un schéma en groupe (affine)."

로 시작되더라도 **당당히 맞설 수 있기**를 당부하면서 글을 맺는다.

참고 문헌

[1] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, GTM **52**, Springer-Verlag, 1977.

[2] J. Hong and S.-J. Kang, *Introduction to quantum groups and crystal bases*, GSM **42**, Amer. Math. Soc., 2002.

[3] S. Lang, *Algebra*, 3rd ed., Addison-Wesley, New York, 1993.

[4] T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, 2nd ed., Progress in Math., **9**, Birkhäuser, 1998.

[5] B. Stenström, *Rings of quotients: an introduction to methods of ring theory*, Springer-Verlag, 1979.

[6] W. C. Waterhouse, *Introduction to affine group schemes*, GTM **66**, Springer-Verlag, 1979.