강의록 (강의계획서 ?)

Homological Algebra

李 仁 碩

서울대학교 수학과

머리말

HomAlg §0.0
version-201011
오타 수정 201011

애고 ㅠㅠ

이 강의록의 version은 자주 바뀔 것이므로 매번 출력하는 **종이 낭비 절대 금지!**

참고 문헌에는 이 강의록에서 인용한 책들을 모두 나열하였다. 또 이 강좌가 4학년을 위한 것임을 감안하여 대학원 수준의 참고도서도 포함시켰다.[1] 모든 책을 구입하는 만용 절대 금지! 책은 도서관에 있다. 27동 곳곳에도 널려 있을 것이다. Hu의 책([3]) 이외의 다른 책들을 1쪽부터 읽는 무모함도 절대 금지.

주의: Hu [3]를 볼 때, 증명은 읽지 말고 먼저 혼자 힘으로 증명해 볼 것! 그리고 [3, §II.1-§II.2]는 절대로(!) 읽지 말 것. 알던 것도 모르게 될까 우려됨.[2]

§3.8, §3.10 그리고 §3.11의 대부분은 강의에서는 생략할 예정이다.

아마 이 강좌는 세상에서 가장 재미없고 지루한 강좌일 것이다. 대체 왜 이런 걸 공부하는지 전혀 설명하지 않기 때문이다.[3] 그러나, 좀 과장하면, 수학

[1] 대학원 수준의 책들은 지금은 구경거리 정도로만 생각하면 된다.
[2] [3, §II.1–§II.2]는 이 책이 처음 출판된 1960년대에 유행했던 style.
[3] 이 말 속에는 이제 "달리기 훈련"이 막바지에 달했다는 느낌이 포함되어 있다.

의 tool 은 손가락 (counting) 과 homological algebra 뿐이다. 이 강좌의 목표는 수강생들이 abstract non-sense (arrow chasing) 를 충분히 연습하여 종이와 연필만 있으면 언제라도 할 수 있다는 확신을 갖도록 하는 것이다. 그렇게 되면 수강생들이 훗날 — 예를 들어, abelian category 를 만나더라도 — 세세한 증명을 생략할 수 (도) 있게 될 것이다.

2013 년 8 월

李 仁 碩

차 례

제 1 장 복습

Thomas Edison을 흉내 내어 좀 과장하자면 "학문은 99 %의 독학과 1 %의 강의로……". 혼자 읽을 수 있는 건 강의에서 다루지 않는다.

1.1. Algebraic Structures

HomAlg § 1.1
version-150901

표기법:

[I] = 학부 대수학 강의 I: 선형대수와 군

[II] = 학부 대수학 강의 II: 대수학

복습: [II, 제 1–4 장]

자습: [3, I.1–I.2]

관습: (가) [II] 에서와 같이 우리는 **multiplicative identity** 1 **을 갖는 ring 과** R**-algebra 만을 다룬다**. 단, subring, subalgebra 또는 ideal 은 1 을 갖지 않아도 좋다. 그리고 S 가 R 의 subring 이고 $1_S \in S$ 이면, $1_S = 1_R$ 이라고 가정한다 (algebra 의 경우도 마찬가지). 물론 [II] 에서의 약속들은 여전히 유효하다. 즉:

(1) [II, 관습 1.2.10]: $1 \neq 0$.

(2) [II, 약속 1.4.1]: 모든 R-module 은 unitary.

(3) [II, 약속 1.4.11]: R-algebra 라고 말하면, R 은 commutative.

(나) 모든 ring homomorphism 과 R-algebra homomorphism 은 1 **을 1 로 보낸다고 가정**한다.

(다) 4 학년 과목부터는 base field 를 (F 로 쓰지 않고) k 로 쓰는 것이 어울린다 $\cdots\cdots$ 앞으로 k 는 항상 field.

(라) k-vector space 라고 하면, k 는 항상 field.[1]

[1] Skew-field 인 경우는 생각 안 하겠다는 뜻. [II, §2.3] 참조.

1.2. Modules

HomAlg § 1.2
version-130812

이 節에서 R은 (not necessarily commutative) ring이고 물론 $1 \in R$.

정의 1.2.1. left R-module ${}_RM$, right R-module M_R.

명제 1.2.2. R이 commutative ring이면 left R-module = right R-module.[2]

증명 : M이 left R-module일 때, 오른쪽 상수곱을

$$xr = rx, \qquad (x \in M,\ r \in R)$$

로 정의하면 M은 동시에 right R-module이 된다. 또 이 right R-module에 (원래 left R-module의 구조는 잊어 버리고) 왼쪽 상수곱을······. (예를 들어, [II, 관찰 1.4.8]의 '말장난'을 기억하라.) □

따라서 left R-module과 right R-module을 구분할 필요가 있는 경우는 R이 non-commutative ring일 때뿐이다.

연습문제 1.2.3. For left R-modules M and N :
(가) Show $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ is a $\mathbb{Z}$-module (abelian group).
(나) If R is a commutative ring, then $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ is an R-module.

연습문제 1.2.4. For a left R-module M :
(가) Show $\mathrm{End}_R(M, M)$ is a ring.
(나) If R is commutative, show $\mathrm{End}_R(M, M)$ is an R-algebra.

연습문제 1.2.5. For a left R-module M :
(가) Show $\mathrm{Hom}_R(R, M) \approx M$ as abelian groups.
(나) If R is commutative, show $\mathrm{Hom}_R(R, M) \approx M$ as R-modules.

연습문제 1.2.6. (가) Compute $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$ for $m, n = 0, 1, 2, \ldots$.
(나) Compute $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$.

정의 1.2.7. (R, S)-**bimodule** ${}_RM_S$: the left module structure and the right module structure should be 'compatible'.

[2] '='의 '엄밀한' 의미는 정의 2.3.9에서 설명.

보기 1.2.8. (가) R 자신은 (R, R)-bimodule.
(나) $1 \in S \leq R$ 이면, R 은 (R, S)-bimodule.
(다) $\varphi : R \to S$ 가 ring homomorphism 일 때, S 는 (S, R)-bimodule.

보기 1.2.9. R 이 commutative 일 때, left R-module M 은 (R, R)-bimodule.

다음 연습문제와 유사한 명제들은 [4, p. 203, p. 206] 에서 찾을 수 있다.

연습문제 1.2.10. (가) Let ${}_RM_S$, N_S. Define a natural **right** R-module structure on the abelian group $\mathrm{Hom}_S(M, N)$.[3]
(나) Let ${}_SM_R$, ${}_SN$. Define a natural **left** R-module structure on the abelian group $\mathrm{Hom}_S(M, N)$.

[3] 왜 left R-module structure는 정의할 수 없는가?

1.3. Direct Product and Direct Sum

HomAlg § 1.3
version-150901

복습: [II, Ch. 9].

자습: [3, I.3].

1.4. Free Modules

HomAlg § 1.4
version-150901

복습: [II, §1.7 및 Ch. 10].

자습: [3, I.4].

우리는 [II, § 11.1] 에서 integral domain D 위에서 free D-module 의 rank (dimension) 가 잘 정의되는 것을 배웠다. 이 節의 목표는 이를 commutative ring 의 경우로 확장하는 것이다.[4] 이제 R 은 **commutative** ring 이라고 하자.

관찰 1.4.1. M 은 R-module 이고, $\mathfrak{a}$ 는 R 의 ideal 이면, $M/\mathfrak{a}M$ 은 자연스러운 $R/\mathfrak{a}$-module structure 를 갖는다.[5]

증명 : 물론 $r \in R$, $x \in M$ 일 때, $\bar{r}\,\bar{x} = \overline{rx}$ 로 정의한다. 문제는 이 $R/\mathfrak{a}$-상수곱의 well-definedness. 이는 다음 (익숙한) 등식

$$ra - r'a' = (r - r')a + r'(a - a')$$

으로부터 자명. □

[4] 이제 보니, 이 내용은 [II, § 11.1] 에 포함시켰어도 좋았을 것 같다.
[5] 이 관찰의 statement 에는 $\mathfrak{a}M \leq_R M$ 이라는 뜻이 포함되어 있다. 왜 그런지, 또 $\mathfrak{a}M$ 의 정의가 무엇인지(무엇이어야 하는지) 등을 생각하는 것은 이제는(4학년부터는) 독자들의 몫이다.

연습문제 1.4.2. M_i는 R-module, $N_i \leq_R M_i$이고, $\mathfrak{a}$는 R의 ideal일 때, 다음을 보여라.
(가) $\oplus_{i\in I} M_i \big/ \oplus_{i\in I} N_i \approx \oplus_{i\in I}(M_i/N_i)$ as R-modules.
(나) $\oplus_{i\in I}\, \mathfrak{a}M_i = \mathfrak{a}(\oplus_{i\in I} M_i)$.
(다) $\oplus_{i\in I} M_i \big/ \oplus_{i\in I}\, \mathfrak{a}M_i \approx \oplus_{i\in I}(M_i/\mathfrak{a}M_i)$ as $R/\mathfrak{a}$-modules.

명제 1.4.3. R이 commutative ring일 때, free R-module M의 rank는 well-defined.

증명 : Zorn's Lemma에 의해 R은 항상 maximal ideal $\mathfrak{m}$을 갖는다.[6] 이제 $M = \oplus_{i\in I} R$이라고 하면, 당연히 $\mathfrak{m}R = \mathfrak{m}$이므로,

$$\oplus_{i\in I} R \big/ \oplus_{i\in I}\, \mathfrak{m}R \approx \oplus_{i\in I}(R/\mathfrak{m}R) = \oplus_{i\in I}(R/\mathfrak{m})$$

이다($R/\mathfrak{m}$-module isomorphism). 그런데 $R/\mathfrak{m}$은 field이므로, 벡터공간의 dimension의 well-definedness로부터 증명 끝. □

위 증명에서 우리는 Zorn's Lemma를 이용하였다. 한편, [5, p. 11]에 따르면, Zorn's Lemma를 사용하지 않는 증명도 있다고 한다.[7]

그리고 물론 R이 non-commutative일 때에는 일반적으로 free R-module의 rank는 잘 정의되지 않는다. Counter-example은 [2, p. 26, Exercises 4.1] 또는 [4, p. 190, Exercises 13] 참조.

---

[6] [II, 명제 14.1.6] 참조.
[7] [4, pp. 184–186]은 한번도 읽어 본 적 없다······.

제 2 장 Categories

Homological Algebra 를 먼저 소개하는 것이 바른 순서이겠지만 시간절약을 위해 category 를 먼저 소개. Category 를 정의하면 [II] 의 □□ 의 뜻이 분명해 진다.

2.1. Categories and Morphisms

HomAlg § 2.1
version-130812

정의부터 시작.

정의 2.1.1. A **category** $\mathcal{C}$ consists of the following data: a class of **objects** $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, a set of $\mathcal{C}$-**morphisms** $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ for $A,B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, and a law of **composition**

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C)$$

for $A,B,C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, denoted by

$$(g,f) \longmapsto g \circ f, \qquad (f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B),\ \ g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C))$$

satisfying the following axioms:

(1) For each $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, there is a morphism (called the identity morphism) $id_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,A)$ such that

$$f \circ id_A = f \quad \text{and} \quad id_A \circ g = g$$

for all $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ and $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,A)$.

(2) The law of composition is associative, that is, if $A,B,C,D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, then

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

for all $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C)$, $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,D)$.

표기법 2.1.2. (가) Write $A \in \mathcal{C}$ if $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
(나) Write $f : A \to B$ if $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$. ($f$ 가 함수가 아니어도.)

Caution 2.1.3. Hu [3, § II.1-§ II.2] 는 절대 (!) 보지 마시오.

Remark 2.1.4. (가) A 'class' of objects, NOT a 'set' of objects. 'class'가 뭐였더라? 집합만 다루라고 했는데 ······
(나) A 'set' $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$.
(다) 꼭 필요해 보이진 않지만 (?), 다음 조건을 추가하기도 한다: the sets $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ and $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A', B')$ are disjoint unless $A = A'$ and $B = B'$.
(라) $id_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ 는 물론 unique: $id_A = id_A \circ id'_A = id'_A$.

정의 2.1.5. A category $\mathcal{C}$ is a **small category** if $\mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$ is a set.

보기 2.1.6. (가) The category of (all) sets $\mathcal{S}et$: morphism 은 function.
(나) The category of (all) groups $\mathcal{G}r$, the category of (all) k-vector spaces $\mathcal{V}_k$, the category of (all) (left) R-modules $\mathcal{M}od_R$: morphism 은 homomorphism.
(다) The category of (all) abelian groups $\mathcal{A}b$, the category of (all) finitely generated (left) R-modules: morphism 은 homomorphism.

[II] 에서와 같이 우리는 **multiplicative identy 1 을 갖는 ring 과 R-algebra 만을 다룬다.**[1] 단 subring, subalgebra, ideal 은 1 을 갖지 않아도 좋다.

보기 2.1.7. (가) The category of (all) rings $\mathcal{R}ing$, the category of (all) R-algebras $\mathcal{A}lg_R$: morphism 은 homomorphism with $1 \mapsto 1$.
(다) The category of (all) commutative rings $\mathcal{C}omm\mathcal{R}ing$, the category of (all) commutative R-algebras $\mathcal{C}omm\mathcal{A}lg_R$: morphism 은 homomorphism with $1 \mapsto 1$.

정의 2.1.8. (가) A category $\mathcal{D}$ is a **subcategory** of a category $\mathcal{C}$ if $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ and $\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(A, B) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ for all $A, B \in \mathcal{D}$.
(나) A subcategory $\mathcal{D}$ of $\mathcal{C}$ is a **full subcategory** if $\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ for all $A, B \in \mathcal{D}$.

---
[1] 그리고 여전히 R-algebra 라고 말하면, R 은 commutative.

보기 2.1.9. (가) $\mathcal{A}b$ is a full subcategory of $\mathcal{G}r$.
(나) The category of (all) finitely generated R-modules is a full subcategory of $\mathcal{M}od_R$.

보기 2.1.10. Category $\mathcal{CG}$ is defined as a full subcategory of $\mathcal{A}b$ with

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{CG}) = \{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Then $\mathcal{CG}$ is a small category.

물론 morphism 들은 대개 함수 (혹은 함수와 유사한 것) 이지만, 꼭 그럴 필요는 없다. 뿐만 아니라 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) = \emptyset$ 일 수도 있다.

보기 2.1.11. (가) The category of (all) topological spaces $\mathcal{T}op$: morphism 은 연속함수.
(나) The category of (all) 'pointed' topological spaces $\mathcal{T}op_1$:

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{T}op_1) = \{(X, x) \mid X \in \mathcal{T}op,\ \ x \in X\}$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{T}op_1}\big((X, x),\ (Y, y)\big) = \{f : X \to Y \mid f \text{ is continuous and } f(x) = y\}$$

Fundamental group $\pi_1(X, x)$ 가 생각난다.
(다) Let $X \in \mathcal{T}op$. Define the category $\mathcal{T}(X)$ by

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{T}) = \{U \subseteq X \mid U \text{ is open in } X\}$$

and $\mathrm{Mor}_{\mathcal{T}}(U, V) = \emptyset$ if U is not a subset of V, and $\mathrm{Mor}_{\mathcal{T}}(U, V)$ has a single element $\iota_{UV} : U \to V$ if $U \subseteq V$, where ι_{UV} is the inclusion map.

앞으로 우리는 수없이 많은 category 들을 만나게 될 것이다.

HomAlg § 2.2
version-201011

2.2. Isomorphisms

우리는 원래 homomorphism (morphism) 보다 isomorphism 을 먼저 생각하도록 훈련 받아 왔다. Isomorphism 은 '이름 바꾸기'이고 '이름만 다르고 본질적으로 같은······'. *대개 homomorphism 은 bijection 이 아닐 수도 있는 isomorphism······.* Category 들의 isomorphism 의 정의와 homomorphism 의 정의는 **외우는 것이 아니다!** 3층에 올라가 내려다 보면 저절로 알 수 있다.

정의 2.2.1. For $A, B \in \mathcal{C}$, $\varphi : A \to B$ is an **isomorphism** ($\mathcal{C}$-isomorphism) if there exists $\psi : B \to A$ such that $\psi \circ \varphi = id_A$ and $\varphi \circ \psi = id_B$. 이때 $A \approx B$ 로 표기.

오타 수정 201011

연습문제 2.2.2. (가) Isomorphic relation 은 equivalent relation 임을 보여라. (나) 위 정의 2.2.1 에서 ψ 는 (존재한다면) 유일함을 보여라.

새로운 세상!

보기 2.2.3. Category of *'candies'* $\mathcal{C}_{V,W}$: For fixed k-vector spaces V and W, define

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{V,W}) = \mathrm{Hom}_k(V, W), \qquad \text{write } (V \xrightarrow{L} W) \in \mathcal{C}_{V,W}.$$

즉 $\mathcal{C}_{V,W}$ 는 '화살표'들의 세계. 이제 morphism ('화살표'들 간의 '화살표') 을 어떻게 정의? 본능적으로 사각형을 생각! 즉 3층에 올라가 내려다 보면······.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\varphi"', "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W \arrow[d, "\psi", "\wr"'] \\
V \arrow[r, "M"'] & W
\end{tikzcd}$$

이제 morphim 을 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}_{V,W}}\left((V \xrightarrow{L} W),\, (V \xrightarrow{M} W)\right) \\
=&\{(\varphi, \psi) \in \mathrm{Hom}_k(V, V) \times \mathrm{Hom}_k(W, W) \mid M \circ \varphi = \psi \circ L\}
\end{aligned}$$

즉 위 사각형에서 $\wr$ 들을 제거하면 된다. 표기법을 익히기 위해 다시 써 보면

$$(\varphi, \psi) : (V \xrightarrow{L} W) \longrightarrow (V \xrightarrow{M} W)$$

가 된다.[2]

[2] 실제로 $\mathcal{C}_{V,W}$ 가 category 가 되는 것은 독자들이 확인 (morphism 들의 합성을 설명해야 한다). 앞으로 이런 건 언급하지 않는다.

연습문제 2.2.4. 위 정의 2.2.3 에서 — 물론 $\mathcal{C}_{V,W}$-morphism 을 먼저 정의했을 때 — $\mathcal{C}_{V,W}$-morphism (φ, ψ) 가 $\mathcal{C}_{V,W}$-isomorphism 일 필요충분조건은 $\varphi \in \mathbf{GL}(V)$ 이고 $\psi \in \mathbf{GL}(W)$ 인 것임을 보여라. 또 V, W 가 유한차원일 때 이를 행렬의 언어로 번역하라.

Candy 와 cookie 의 차이는?

보기 2.2.5. Category of *'cookies'* $\mathcal{C}_V$: For a fixed k-vector space V, define

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_V) = \mathrm{End}_k(V), \qquad \text{write } (V \overset{L}{\to} V) \in \mathcal{C}_V.$$

즉 $\mathcal{C}_V$ 도 '화살표'들의 세계. 이제 다시 3 층에 올라가 내려다 보면 $\cdots\cdots$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\varphi"', "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V \arrow[d, "\varphi", "\wr"'] \\ V \arrow[r, "M"'] & V \end{tikzcd}$$

주의: 물론 V 의 '이름 바꾸기'는 하나로 고정해야 의미가 있다 (V 의 서로 다른 '이름 바꾸기' 두 개를 생각한다면, 이는 'cookie'가 아니고 'candy'이다). 이제 morphism 을 정의할 수 있다.

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}_V}\big((V \overset{L}{\to} V),\, (V \overset{M}{\to} V)\big) = \{\varphi \in \mathrm{End}_k(V) \mid M \circ \varphi = \varphi \circ L\}$$

즉 위 사각형에서 $\wr$ 들을 제거하면 된다.[3]

연습문제 2.2.6. 위 정의 2.2.5 에서 $\mathcal{C}_V$-morphism φ 가 $\mathcal{C}_V$-isomorphism 일 필요충분조건은 $\varphi \in \mathbf{GL}(V)$ 인 것임을 보여라. 또 V 가 유한차원일 때 이를 행렬의 언어로 번역하라. (물론 V 의 기저는 하나로 고정해야 의미가 있다.)

연습문제 2.2.7. (가) 두 category $\mathcal{C}_{V,V}$ 와 $\mathcal{C}_V$ 의 차이점을 논하라.
(나) 선형대수는 — 물론 V 가 유한차원일 때 — category $\mathcal{C}_V$ 의 공부라고 할 수 있다. 우리는 [I] 에서 언젠가부터 category $\mathcal{C}_{V,W}$ 는 생각하지 않고 category $\mathcal{C}_V$ 만을 공부했다. 왜그랬을까?[4]

[3] $\mathcal{C}_{V,W}$, $\mathcal{C}_V$ 모두 small category.
[4] [I, 전환점 5.6.1] 참조.

연습문제 2.2.8. U, V, W 를 고정하고, '화살표' $(U \xrightarrow{M} V \xrightarrow{L} W)$ 들을 object 로 갖는 category 를 정의하라.

연습문제 2.2.9. Category $\mathcal{B}$ 의 object 들이

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{B}) = \{(V, B) \mid V \in \mathcal{V}_k \text{ and } B \text{ is a bilinear form on } V\}$$

라고 할 때, 자연스러운 $\mathcal{B}$-morphism 을 정의하라.[5]

하나만 더. (먼저 [II, 연습문제 2.1.15, 2.1.17] 을 복습하라. Lang [6, p. 121] 도 참조.)

보기 2.2.10. Commutative ring R 을 고정하고, category $\mathcal{A}lg^R$ 을

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{A}lg^R) = \{\, \alpha \in \mathrm{Hom}\,(R, \mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \mathcal{R}ing,\ \ \mathrm{im}\,\alpha \subseteq Z(\mathcal{A}),\ \ \alpha(1) = 1\}$$

로 정의하자. (이제 $\mathcal{A}lg^R$ 의 morphism 은 자명. 삼각형이나 사각형을 생각.)

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
\mathcal{A} \arrow[rr, "\varphi"'] & & \mathcal{B}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "="] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & R \arrow[d, "\beta"] \\
\mathcal{A} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

[II, 연습문제 2.1.15, 2.1.17] 에 의하면, the category of R-algebras $\mathcal{A}lg_R$ 과 category $\mathcal{A}lg^R$ 은 '본질적으로' 같은 category $\cdots\cdots$?

생각나는 것이 있다.

질문 2.2.11. (가) $\mathcal{A}b$ 와 $\mathcal{M}od_{\mathbb{Z}}$ 는 '본질적으로' 같은 category ?
(나) The category of (all) cyclic groups 와 보기 2.1.10 의 small category $\mathcal{CG}$ 는 '본질적으로' 같은 category ?

---
[5] [I, §10.5] 참조.

2.3. Functors

HomAlg §2.3
version-150827

Algebraic structure 간의 *'structure preserving function'* 을 homomorphism 이라고 불렀듯이, category 간의 *'structure preserving function'* 을 functor 라고 부른다. Category 의 structure 는 identity morphism 의 존재와 morphism 의 합성뿐이다.

정의 2.3.1. (가) Let $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ be categories. A **covariant functor** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consists of the following function(s):

$$F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$$
$$F : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B)), \qquad (A, B \in \mathcal{C})$$

satisfying

(1) $F(id_A) = id_{F(A)}$ for all $A \in \mathcal{C}$.

(2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ for all $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$.

위 조건 (1) 과 (2) 는 흔히 **'functorial property'** 라고 불리운다. $F(f) = f_*$ 의 'lower star (무릎 아래 star)' 표기법도 자주 사용한다.

(나) 위 (가) 항의 정의에서, 화살표의 방향이 바뀌면, 즉

$$F : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A)), \qquad (A, B \in \mathcal{C})$$
$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g), \qquad (f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B),\ g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C))$$

이면, F 를 **contravariant functor** 라고 부른다. $F(f) = f^*$ 의 'upper star (어깨 위 star)' 표기법도 자주 사용.

Functor 를 만나면 항상 다음 관찰을 우선 생각한다 (이미 몇 번 경험이 있다. [II, §10.4] 참조). 증명은 자명.

관찰 2.3.2. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 가 functor 일 때, $A \approx B \in \mathcal{C}$ 이면 $F(A) \approx F(B) \in \mathcal{D}$.

좀 과장하면 우리가 배운 거의 모든 것을 functor 의 언어로 번역할 수 있다.

보기 2.3.3. (가) Identity functor: A covariant functor $id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ defined by $id_{\mathcal{C}}(A) = A$ and $id_{\mathcal{C}}(f) = f$.

(나) Forgetful functor: A covariant functor $F : \mathcal{A}b \to \mathcal{S}et$ defined by $F(A) = A$ and $F(f) = f$.

보기 2.3.4. (가) Torsion part : [II, p. 24] 참조. When R is a domain, define a covariant functor $F : \mathcal{M}od_R \to \mathcal{M}od_R$ defined by $F(M) = M_{\mathrm{tor}}$. Note that an R-linear map $\varphi : M \to N$ naturally induces $\varphi|_{M_{\mathrm{tor}}} : M_{\mathrm{tor}} \to N_{\mathrm{tor}}$.[6]
(나) Restriction of scalars : [II, 연습문제 3.2.11] 과 그 표기법 참조. Define a covariant functor $F : \mathcal{M}od_R \to \mathcal{M}od_S$ defined by $F(M) = M$. Note that an R-linear map $\varphi : M \to N$ naturally induces an S-linear map $\varphi : M \to N$.
(다) Abelianization : [II, 관찰 4.5.15] 참조. Define a covariant functor $F : \mathcal{G}r \to \mathcal{A}b$ defined by $F(G) = G/[G, G]$. Note that a group homomorphism $\varphi : G \to H$ naturally induces a group homomorphism $\overline{\varphi} : G/[G, G] \to H/[H, H]$.
(라) Free group : [II, § 10.4] 참조. § 2.4 에서 다시 다룬다.
(마) Fundamental group : 보기 2.1.11 (나) 항 참조. $\pi_1 : \mathcal{T}op_1 \to \mathcal{G}r$.

정의 2.3.5. Covariant functor 두 개의 합성 (composition), contravariant functor 두 개의 합성 : 자명.

보기 2.3.6. (가) Dual functor : A functor $* : \mathcal{V}_k \to \mathcal{V}_k$ is defined by
$$*(V) = V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k), \qquad (V \in \mathcal{V}_k)$$
$$*(\varphi) = \varphi^*, \qquad (\varphi \in \mathrm{Hom}_k(V, W)),$$
where $\varphi^* : W^* \to V^*$ is defined by
$$\varphi^*(g) = g \circ \varphi, \qquad (g \in W^*).$$
이때 화살표의 방향이 바뀌므로, 즉
$$V \xrightarrow{\varphi} W$$
$$V^* \xleftarrow{\varphi^*} W^*$$
이므로, dual functor $*$ 는 contravariant functor.
(나) Double dual functor : dual functor 를 두 번 합성. $** : \mathcal{V}_k \to \mathcal{V}_k$.
$$V \xrightarrow{\varphi} W$$
$$V^* \xleftarrow{\varphi^*} W^*$$
$$V^{**} \xrightarrow{\varphi^{**}} W^{**}$$
따라서 double dual functor $**$ 는 covariant functor.

[6] Integral domain 이라는 조건은 왜 필요한가?

그런데 ······, 이 다음에 항상 따라다니는 얘기가 있는데 ······. $\psi_V : V \to V^{**}$ 로 "naturally" identify! 혹시 identity functor 와 double dual functor 는 본질적으로 같다?

Natural transformation 은 functor 들 간의 '*structure preserving function*'. 즉 '*functor* 들 간의 *morphism*'.

정의 2.3.7. (가) Let $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ be covariant functors. A **natural transformation** $\alpha : F \to G$ is a collection $\{\alpha_X \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), G(X)) \mid X \in \mathcal{C}\}$ such that

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \end{tikzcd} \qquad (f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y))$$

is a commutative diagram.
(나) 위 (가) 항의 정의에서 모든 α_X 가 $\mathcal{D}$-isomorphism 이면, α 를 **natural equivalence** 라고 부르고, $\alpha : F \xrightarrow{\sim} G$ 로 표기. 즉 3 층에서 보면 두 functor 는 사실상 같다는 뜻.
(다) 두 contravariant functor 간의 natural transformation 과 natural equivalence 도 마찬가지.

연습문제 2.3.8. Identity functor $id : \mathcal{V}_k \to \mathcal{V}_k$ 와 double dual functor $** : \mathcal{V}_k \to \mathcal{V}_k$ 사이의 natural equivalence $\psi : id \xrightarrow{\sim} **$ 를 찾아라. 물론 다음 사각형

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi_V"', "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W \arrow[d, "\psi_W", "\wr"'] \\ V^{**} \arrow[r, "\varphi^{**}"'] & W^{**} \end{tikzcd} \qquad (\varphi \in \mathrm{Hom}_k(V, W))$$

을 생각하면서. (ψ_V 를 "natural" isomorphism 이라고 부르는 이유.)

다시 3 층으로 올라간다. 다음은 '본질적으로 (사실상) 같은' category. (질문 2.2.11 참조.)

정의 2.3.9. Two categories $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ are **isomorphic** if there are covariant (or contravariant) functors $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ and $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ such that $G \circ F = id_{\mathcal{C}}$ and $F \circ G = id_{\mathcal{D}}$. 이때 $\mathcal{C} \approx \mathcal{D}$ 로 표기.

연습문제 2.3.10. (가) Show $\mathcal{A}b \approx \mathcal{M}od_{\mathbb{Z}}$ and $\mathcal{R}ing \approx \mathcal{A}lg_{\mathbb{Z}}$.
(나) Show $\mathcal{A}lg_R \approx \mathcal{A}lg^R$. (보기 2.2.10 참조.)
(다) If R is commutative, show that the category of (all) left R-modules $\mathfrak{M}_R^{\ell}$ is isomorphic to the category of (all) right R-modules $\mathfrak{M}_R^r$.
(라) Let G be a group and k be a field. Define the category of (all) representations of G over k, and show that it is isomorphic to the category of (all) $k[G]$-modules.[7]

이제 보니, 예를 들어, [II, 관찰 1.4.8, 명제 2.2.18] 과 명제 1.2.2 등의 '말장난'은 isomorphic category 를 설명하기 위한 것이었다.[8]

다시 말하면, isomorphic category 는 '완전히 똑같은' category 를 뜻한다. (따라서, 별로 재미가 없다.) 우리에게 필요한 개념은 equivalent category 이다. (질문 2.2.11 (나) 항 참조.)

정의 2.3.11. (가) Two categories $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ are **equivalent** if there is a covariant functors $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ such that

(1) For $D \in \mathcal{D}$, there exists $C \in \mathcal{C}$ such that $D \approx F(C)$.

(2) F is full and faithful, that is, $F : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ is bijective for $A, B \in \mathcal{C}$.

이때 $\mathcal{C} \xrightarrow{\approx} \mathcal{D}$ 로 표기.
(나) 위 (가) 항에서 F 가 contravariant 이면, $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 는 **anti-equivalent** 하다고 하고, $\mathcal{C} \xrightarrow[\text{anti}]{\approx} \mathcal{D}$ 의 표기법을 사용하기로 한다.

연습문제 2.3.12. 보기 2.1.10 참조. The category of (all) cyclic groups 를 $\mathcal{C}$ 로표기하면, $\mathcal{CG} \xrightarrow{\approx} \mathcal{C}$ 임을 보여라.

---

[7] [II, 명제 2.2.18] 참조.
[8] 그러고 보니, [II] 에서는 — '말장난'은 하면서도 — isomorphism 의 functorial property 에 관한 언급은 없었다고 트집을 잡을 수 있겠다.

다음은 관찰 2.3.2 의 연장선 위. 증명은 독자들의 몫.

관찰 2.3.13. If $F : \mathcal{C} \xrightarrow{\approx} \mathcal{D}$ is an equivalence, then $A \approx B \in \mathcal{C}$ if and only if $F(C) \approx F(B) \in \mathcal{D}$.

연습문제 2.3.14. If there are covariant functors $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ and $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ such that $G \circ F \xrightarrow{\sim} id_{\mathcal{C}}$ and $F \circ G \xrightarrow{\sim} id_{\mathcal{D}}$, show that $\mathcal{C} \xrightarrow{\approx} \mathcal{D}$.

문제가 좀 있는 것 같다$\cdots\cdots$.

Discussion 2.3.15. Is the categorical equivalence symmetric? In other words, does $\mathcal{C} \xrightarrow{\approx} \mathcal{D}$ imply $\mathcal{D} \xrightarrow{\approx} \mathcal{C}$? 위 연습문제 2.3.12 에서 $\mathcal{C} \xrightarrow{\approx} \mathcal{CG}$ 도 성립하는가? 위 연습문제 2.3.14 의 역도 성립하는가? 헉, Axiom of Choice$\cdots\cdots$!?

Category theoretic foundation 은 우리가 많이 접해 본 set theoretic foundation (axiomatic set theory) 과는 제법 차이가 있고,[9] [10] 결코 만만하지 않다. 독자들은 관심을 갖지 말기를 강추. Cataegory Theory 에서 가장 골치 아픈 말은 "골치 아프면 small category 만 생각하면 된다"는$\cdots\cdots$.

시간이 있으면 functor category 추가.

Categorical (anti-) equivalence 의 non-trivial example 들은 아마 대수기하학에서 처음으로 만나게 될 것이다. [1, I.3.8 및 II.2.3] 참조.

[9] 집합만 다루지 않고 class 를 다루는 데서 이미 우려했던 바이다.

[10] 연습문제 2.3.14의 역도 성립한다고 state되어 있는 책도 있다. 예를 들어 [12]. 물론 [12] 의 logical foundation은 우리와 다르다.

HomAlg § 2.4
version-130812

2.4. Universal Objects and Free Objects

이 節에서는 [II] 에서 여러 번 강조한 universal property 의 뜻을 분명히 한다.

정의 2.4.1. $U \in \mathcal{C}$ is called the **initial object** (universally repelling object) in $\mathcal{C}$ if $\left|\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(U, A)\right| = 1$ for all $A \in \mathcal{C}$. $U \in \mathcal{C}$ is called the **terminal object** (universally attracting object) in $\mathcal{C}$ if $\left|\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, U)\right| = 1$ for all $A \in \mathcal{C}$. Both initial object and terminal object are called the **universal object**.

Why 'the'?

관찰 2.4.2. If the initial object **exists**, then it is unique up to isomorphism. If the terminal object exists, then it is unique up to isomorphism.

증명 :

□

보기 2.4.3. (가) In $\mathcal{A}b$ or $\mathcal{M}od_R$, 0 is the initial object. It is also the terminal object.
(나) In $\mathcal{S}et$, the set with a single element is the terminal object. The initial object in $\mathcal{S}et$ does not exist? Oops, the empty-set ······ ?

연습문제 2.4.4. Show that the empty-set $\emptyset$ is the initial object in $\mathcal{S}et$.[11] 즐!

위 보기들은 별로 재미가 없고. 첫 번째 우리가 관심을 갖는 universal object 는 free object 들이다. 우리는 이미 [II, 제 10 장] 에서 free group, free (left) R-module (free abelian group 을 포함), free R-algebra (free ring 을 포함), free commutative R-algebra (free commutative ring 을 포함) 등을 배웠다.[12] 이들을 어떻게 하면 universal object 로 인식할 수 있을까?

우리가, 예를 들어, free group 을 화살표 $\iota : S \to \mathcal{F}_{\mathrm{gr}}(S)$ 혹은 $\big(S \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}_{\mathrm{gr}}(S)\big)$ 로 표기했던 것을 기억한다면······.

[11] 사실 이 연습문제는 category $\mathcal{S}et$을 정의할 때 필요했었다.
[12] 이 강의록의 ring과 algebra들은 모두 1을 포함한다. [II, 정의 10.3.12] 참조.

보기 2.4.5. 집합 S 를 고정하고,[13] category $\mathcal{C}_S$ 를

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_S) = \left\{ \left(S \overset{\jmath}{\to} G\right) \,\middle|\, G \in \mathcal{G}r,\ \jmath \text{는 함수} \right\}$$

로 정의하자. Morphism 은 자명 (삼각형). 익숙한 아래 그림을 생각하면

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "\imath"] \arrow[dr, "\jmath"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{F}_{\mathrm{gr}}(S) \arrow[dl, dashed, "\exists!\,\varphi"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

[free group generated by S] $\left(S \overset{\iota}{\to} \mathcal{F}_{\mathrm{gr}}(S)\right)$ 가 category $\mathcal{C}_S$ 의 **initial** object 인 것은 이제 자명.

다음은 [II, 명제 10.4.4 와 10.4.5].

보기 2.4.6. [II, 명제 10.4.4 와 10.4.5] 에 의하면, $\mathcal{F}_{\mathrm{gr}} : \mathcal{S}et \to \mathcal{G}r$ 을 covariant functor 로 이해할 수 있다 (free group functor 라고 부르면 그럴 듯할 것이다). 즉,

$$\mathcal{F}_{\mathrm{gr}} : S \longmapsto \mathcal{F}_{\mathrm{gr}}(S)$$

$$\mathcal{F}_{\mathrm{gr}} : f \longmapsto f_* \qquad (f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{S}et}(S, T))$$

이제 [II, 따름명제 10.4.6] 은 우리의 관찰 2.4.2 의 특수한 경우이다.

연습문제 2.4.7. □□ 가 (left) R-module (abelian group 을 포함), 혹은 R-algebra (ring 을 포함), 혹은 commutative R-algebra (commutative ring 을 포함) 일 때,

(가) Free-□□ 를 initial object 로 갖는 category 를 묘사하라.

(나) $\mathcal{F}_{□□}$ 를 functor 로 설명하라.

(다) Describe the free-□□ generated by $\emptyset$.

다음은 재미 삼아.

연습문제 2.4.8. Describe the free set generated by S.

연습문제 2.4.9. For example, **prove** that the free object does not exists in the category of (all) finite groups.

[13] $S = \emptyset$ 이어도 앞 연습문제 2.4.4를 생각하며 조심스럽게 접근하면 된다. 단, [II, 따름정리 10.3.8] 을 계속 유지하려면 zero module은 empty basis를 갖는다고 해야 한다.

HomAlg § 2.5
version-151019

2.5. Products and Coproducts

다음 universal object 는 product 와 coproduct 이다. 독자들은 [II, § 9.1, § 9.2] 를 먼저 복습하기 바란다.

정의 2.5.1. $\mathcal{C}$ 는 category, $I \neq \emptyset$ 는 index set, $X_i \in \mathcal{C}$ 라고 하자 (단 $i \in I$).[14] $X \in \mathcal{C}$ 일 때, pair $\big(X, \{p_i : X \to X_i \mid i \in I\}\big)$ 가 다음 universal property: [for every pair $\big(Y, \{\alpha_i : Y \to X_i \mid i \in I\}\big)$, there exists a unique $\varphi : Y \to X$ such that $p_i \circ \varphi = \alpha_i$ for all $i \in I$] 를 만족하면

$$\big(X, \{p_i : X \to X_i \mid i \in I\}\big) = \prod_{i \in I} X_i$$

로 표기하고, $\{X_i \mid i \in I\}$ 의 **categorical product** (in $\mathcal{C}$) 라고 부른다.[15] 물론 아래 삼각형

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
A \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & & B \arrow[l, phantom, "\circlearrowright"] \\
 & Y \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\beta"'] \arrow[uu, dashed, "\varphi"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \prod_{i \in I} X_i \arrow[dl, "p_j"'] \\
X_j \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & \\
 & Y \arrow[ul, "\alpha_j"] \arrow[uu, dashed, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

을 생각 ($I = \{1, 2, \ldots, n\}$ 이면 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 으로 표기.[16] 위 왼쪽 그림은 $|I| = 2$ 인 경우).

당연히 categorical product 는 — 만약 존재한다면 — (up to isomorphism) 유일하다.

연습문제 2.5.2. Describe a suitable category in which the categorical product is the universal object.[17]

우리는 새로운 category 를 만나면 — 즉, 새로운 수학의 대상을 만나면 — categorical product 의 존재에 관심을 갖는다.

---

[14] $I = \emptyset$ 까지 허용하는 건 좀 지나쳐 보인다.

[15] Categorical product 라는 이름은 물론 Cartesian product 와 구분하기 위한 것이지만, 만약 혼동의 여지가 없다면 그냥 product 라고 부를 수도 있을 것이다.

[16] I 는 ordered set 이 아니다. 예를 들어, $(X_1 \times X_2 \times X_3)$ 를 $(X_3 \times X_1 \times X_2)$ 로 쓰는 건 취향의 문제일 뿐.

[17] 앞으로 이 강의록에서 universal property 라는 말이 나오면 **항상** 이를 universal object 로 갖는 category 를 묘사할 수 있어야 한다. 앞으론 이런 연습문제 생략.

연습문제 2.5.3. (가) 익숙한 category 들 — 즉 $\mathcal{S}et$, $\mathcal{G}r$, $\mathcal{V}_k$, $\mathcal{M}od_R$, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{R}ing$, $\mathcal{A}lg_R$, $\mathcal{C}omm\mathcal{R}ing$, $\mathcal{C}omm\mathcal{A}lg_R$ — 의 경우에는 categorical product 가 항상 존재하고, categorical product 는 Cartesian product 와 같음을 확인하라.
(나) 보기 2.1.11 의 $\mathcal{T}op$ 과 $\mathcal{T}op_1$ 에서의 categorical product 를 묘사하라.

물론 어떤 category 에 categorical product 가 존재하지 않음을 증명하는 건 매우 어려울 것이다.

연습문제 2.5.4. (가) The category of (all) finite groups 에서는 일반적으로 categorical product 가 존재하지 않음을 **증명**하라.
(나) 그러나, the category of (all) torsion abelian groups 에서는 categorical product 가 항상 존재함을 보여라.

다음 정의는 앞으로 여러 번 등장할 것이다.

정의 2.5.5. (가) $I \neq \emptyset$ 는 index set, $\mathcal{C}_i$ 는 category (단 $i \in I$). Category 들의 Cartesian **product** (혹은 그냥 product) $\mathcal{C} = \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ 는 자연스럽게

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \mathrm{Ob}\Big(\prod_{i\in I} \mathcal{C}_i\Big) = \prod_{i\in I} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_i)$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}\big((A_i),\,(B_i)\big) = \prod_{i\in I} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}_i}(A_i, B_i), \quad \Big(A_i, B_i \in \mathcal{C}_i,\ \ (A_i), (B_i) \in \prod_{i\in I} \mathcal{C}_i\Big)$$

로 정의.[18] [19] $\prod_{i\in I} \mathcal{C}_i$ 에서 정의된 functor 는 $|I|$-**variable functor** 라고 부른다.
(나) 예를 들어, $|I| = 2$ 일 때, product category $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 는

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \{(C, D) \mid C \in \mathcal{C},\ D \in \mathcal{D}\}$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}\big((C,D),\,(C',D')\big) = \{(f,g) \mid f : C \to C',\ g : D \to D'\}$$

으로 정의된다. 이때 $id_{(C,D)} = (id_C, id_D)$ 이고, law of composition 은

$$(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f,\ g' \circ g).$$

또 2-변수 covariant functor $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 의 functorial property 는 다음

$$F(id, id) = id, \qquad F\big((f', g') \circ (f, g)\big) = F(f', g') \circ F(f, g)$$

과 같다. 2-변수 covariant functor 는 흔히 **bifunctor** 라고 부른다.

[18] 학부 수준에서는 vector notation 이 금지되었지만(?), 이제는 오히려 더 간편해서 좋다.
[19] $\mathcal{C} = \prod_{i\in I} \mathcal{C}_i$ 의 isomorphism 을 묘사해 보라.

다음은 [II, 명제 9.1.10] 의 재해석.

연습문제 2.5.6. (가) (물론 category $\mathcal{C}$ 에 categorical product 가 존재할 때) $\prod_{i\in I} : \prod_{i\in I}\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 를 $|I|$-variable covariant functor 로 생각할 수 있음을 설명하라. 다음 그림

$$
\begin{tikzcd}
X_j \arrow[d, "\varphi_j"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \prod_{i\in I} X_i \arrow[l, "p_j"'] \arrow[d, dashed, "\varphi_*"] \arrow[dl, "\varphi_j \circ p_j" description] \\
Y_j & \prod_{i\in I} Y_i \arrow[l, "q_j"] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowleft"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \prod_{i\in I} X_i \arrow[dl, "\varphi_j \circ p_j"'] \arrow[d, dashed, "\varphi_*"] \\
Y_j & \prod_{i\in I} Y_i \arrow[l, "q_j"] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowleft"]
\end{tikzcd}
$$

을 생각하고, functorial property 를 위해서는 다음 그림

$$
\begin{tikzcd}
X_j \arrow[d, "\varphi_j"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \prod_{i\in I} X_i \arrow[l, "p_j"'] \arrow[d, dashed, "\varphi_*"] \\
Y_j \arrow[d, "\psi_j"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \prod_{i\in I} Y_i \arrow[l, "q_j"'] \arrow[d, dashed, "\psi_*"] \\
Z_j & \prod_{i\in I} Z_i \arrow[l, "r_j"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_j \arrow[d, "\psi \circ \varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \prod_{i\in I} X_i \arrow[l, "p_j"'] \arrow[d, dashed, "\psi_* \circ \varphi_*"', "(\psi\circ\varphi)_*"] \\
Z_j & \prod_{i\in I} Z_i \arrow[l, "r_j"]
\end{tikzcd}
$$

을 그린다. (지금까지도 이미 그렇게 해 왔지만) 앞으로는 $\varphi_* = \prod_{i\in I} \varphi_i$ 로 표기한다 (I 가 유한집합이면 $\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n$).

(나) When $\mathcal{C} = \mathcal{M}od_R$, describe $\big(\prod_{i\in I} \varphi_i\big)(\mathbf{x})$ for $\mathbf{x} \in \prod_{i\in I} X_i$.

Candy 와 cookie 가 빠질 수 없다.

연습문제 2.5.7. 보기 2.2.3 의 $\mathcal{C}_{V,W}$ 와 보기 2.2.5 의 $\mathcal{C}_V$ 에서의 (finite) categorical product 는 존재하지 않음을 증명하라.

다음 순서는 지금까지 이 節 의 내용에서 **모든 화살표의 방향을 바꾸는** 것이다. 이렇게 화살표의 방향을 바꾸고 **'co'를 붙이는** 작업은 앞으로도 계속 등장할 것이다. 이 작업은 칠판에서 더욱 인상적이다. §3.11 의 categorical duality 참조.

다음 정의는 — 정의 2.5.1 직후에 칠판을 지우지 않고 — 5초면 충분하다.

정의 2.5.8. $\mathcal{C}$ 는 category, $I \neq \emptyset$ 는 index set, $X_i \in \mathcal{C}$ 라고 하자 (단 $i \in I$). $X \in \mathcal{C}$ 일 때, pair $\big(X, \{\imath_i : X_i \to X \mid i \in I\}\big)$ 가 다음 universal property: [for every pair $\big(Y, \{\alpha_i : X_i \to Y \mid i \in I\}\big)$, there exists a unique $\varphi : X \to Y$ such that $\varphi \circ \imath_i = \alpha_i$ for all $i \in I$] 를 만족하면

$$\big(X, \{\imath_i : X_i \to X \mid i \in I\}\big) = \coprod_{i \in I} X_i$$

로 표기하고, $\{X_i \mid i \in I\}$ 의 (**categorical**) **coproduct** (in $\mathcal{C}$) 라고 부른다. 물론 아래 삼각형

$$\begin{tikzcd}
 & A \coprod B \arrow[dd, dashed, "\varphi"] & \\
A \arrow[ur, "\imath"] \arrow[dr, "\alpha"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & & B \arrow[ul, "\jmath"'] \arrow[dl, "\beta"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowright"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \coprod_{i \in I} X_i \arrow[dd, dashed, "\varphi"] \\
X_j \arrow[ur, "\imath_j"] \arrow[dr, "\alpha_j"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & \\
 & Y
\end{tikzcd}$$

을 생각 ($I = \{1, 2, \ldots, n\}$ 이면 $X_1 \coprod X_2 \coprod \cdots \coprod X_n$ 으로 표기. 위 왼쪽 그림은 $|I| = 2$ 인 경우).

Coproduct 의 **existence problem** 은 categorical product 의 경우와는 사뭇 다르다.

보기 2.5.9. [II, 명제 9.2.7] 에 의하면 $\mathcal{M}od_R$ 에서는 — 따라서 $\mathcal{A}b$ 에서도 — coproduct 가 항상 존재하고, direct sum 이 바로 coproduct 임을 알고 있다.

연습문제 2.5.10. $\mathcal{S}et$ 에서는 — coproduct 가 항상 존재하고, disjoint union 이 바로 coproduct 임을 보여라.[20]

보기 2.5.11. $\mathcal{G}r$ 에서도 coproduct 가 항상 존재한다. $\mathcal{G}r$ 의 coproduct 는 **free product** 라고도 불리운다. Lang [6, pp. 70-74] 또는 Hungerford [4, p. 68] 를 읽어 보라.[21]

[20] Disjoint union을 어떻게 정의하더라$\cdots\cdots$?
[21] Lang과 Hungerford의 style 차이도 느껴 보기 바란다.

연습문제 2.5.12. G 가 infinite cyclic group 이면, $G\coprod G$ 는 free group generated by two elements 임을 보여라.

방학숙제 2.5.13. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\coprod(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\approx \mathbf{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 임을 보여라.[22]

한 가지 주의할 점은 — [II, 명제 9.2.7] 에 의하면 direct sum 은 $\mathcal{A}lg_R$ 에서는 coproduct 가 될 수 없지만 — 그렇다고 해서 $\mathcal{A}lg_R$ 에서는 coproduct 가 존재하지 않는다는 뜻은 아니라는 것이다. 당연히 어떤 category 에 coproduct 가 존재하지 않는다는 증명은 매우 힘들 것이다.

보기 2.5.14. 보기 2.1.11 의 category $\mathcal{T}op$ 과 $\mathcal{T}op_1$ 에서의 coproduct 는 존재하는가?[23]

그리고 어떤 category 에 coproduct 가 존재하더라도 I 가 무한 집합인 경우에는 set theoretic problem 인 경우가 많다.[24] 따라서 우리는 I 가 유한 집합인 경우에 주로 관심을 갖는다.

정의 2.5.15. 유한개 object 의 coproduct 는 **finite coproduct** 라고 부른다.

$\mathcal{C}omm\mathcal{A}lg_R$ 의 finite coproduct 는 §3.6 에서 다룬다. 아래 연습문제 2.5.16 에 의하면 finite coproduct 는 $|I|=2$ 인 경우만 다루면 충분하다.

연습문제 2.5.16. $I=J\cup K$ 이고 $I,J\neq\emptyset=J\cap K$ 일 때, 다음을 보여라. (물론 product 와 coproduct 가 존재할 때.)
(가) $\prod_{i\in I}X_i\approx\big(\prod_{j\in J}X_j\big)\prod\big(\prod_{k\in K}X_k\big)$.
(나) $\coprod_{i\in I}X_i\approx\big(\coprod_{j\in J}X_j\big)\coprod\big(\coprod_{k\in K}X_k\big)$.

위 연습문제에서 독자들은 (가) 항의 그림 (증명) 에서 모든 화살표의 방향을 바꾸기만 하면 (나) 항의 그림 (증명) 이 얻어지는 것을 확인하기 바란다. §3.11 의 categorical duality 참조.

---

[22] 이 결과는 정수론에서 매우 중요한 의미를 갖는다. Lang [6, p. 71, Example] 참조.
[23] $\mathcal{T}op_1$ 에서 base point 를 identify 한다면?
[24] 예를 들어, Lang [6, p. 71, Proposition 12.3]. 이 Proposition 12.3의 증명은 다음에 읽어도 좋다.

생각난 김에.

연습문제 2.5.17. (물론 product 와 coproduct 가 존재할 때) I, J 가 집합일 때, 다음을 보여라.

(가) $\prod_{(i,j)\in I\times J} X_{ij} \approx \prod_{j\in J} \big(\prod_{i\in I} X_{ij}\big)$.

(나) $\coprod_{(i,j)\in I\times J} X_{ij} \approx \coprod_{j\in J} \big(\coprod_{i\in I} X_{ij}\big)$.

다음은 [II, 명제 9.2.10] 의 재해석.

연습문제 2.5.18. $\mathcal{C} = \mathcal{M}od_R$ 일 때,[25] $\oplus_{i\in I} : \prod_{i\in I} \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 를 covariant functor 로 생각할 수 있음을 설명하라. [II, 명제 9.2.10] 의 다음 그림

$$\begin{tikzcd}
X_j \arrow[rr, "\imath_j"] \arrow[d, "\varphi_j"'] \arrow[drr, "\jmath_j \circ \varphi_j"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & & \bigoplus_{i\in I} X_i \arrow[d, dashed, "\varphi_*"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
Y_j \arrow[rr, "\jmath_j"'] & & \bigoplus_{i\in I} Y_i
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_j \arrow[rr, "\imath_j"] \arrow[drr, "\jmath_j \circ \varphi_j"'] & & \bigoplus_{i\in I} X_i \arrow[d, dashed, "\varphi_*"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
 & & \bigoplus_{i\in I} Y_i
\end{tikzcd}$$

에서, 앞으로는 $\varphi_* = \oplus_{i\in I}\, \varphi_i$ 로 표기한다(I 가 유한집합이면 $\varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_n$).

다음 주의사항은 **절대로** 소홀히 하면 안 된다!

주의 2.5.19. 우리의 '고향' $\mathcal{V}_k$ 에서조차 다음에 주의하여야 한다.

(가) 벡터공간 V 가 두 가지 internal direct sum $V = U \oplus W$ 와 $V = U \oplus W'$ 을 가질 때, $W = W'$ 일 필요는 없다. (Basis extension 은 유일하지 않다.)

(나) U, W, W' 이 벡터공간이고, $U \oplus W \approx U \oplus W'$ 일 때, $W \approx W'$ 일 필요도 없다. 예를 들어, $\big(\oplus_{i=1}^{\infty} k\big) \oplus 0 \approx \big(\oplus_{i=1}^{\infty} k\big) \oplus k$. 확인해 보라.[26]

Candy 와 cookie.

연습문제 2.5.20. 보기 2.2.3 의 $\mathcal{C}_{V,W}$ 와 보기 2.2.5 의 $\mathcal{C}_V$ 에서의 (finite) coproduct 는 존재하지 않음을 증명하라.

이 강의록에는 앞으로도 수많은 universal object 들이 계속 등장할 것이다.

---

[25] 어차피 $\mathcal{C} = \mathcal{M}od_R$ 인 경우에만 필요하므로.

[26] 무한 개의 객실이 있는 호텔에서는 빈 객실이 없더라도 새 손님을 받을 수 있다.

제 3 장 호몰로지 대수학

Homological Algebra: homology, homologue, homologous 등은 analogy, analogue, analogous와 상대되는 단어들이다. 흔히 homology는 相同으로 번역하고, analogy는 相似로 번역한다.[1] Homological Algebra는 相同인 것은 — 즉, 서로 같은 것은 — 두 번 반복하지 않겠다는 뜻이다. Homological Algebra는 수학의 가장 강력한 tool이라고 해도 조금도 과장이 아니다.

3.1. Abstract Non-sense

HomAlg §3.1
version-130812

Homological Algebra는 abstract non-sense들로 이루어 진다. 이때 non-sense는 — false statement라는 뜻이 아니고 — meaningless statement라는 뜻이다. 그렇다면 게다가 추상적인 meaningless statement를 왜 공부하자는 걸까? 이 meaningless statement **수백 수천** 개가 모이면 무언가 meaningful statement가 나오기 때문이다![2]

Abstract non-sense의 증명 방법은 diagram chasing (arrow chasing) 이다. 즉, 그림 (화살표) 를 좇아가다 보면 저절로 증명이 된다. 다시 말해, 증명 방법도 meaningless. 그러므로 독자들은 책의 증명을 (절대로) 읽지 말고 먼저 스스로 화살표를 따라가 보아야 한다.

증명의 요령은 예쁜 그림을 그리는 것이다. 예쁜 그림을 그리는 방법은 강의에서 배운다.[3] 그래서 abstract non-sense는 종이와 연필만 있다면 언제나 혼자 힘으로 증명할 수 있다는 자신감이 생기면 된다.[4]

[1] 생물학에서 상동기관과 상사기관의 차이가 생각난다.
[2] 물론 meaningless와 meaningful의 경계선은 모호.
[3] TEX으로 그림을 그리는 건 시간 낭비…….
[4] 자신감이 생긴 후에는 증명을 생략할 수도 있을 것이다.

그런데, Homological Algebra 가 순수한 arrow chasing 이 되기 위해서는 먼저 **모든** 개념을 화살표 (morphism) 의 언어로 바꾸어야 할 것이다. 예를 들면, 다음 정의는 morphism 이 함수가 아니더라도 의미를 갖는다.

정의 3.1.1. Let f be a morphism in the category $\mathcal{C}$.

(가) f is called a monomorphism if $f \circ g = f \circ h$ implies $g = h$.

(나) f is called an epimorphism if $g \circ f = h \circ f$ implies $g = h$.

당연히 다음을 확인해 보고 싶다.

관찰 3.1.2. In the category $\mathcal{M}od_R$, an R-linear map is:

(가) monomorphic iff injective.

(나) epimorphic iff surjective.

증명 :

□

연습문제 3.1.3. In the categories $\mathcal{S}et$, $\mathcal{T}op$, and $\mathcal{G}r$, show:

(가) monomorphic iff injective.

(나) epimorphic iff surjective.[5]

슬슬 골치가 아파 온다. 무슨 얘기인고 하니, 앞으로는 monomorphism 과 injection 을 그리고 epimorphism 과 surjection 을 구분하자는 뜻.[6] 예를 들어, epimorphism 은 surjection 이 아닐 수도 있다.

연습문제 3.1.4. Show that the canonical embedding $\imath : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ is an epimorphism in the category of (all) integral domains (with homomorphisms sending 1 to 1).[7]

[5] $\mathcal{G}r$ 의 경우에 surjectivity 증명은 [7, p. 21] 참조.

[6] 이 강의록에서 monomorphism과 epimorphism이라는 용어는 지금 처음 사용하였다.

[7] $\imath : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ 는 당연히 monomorphism. 이 example은 monomorphism이면서 epimorphism 이더라도 isomorphism일 필요는 없음도 보여주고 있다.

잠시 relax.

연습문제 3.1.5. (가) If $\psi \circ \varphi$ is monomorphic, show φ is monomorphic.
(나) If $\psi \circ \varphi$ is epimorphic, show ψ is epimorphic.
(다) What can you say if $\psi \circ \varphi = id$?

휴, candy 와 cookie 를 vector space 에서만 정의했기에 망정이지 $\cdots\cdots$.

연습문제 3.1.6. 보기 2.2.3 의 $\mathcal{C}_{V,W}$ 와 보기 2.2.5 의 $\mathcal{C}_V$ 에서의 epimorphism 과 monomorphism 을 묘사하라.

다음 순서는 kernel 과 cokernel 을 — 집합의 언어가 아닌 — 화살표의 언어로 바꾸는 것이다.[8] 그리고 그 다음엔$\cdots\cdots$. 龍頭蛇尾: 올해는 여기서 중단하자. 올해는 $\mathcal{M}od_R$ 에 집중한다.[9] (Homological Algebra 의 목표 중 하나는 $\mathcal{M}od_R$ 의 결과들을 abelian category 로 확장하는 것이다. 이 역시 올해의 관심사는 아니다.)

이제 $\mathcal{M}od_R$ 에서의 abstract non-sense 를 시작하자. 그리고 이 章에서 R 은 **commutative** ring with 1.[10] (단 §3.5 에서는 잠시 commutativity 를 가정하지 않는다.)

$\mathcal{M}od_R$ 은 우리에게 가장 친숙한 category 이며 우리의 고향 $\mathcal{V}ect_k$ 와 $\mathcal{A}b$ 을 포함하고 있다. $\mathcal{M}od_R$ 에서는 categorical product, coproduct 와 free object 가 항상 존재한다. 게다가 finite product 와 finite coproduct 가 같을 뿐만 아니라 $\oplus_{i\in I} A_i \leq_R \prod_{i\in I} A_i$ 가 성립하는 매우 '예쁜' category 이다. 따라서 $\mathcal{M}od_R$ 에서는 j-th canonical embedding $\imath_j : A_j \to \oplus_{i\in I} A_i$ 는 j-th canonical embedding $\imath'_j : A_j \to \prod_{i\in I} A_i$ 를 induce 하며, j-th canonical projection $p_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j$ 를 restrict 하면 j-th canonical projection $p'_j : \oplus_{i\in I} A_i \to A_j$ 를 얻는다.

---

[8] 실제로 kernel과 cokernel은 universal object로 정의된다. Image는 'kernel of cokernel'로 정의. [2], [7] 참조.
[9] §3.11에서 잠시 '거룩한' 얘기를 조금 더 할 것이다.
[10] 이 章의 내용은 R이 commutative가 아니어도 약간의 modify만 하면 된다. 독자들에게 맡긴다. §1.2 참조.

다음 정의와 보기 (관찰) 들은 [2], [3], [4], [6] 등에서 쉽게 찾을 수 있다. 단, **증명은 절대 읽지 말 것!** 먼저 종이와 연필을 꺼내 그림을 그리도록. 증명의 요령은 예쁜 그림을 그리는 것이다. 예쁜 그림을 그리는 방법은 강의에서 배운다.

정의: (**long**) **exact sequences**

정의: **short exact sequences**

정의: **coker, coim**

보기: four lemma, five lemma, short five lemma

보기: snake lemma, ker-coker sequences

보기: (**long**) **semi-exact sequences** 와 그의 **(co) homology module**

3.2. Short Exact Sequences

HomAlg §3.2
version-201011

Short exact sequence 는 매우 중요한 역할을 한다.

표기법 3.2.1. 토너를 절약하기 위해 앞으론 $\mathfrak{M}_R = \mathcal{M}od_R$ 로 표기하고, short exact sequence 는 **SES** 로 쓰기로 한다. 이 章 에서 R 은 commutative 이고, M, N, A, B, C, X, Y, Z 등은 R-module. 또 특별히 다른 언급이 없으면 모든 함수는 R-linear map.

SES 를 만나면 다음 두 type 을 생각한다. 첫 번째 type 은 $N \leq_R M$ 일 때,

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\imath} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$$

이고, 두 번째 (특수한) type 은

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\imath_1} A \oplus B \xrightarrow{\pi_2} B \longrightarrow 0$$

이다.

연습문제 3.2.2. (가) The category of (all) SES' (in $\mathfrak{M}_R$) 를 정의하라.
(나) 모든 SES 는 위 첫 번째 type 과 isomorphic 함을 보여라.

따라서 SES 는 본질적으로 한가지 type. 그렇지만 위 두 번째 type 은 앞으로 매우 특별한 역할을 하며, 그래서 특별한 이름이 필요하다.

명제 3.2.3. 주어진 SES $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 에 대해 다음 두 조건은 동치이다.

(1) There exists $\varphi : C \to B$ such that $g \circ \varphi = id_C$.
(2) There exists $\psi : B \to A$ such that $\psi \circ f = id_A$.

이때 다음이 성립한다:

$$B = \operatorname{im} f \oplus \ker \psi, \qquad B = \ker g \oplus \operatorname{im} \varphi, \qquad B \approx A \oplus C.$$

우리는 이런 SES 를 **split** SES 라고 부른다.

증명 : Abstract non-sense. (앞으로 — 특별한 경우를 제외하고 — 모든 abstract non-sense 의 증명은 생략.) $\ker \psi \approx C$ 임도증명할 수 있는가?[11] □

보기 3.2.4. $0 \longrightarrow 2\mathbb{Z} \xrightarrow{\imath} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$ 은 non-split SES.

[11] 주의 2.5.19 참조.

특히 다음 연습문제의조건(3)은 앞으로 쓸모가 많을 것이다.

연습문제 3.2.5. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 가 split SES 일때, 다음 조건

(1) $\psi \circ f = id_A$, $g \circ \varphi = id_C$.

(2) $0 \longleftarrow A \xleftarrow{\psi} B \xleftarrow{\varphi} C \longleftarrow 0$ 도 split SES.

(3) $f \circ \psi + \varphi \circ g = id_B$.

을 만족시키는 $\varphi : C \to B$, $\psi : B \to A$ 가 존재함을보여라.[12] [13]

보기 3.2.6. 위 연습문제는명제 3.2.3에서 $\varphi : C \to B$, $\psi : B \to A$ 가 유일하지 않을 수 있음을 암시하고 있다. 예를 들어, 다음 split SES

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\imath_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

에 대하여,

(가) $\varphi = \imath_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\psi = \pi_1 : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 로 선택해도 되고(이때 연습문제 3.2.5의 세 조건을 만족시킨다),

(나) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\psi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 를 각각

$$\varphi(a) = (a, a), \qquad \psi(a, b) = a + b, \qquad (a, b \in \mathbb{Z})$$

로 정의해도 된다.

다음은 당연하지만 분명히 기록해 둔다.

연습문제 3.2.7. 모든 split SES

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

는 연습문제 3.2.2 위의 두 번째 type 의 SES, 즉

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\imath_1} A \oplus C \xrightarrow{\pi_2} C \longrightarrow 0$$

과 isomorphic 함을 보여라.

우리의 '고향'에서는 split SES 를 따로 정의할 필요가 없었다. 왜냐하면:

연습문제 3.2.8. R 이 field 이면, 모든 SES 는 split SES 임을 보여라.

---

[12] 이제 명제 3.2.3에서, $\ker \psi \approx C$ 임도 증명할 수 있을 것이다.

[13] 이 연습문제의 이전 version에는 "존재함"이라는 문구가 빠져 있었다. 오랫동안 늘 찜찜했었는데······. 이 오류를 지적해 준 김재형에게 감사.

다음 주의와 연습문제도 SES를 이해하는 데 도움이 된다.

주의 3.2.9. 마치 split SES처럼 생겼다고 모두 split SES는 아니다. 예를 들어, group homomorphism f와 g를

$$f(n) = (2n, 0, 0, \dots)$$
$$g(a, b_1, b_2, \dots) = (\overline{a}, b_1, b_2, \dots)$$

로 정의하면,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \oplus \big(\oplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2 \big) \xrightarrow{g} \oplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

는 non-split SES. 확인해 보라.

연습문제 3.2.10. 다음 두 SES에 대하여, 아래 각 항의 보기를 들어라:[14]

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

(가) $A \approx A'$ 이고 $B \approx B'$ 이지만, $C \not\approx C'$.
(나) $A \approx A'$ 이고 $C \approx C'$ 이지만, $B \not\approx B'$.
(다) $B \approx B'$ 이고 $C \approx C'$ 이지만, $A \not\approx A'$.

다음에는 functor들이 exact sequence에 — 특히 SES에 — 어떤 변화를 주는가를 다룬다. 이는 이번 학기의 주제 중 하나이다.

정의 3.2.11. A covariant functor $F : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ is called an R-**linear** functor if the map $\mathrm{Hom}_R(X, Y) \to \mathrm{Hom}_R\big(F(X), F(Y)\big)$ is R-linear for $X, Y \in \mathfrak{M}_R$. (Similar for contravariant functors.) When $R = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-linear functors are also called **additive** functors.

관찰 3.2.12. $F : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$이 linear functor이면,
(가) F maps the zero map to the zero map.
(나) F maps the zero module to the zero module.

증명 : (나) $0 = id_0 : 0 \to 0$. $0 = F(id_0) = id_{F(0)} : F(0) \to F(0)$. □

[14] 그래도 좀 아는 건 abelian group뿐.

우리는 앞으로 "F sends α to β"의 표현을 사용한다. 예를 들어, "functor $F : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ sends $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ to $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$".

정의 3.2.13. A functor $F : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ is called an **exact** functor if F sends every exact sequence to an exact sequence.

Exact functor 는 이번 학기의 주제 중 하나이다.

연습문제 3.2.14. (위 정의를 좀 확대 해석하여) 보기 2.3.4 (나) 항의 scalar restriction functor $F : \mathcal{M}od_R \to \mathcal{M}od_S$ 는 exact functor 임을 보여라.

아래 註 추가 201011

다음 정의의 '방향'을 잘 기억해야 한다.[15]

정의 3.2.15. 임의의 SES $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 에 대해 :

(가) $F : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ 이 **covariant** functor 일 때 :

(i) $F(0) \xrightarrow{F(0)} F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$ 가 exact 이면 F 는 **left exact** functor.

(ii) $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \xrightarrow{F(0)} F(0)$ 가 exact 이면 F 는 **right exact** functor.

(나) $F : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ 이 **contravariant** functor 일 때 :

(i) $F(0) \xrightarrow{F(0)} F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)$ 가 exact 이면 F 는 **left exact** functor.

(ii) $F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \xrightarrow{F(0)} F(0)$ 가 exact 이면 F 는 **right exact** functor.

위 정의에서 $F(0)$ 의 표현은 어째 좀 거북하게 느껴진다.

관찰 3.2.16. $F : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ 이 exact (혹은 left exact, 혹은 right exact) 이면 $F(0) = 0$ (단, 0 은 zero module).

증명 : $0 \xrightarrow{id} 0 \xrightarrow{id} 0 \xrightarrow{id} 0 \xrightarrow{id} 0$ 는 물론 SES. 따라서 어느 경우건 exact sequence $F(0) \xrightarrow{F(id)} F(0) \xrightarrow{F(id)} F(0)$ 를 얻는다. 이제 $F(id_0) = id_{F(0)}$ 이므로

$$F(0) = \operatorname{im} id_{F(0)} = \operatorname{im} F(id_0) = \ker F(id_0) = \ker id_{F(0)} = 0$$

는 말장난. □

이제 위 정의를 다시 써 보자. 그리고 앞으로는 화살표 위의 함수 이름은 — 혼동이 없다면 — 생략하기로 하자.

[15] 예를 들어 [6] 등에서는, 사실, left-exact functor 와 right-exact functor 의 정의에 혼란이 있으므로, 주의해야 한다.

再 정의 3.2.17. 임의의 SES $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 에 대해 :

(가) $F : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ 이 **covariant** functor 일 때 :

(i) $0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$ 가 exact 이면 F 는 **left exact** functor.

(ii) $F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$ 가 exact 이면 F 는 **right exact** functor.

(나) $F : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ 이 **contravariant** functor 일 때 :

(i) $0 \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A)$ 가 exact 이면 F 는 **left exact** functor.

(ii) $F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A) \longrightarrow 0$ 가 exact 이면 F 는 **right exact** functor.

SES 가 **인기 있는 이유**는 모든 (long) exact sequence 를 SES 들로 '분해'할 수 있기 때문이다. 아래 증명의 그림 참조.

명제 3.2.18. A functor $F : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ is exact if and only if F sends every SES to an SES.

증명 : (그림)

$\square$

따라서 exact functor 이기 위한 필요충분조건은 left exact 이고 right exact. 위 명제와 비슷비슷한 연습문제 몇 개 추가.

연습문제 3.2.19. [3, pp. 108–109] 에 있는 4 개의 Theorem 을 증명하라.

Split SES 는 매우 특수하다.

명제 3.2.20. A **linear** functor $F : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ sends every split SES to a split SES.[16]

증명 : 연습문제 3.2.5 필요.

□

Left exact functor 와 right exact functor 는 다은 section 들에서 만나게 된다: § 3.3 의 hom functor 와 § 3.4 의 tensor functor.

연습문제 3.2.21. 보기 2.3.4 (가) 항의 torsion submodule functor 는 left exact 임을 보여라.

어쨌든 — 지금은 구체적으로 말하기 난처하지만 — exact functor 는 '예쁜' functor 들이다. 우리는 우선 어떤 functor 들이 exact functor 인지 알고자 한다. 앞으로 공부할 flat module 과 projective module, injective module 은 모두 **exact functor 를 찾는 과정**이다.

[16] Exact functor 라는 조건은 없다.

3.3. Hom Functors

Hom functor 는 이번 학기의 주제곡 중 하나이다. 더 일반적인 setting 에서 정의하자.[17]

정의 3.3.1. (가) For a fixed $A \in \mathcal{C}$, define a functor $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-) : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ as follows:

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-) : X \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,X), \qquad (X \in \mathcal{C})$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-) : \varphi \longmapsto \varphi_*, \qquad (\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y))$$

where $\varphi_* : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,X) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,Y)$ is defined by

$$\varphi_*(f) = \varphi \circ f, \qquad (f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,X))$$

The following functorial properties

$$id_* = id, \qquad (\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$$

are satisfied. Thus $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-) : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ is a **covariant** functor.
(나) For a fixed $A \in \mathcal{C}$, define a functor $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-,A) : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ as follows:

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-,A) : X \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,A), \qquad (X \in \mathcal{C})$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-,A) : \varphi \longmapsto \varphi^*, \qquad (\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,X))$$

where $\varphi^* : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,A) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,A)$ is defined by

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi, \qquad (f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,A))$$

Together with the following functorial properties

$$id^* = id, \qquad (\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*,$$

$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-,A) : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ is a **contravariant** functor.
(다) When $\mathcal{C} = \mathfrak{M}_R$, we get covariant functors $\mathrm{Hom}_R(A,-) : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ and contravariant functors $\mathrm{Hom}_R(-,A) : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$.

독자들은 위 정의 (나) 항이 (가) 항의 모든 화살표 방향만 바꾼 것임을 확인하기 바란다. 그리고 우리에게 친숙한 dual functor (보기 2.3.6) 를 생각하면, 어느 쪽이 contravariant functor 인지 기억할 수 있을 것이다.

[17] "Hom functor 와 tensor functor 는 왜 배우나요? 왜 중요한가요?": "$\mathfrak{M}_R$ 의 '쓸 만한' linear functor 는 Hom, ⊗, Tor, Ext 뿐" 이라는 거룩한 정리가 있다⋯⋯. [8, p. 34] 에서 인용한 Watts 의 결과도 흥미롭다.

갑자기 일반적인 category 로 확장한 이유는 다음 정의를 소개하기 위한 것이었다. Representable functor 는 Algebraic Geometry 의 scheme language 에서 매우 중요한 역할을 한다.[18]

정의 3.3.2. A functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ is called a **representable functor** if F is naturally equivalent to $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -)$ or $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-, A)$ for some $A \in \mathcal{C}$.[19]

이제 hom functor 의 abstract non-sense 를 시작하자.

연습문제 3.3.3. Hom functor 들은 linear functor 임을 보여라.

연습문제 3.3.4. (가) For $A \in \mathfrak{M}_R$, show $\mathrm{Hom}_R(R, A) \approx A$.
(나) In other words, show that the hom functor $\mathrm{Hom}_R(R, -) : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ is naturally equivalent to the identity functor $id_{\mathfrak{M}_R} : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$.

아래 명제에서 보는 것처럼 $\mathrm{Hom}_R(-, -)$ 의 왼쪽 자리와 오른쪽 자리는 물론 근본적인 차이가 있다.

명제 3.3.5. I, J 가 index set 이고, $X, Y, X_i, Y_j \in \mathfrak{M}_R$ 일 때,
(가) $\mathrm{Hom}_R\left(\oplus_{i\in I} X_i, Y\right) \approx \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(X_i, Y)$.
(나) $\mathrm{Hom}_R\left(X, \prod_{j\in J} Y_j\right) \approx \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(X, Y_j)$.
(다) $\mathrm{Hom}_R\left(\oplus_{i\in I} X_i, \prod_{j\in J} Y_j\right) \approx \prod_{(i,j)\in I\times J} \mathrm{Hom}_R(X_i, Y_j)$.[20]

증명 : Abstract non-sense. 주의 : product 와 coproduct 의 universal property (만) 을 이용할 것. □

다음 명제가 이 節의 목표.

명제 3.3.6. $\mathrm{Hom}_R(A, -)$ and $\mathrm{Hom}_R(-, A)$ are **left** exact functors.

증명 : Abstract non-sense. □

위 명제는 hom functor 들은 일반적으로 exact functor 가 아님을 암시하고 있다.

---
[18] Scheme language는 걍 교양으로······.
[19] Natural equivalence는 정의 2.3.7 참조.
[20] 연습문제 2.5.17 참조.

연습문제 3.3.7. For $n > 1$, consider the SES $0 \longrightarrow n\mathbb{Z} \xrightarrow{\imath} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$.
(가) Show $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, -)$ is not exact.
(나) Show $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$ is not exact.

다음 연습문제는 연습문제 3.4.25 에서 필요로 한다.

연습문제 3.3.8. (가) Sequence $0 \to A \to B \to C$ 에 대해, 다음 조건은 동치임을 보여라.[21]
(1) $0 \to A \to B \to C$ is exact.
(2) $0 \to \mathrm{Hom}_R(X, A) \to \mathrm{Hom}_R(X, B) \to \mathrm{Hom}_R(X, C)$ is exact for **every** $X \in \mathfrak{M}_R$.
(나) Sequence $A \to B \to C \to 0$ 에 대해, 다음 조건은 동치임을 보여라.
(1) $A \to B \to C \to 0$ is exact.
(2) $0 \to \mathrm{Hom}_R(C, X) \to \mathrm{Hom}_R(B, X) \to \mathrm{Hom}_R(A, X)$ is exact for **every** $X \in \mathfrak{M}_R$.

앞 節에서 언급한 것처럼 우리는 exact functor 를 좋아한다. Projective module 과 injective module 의 성질과 존재는 §3.7–§3.8 에서 공부한다.

정의 3.3.9. (가) P is called a **projective** R-module if $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ is exact.
(나) J is called an **injective** R-module if $\mathrm{Hom}_R(-, J)$ is exact.

좀 현학적인 얘기 하나 더. 다음 정의는 §3.11 에서 중요한 역할을 한다.

정의 3.3.10. Category $\mathcal{C}$ 의 **opposite** category $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 를 다음

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \qquad \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(B, A) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B), \qquad (A, B \in \mathcal{C})$$

과 같이 정의한다.[22] 즉, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 는 $\mathcal{C}$ 와 화살표 방향만 거꾸로인 category 이다. 혼동을 피하기 위해, $\mathcal{C}$ 에서는 morphism 의 합성을 지금까지처럼 $\circ$ 로 표기하고, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 에서는 morphism 의 합성을 $\star$ 로 표기하면, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 의 law of composition 은

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(B, C) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, C) \\ (g, f) &\longmapsto g \star f = f \circ g \end{aligned}$$

로 정의되어 있다.

[21] 연습문제 3.2.19 참조.
[22] 가끔 dual category $\mathcal{C}^*$ 라고 부르기도 한다. 그러나 이 표기법은 별이 너무 많이 보여 혼란스럽다.

다음 세 연습문제는 §3.11의 미리 맛보기.

연습문제 3.3.11. Show $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}$.

다음 연습문제에 의하면, monomorphism과 epimorphism은 서로 dual concept.

연습문제 3.3.12. (가) Show that $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ is a monomorphism in $\mathcal{C}$ if and only if $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(B, A)$ is an epimorphism in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.
(나) Show that $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ is an epimorphism in $\mathcal{C}$ if and only if $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(B, A)$ is a monomorphism in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

다음 연습문제부터 우리는 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$가 functor일 때, 이를 $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$로도 이해하려고 한다. 얼핏 functor의 'domain'이 다르므로, $F' : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$를

$$F'(A) = F(A), \qquad F'(f) = F(f)$$

로 정의하고 시작해야 할 것 같지만, 사실은 그럴 필요가 없다. 왜냐하면, 두 functor를 모두

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \cup \big(\cup_{A,B\in\mathcal{C}} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)\big) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \cup \big(\cup_{B,A\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(B, A)\big)$$

에서 정의된 함수로 이해하면, 결국 같은 함수이기 때문이다.

연습문제 3.3.13. (가) Show $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-, A) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, -)$.
(나) Show $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(-, A)$.

연습문제 3.3.14. Contravariant functor $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$는 covariant functor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$와 같은 뜻임을 설명하라.

아, "모든 화살표의 방향을 바꾼다"는 말은 이런 뜻……, 글쎄…….

정의 3.3.15. A (covariant) bifunctor $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ is called a two-variable 'functor' which is contravariant in the first variable and covariant in the second variable.[23]

연습문제 3.3.16. $\mathrm{Hom}_R(-, -) : \mathfrak{M}_R^{\mathrm{op}} \times \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$을 bifunctor (contravariant in the first variable and covariant in the second variable)로 이해하라.

[23] Bifunctor는 정의 2.5.5 참조. [3, p. 100, 3F]도 참조.

3.4. Tensor Functors I

이 節에서는 오랫동안 미루어 온 tensor product 를 정의한다.

먼저 R 이 **commutative** 인 경우부터 시작한다.[24] $A, B \in \mathfrak{M}_R$ 일 때, 우리의 목표는 $a \otimes b$ 로 쓰여지는(단, $a \in A,\ b \in B$) 원소들을 갖는 R-module $A \otimes_R B$ 를 만드는 것이다. 이때 우리는 아래 조건들을 — 그리고 **오직 다음 조건들만을** — 원한다. 그 조건들은 다음

$$(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b, \qquad (ra) \otimes b = r(a \otimes b),$$

$$a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b', \qquad a \otimes (rb) = r(a \otimes b)$$

과 같다(단, $a, a' \in A,\ b, b' \in B,\ r \in R$).[25] 이제 위 문장의 '조건'을 'relation'으로 바꾸어 읽어 보자.[26] 즉, $a \otimes b$ 꼴의 원소들을 마음껏 더하고 상수곱하되 오직 위 네 relation 만을 만족시키도록 만들자는 것이다.[27] 이 정도면 motivation 은 충분할 것이다.

정의 3.4.1. $A, B \in \mathfrak{M}_R$ 일 때,

$$A \otimes_R B = \mathcal{F}_R(A \times B) / \langle T \rangle$$

로 정의하고, 이 R-module 을 A, B 의 **tensor product** 라고 부른다. 여기서 $\mathcal{F}_R(A \times B)$ 는 free R-module generated by the set $A \times B$,[28] $\langle T \rangle$ 는 R-submodule generated by T 이고,

$$T = \left\{ \begin{array}{l|c} (a + a', b) - (a, b) - (a', b),\ (ra, b) - r(a, b), & a, a' \in A,\ b, b' \in B, \\ (a, b + b') - (a, b) - (a, b'),\ (a, rb) - r(a, b) & r \in R \end{array} \right\}.$$

이때

$$\tau : A \times B \subset \mathcal{F}_R(A \times B) \xrightarrow{\pi} \mathcal{F}_R(A \times B) / \langle T \rangle = A \otimes_R B$$

로 표기하고, $\tau : A \times B \to A \otimes_R B$ 를 **tensor map** 이라고 부른다. 또

$$\tau(a, b) = a \otimes b, \qquad (a \in A,\ b \in B)$$

로 표기하고, "a tensor b" 라고 읽는다.

---

[24] Abelian group의 경우부터 다루는 것이 더 교육적이겠지만…….

[25] 우리는 지금 곱셈($\otimes$)이 덧셈에 우선한다는 초등학교 때부터의 대원칙을 따르는 표기법을 사용하고 있다.

[26] Relation의 의미는 [II, 제10장] 참조.

[27] 네 조건들에는 A, B 각각의 덧셈과 상수곱이 들어 있으므로 R-module A, B 가 갖고 있는 원래의 relation들은 물론 $A \otimes_R B$ 의 relation에 포함되어 있다.

[28] $A \times B$ 는 $\mathcal{F}_R(A \times B)$의 subset($R$-basis)으로 identify.

기초부터.

연습문제 3.4.2. (가) Show that the tensor map $\tau : A \times B \to A \otimes_R B$ is an R-bilinear map.
(나) Show $a \otimes 0 = 0 = 0 \otimes b$ for $a \in A,\ b \in B$.[29]

Tensor product 의 universal property 는 우리가 예상했던 바이다.

명제 3.4.3. $A \otimes_R B$ satisfies the following universal property : for every R-module X and for every R-bilinear map $f : A \times B \to X$, there exists a unique R-linear map $\varphi : A \otimes_R B \to X$ such that $\varphi \circ \tau = f$.

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "f"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & A \otimes_R B \arrow[dl, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

오타 수정 201011 **증명 :** 다음 그림 ($\mathcal{F}_R(A \times B) = \mathcal{F}_R$ 로 표기)

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\imath"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{F}_R \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dashed, "\widetilde{f}"] & A \otimes_R B \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

하나면 충분. $\widetilde{f}(T) = 0$ 임을 확인해야 한다. □

따라서, 엄밀하게는, $A \otimes_R B$ 는 $(\tau,\, A \otimes_R B)$ 의 **pair 로 이해**해야 할 것이다. 그리고 universal property 는 $A \otimes_R B$ 를 全宇宙에서 唯一無二한 것으로 characterize 해 주므로, 이제는 명제 3.4.3 의 삼각형을 tensor product 의 정의로 생각하면 된다.[30]

$A \times B$ 가 $\mathcal{F}_R(A \times B)$ 의 R-basis 이므로, $A \otimes_R B = \langle \operatorname{im} \tau \rangle$ 인 것도 자명하다 ([II, 관찰 10.2.12] 에서처럼 삼각형을 이용해 설명할 수도 있다).

[29] 가운데 0은 $A \otimes_R B$의 zero element. 따라서 $A = 0 = B$인 경우를 제외하면 tensor map τ는 injective가 아니다.
[30] 명제 3.4.3을 tensor product의 정의로 생각하면 정의 3.4.1은 이제 tensor product의 existence proof가 된다.

따라서 $A \otimes_R B$의 모든 원소들은 $\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$로 쓸 수 있다(단, $a_i \in A$, $b_i \in B$). 특별히 **주의**할 점은 그렇다고 해서 $A \otimes_R B$를 정의역으로 갖는 R-linear map을 정의할 때, $\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$에서의 함숫값을 지정하는 것은 위험하다는 것이다.[31] 왜냐하면 $\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$의 표현은 일반적으로 유일하지 않으므로 R-linear map의 well-definedness를 보장할 수 없기 때문이다. 다음 명제에 의하면 $A \otimes_R B$를 정의역으로 갖는 R-linear map을 얻으려면 어차피 삼각형과 R-bilinear map을 생각해야만 한다.

다음 명제에서는 먼저 $\mathcal{B}il_R(A \times B,\, M)$의 R-module structure를 정의해야 한다.[32]

명제 3.4.4. For $A, B, M \in \mathfrak{M}_R$, we have:

$$\mathrm{Hom}_R(A \otimes_R B,\, M) \approx \mathcal{B}il_R(A \times B,\, M)$$

as R-modules.

증명 : 삼각형. (linear) $\circ$ (bilinear) $=$ (bilinear). $\square$

우리가 그나마 좀 아는 건 abelian group 뿐. 이때

$$[\,\mathbb{Z}\text{-bilinear map}\,] = [\,\text{biadditive map}\,]$$

인 것도 당연.

표기법 3.4.5. If $R = \mathbb{Z}$, we omit the subscript $\mathbb{Z}$ and write $\otimes_{\mathbb{Z}} = \otimes$.

그런데 $A \otimes_R B$는 $\otimes_R$을 사이에 두고 A와 B의 구조가 얽혀 있다. 결국 예상하지 않았던 '사고'가 일어난다. 그러나 '사고'는 강조어법일 뿐 이는 tensor product의 본질이다.

연습문제 3.4.6. For $n > 1$, show $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_n = 0$.

다음 정의는 §3.8에서도 필요하다.

[31] 예를 들어, Hungerford [4, p. 212, Theorem 5.8]의 증명은 위험한 수준을 넘어 엉터리 증명.
[32] $Bil_R(A \times B, M) = \{f : A \times B \to M \mid f \text{ is } R\text{-bilinear}\}$.

정의 3.4.7. An R-module M is **divisible** if for every $0 \neq r \in R$ and for every $x \in M$ there exists $y \in M$ such that $ry = x$.[33]

연습문제 3.4.8. If A is a divisible R-module and B is a torsion R-module, show $A \otimes_R B = 0$.

계산 문제부터 하나.

연습문제 3.4.9. (가) For $m, n > 1$, show $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \approx \mathbb{Z}_{(m,n)}$.
(나) Show $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q} \approx \mathbb{Q}$.

Tensor product 의 abstract non-sense 를 위해서는 지금 tensor functor 를 도입하는 것이 편리하다.

정의 3.4.10. (가) For a fixed $A \in \mathfrak{M}_R$, define a functor $A \otimes_R - : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ as follows:

$$A \otimes_R - : X \longmapsto A \otimes_R X, \qquad (X \in \mathfrak{M}_R)$$

$$A \otimes_R - : \varphi \longmapsto id \otimes \varphi, \qquad (\varphi : X \to Y)$$

Here $id \otimes \varphi : A \otimes_R X \to A \otimes_R Y$ is defined by

$$\begin{tikzcd}
A \times X \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\widetilde{\varphi}"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & A \otimes_R X \arrow[dl, dashed, "id \otimes \varphi"] \\
& A \otimes_R Y &
\end{tikzcd}$$

where, $\widetilde{\varphi} : A \times X \to A \otimes_R Y$ is an R-bilinear map given by

$$\widetilde{\varphi}(a, x) = a \otimes \varphi(x), \qquad (a \in A,\ x \in X)$$

Thus, for example, we have

$$(id \otimes \varphi)\,(a \otimes x) = a \otimes \varphi(x), \qquad (a \in A,\ x \in X)$$

The following functorial properties

$$id \otimes id = id, \qquad id \otimes (\psi \circ \varphi) = (id \otimes \psi) \circ (id \otimes \varphi)$$

are satisfied. Thus $A \otimes_R - : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ is a covariant functor.

[33] x를 r로 나눌 수 있다는 뜻. $R = \mathbb{Z}$이면 뜻이 더 분명.

(나) The covariant functor $-\otimes_R A : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ is defined similarly.

(다) We next define a two-variable functor $-\otimes_R - : \mathfrak{M}_R \times \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ as follows:

$$-\otimes_R - : (X,Y) \longmapsto X \otimes_R Y, \qquad \big((X,Y) \in \mathfrak{M}_R \times \mathfrak{M}_R\big)$$
$$-\otimes_R - : (\varphi,\psi) \longmapsto \varphi \otimes \psi, \qquad (\varphi : X \to Z,\ \ \psi : Y \to W)$$

Here $\varphi \otimes \psi : X \otimes_R Y \to Z \otimes_R W$ is defined by

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "f"'] & \circlearrowright & X \otimes_R Y \arrow[dl, dashed, "\varphi \otimes \psi"] \\ & Z \otimes_R W & \end{tikzcd}$$

where, $f : X \times Y \to X \otimes_R Y$ is an R-bilinear map given by

$$f(x,y) = \varphi(x) \otimes \psi(y), \qquad (x \in X,\ y \in Y)$$

Thus, for example, we have

$$(\varphi \otimes \psi)\,(x \otimes y) = \varphi(x) \otimes \psi(y), \qquad (x \in X,\ y \in Y)$$

The following functorial properties

$$id \otimes id = id, \qquad (\varphi' \circ \varphi) \otimes (\psi' \circ \psi) = (\varphi' \otimes \psi') \circ (\varphi \otimes \psi)$$

are obvious. Thus $-\otimes_R - : \mathfrak{M}_R \times \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ is a bifunctor.

주의 3.4.11. 표기법에 약간의 혼동이 있다. 위 정의에서 $\varphi \otimes \psi$는 **formal symbol 일 뿐**이고, $\mathrm{Hom}_R(X,Z) \otimes_R \mathrm{Hom}_R(Y,W)$의 원소를 의미하지 않는다. $\mathrm{Hom}_R(X,Z) \otimes_R \mathrm{Hom}_R(Y,W)$는 골치 아프다 ([3, p. 76, 8E] 참조).

연습문제 3.4.12. For $A \in \mathfrak{M}_R$, show $A \otimes_R - : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ is a linear functor.

연습문제 3.4.13. (가) For $A, B \in \mathfrak{M}_R$, show $A \otimes_R B \approx B \otimes_R A$.
(나) 유식한 말로 하면, 두 functor $A \otimes_R -$과 $-\otimes_R A$는 naturally equivalent.

연습문제 3.4.14. Show $(A \otimes_R B) \otimes_R C \approx A \otimes_R (B \otimes_R C)$.[34] [35]

연습문제 3.4.15. (가) For $A \in \mathfrak{M}_R$, show $R \otimes_R A \approx A$.
(나) In other words, show that $R \otimes_R - : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ is naturally equivalent to the identity functor $id_{\mathfrak{M}_R} : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$.

명제 3.4.16. For $A, A_i, B_j \in \mathfrak{M}_R$, we have:
(가) $A \otimes_R (\oplus_{j \in J} B_j) \approx \oplus_{j \in J} (A \otimes_R B_j)$.
(나) $(\oplus_{i \in I} A_i) \otimes_R (\oplus_{j \in J} B_j) \approx \oplus_{(i,j) \in I \times J} (A_i \otimes_R B_j)$.

증명 : Abstract non-sense □

위 명제 3.4.16 은 앞으로 여러 번 사용될 것이다. 우선:

명제 3.4.17. $V, W \in \mathcal{V}_k$, 이면,

$$\dim_k(V \otimes_k W) = \dim_k(V) \cdot \dim_k(W).$$

이때 $\mathfrak{B} = \{v_i \mid i \in I\}$, $\mathfrak{C} = \{w_j \mid j \in J\}$ 를 각각 V, W 의 k-basis 라고 하면, $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{C} = \{v_i \otimes w_j \mid (i,j) \in I \times J\}$ 는 $V \otimes_k W$ 의 k-basis.[36]

증명 : $(\oplus_{i \in I} k) \otimes_k (\oplus_{i \in J} k) \approx \oplus_{(i,j) \in I \times J} (k \otimes_k k) \approx \oplus_{(i,j) \in I \times J} k$. 기저에 관한 부분은 자명. (무한차원일 때에도 정말 자명한가?) □

선형대수의 연습문제는 끝없이 계속된다.

연습문제 3.4.18. $V, V', W, W' \in \mathcal{V}_k$ 가 유한차원이고, $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$ 을 각각의 기저라고 하자. 또 $\varphi \in \mathfrak{L}(V, V')$, $\psi \in \mathfrak{L}(W, W')$ 라고 하자.
(가) Describe $[\varphi \otimes \psi]^{\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{C}}_{\mathfrak{B}' \otimes \mathfrak{C}'}$.[37]
(나) If $V = V'$, $W = W'$, show $\det(\varphi \otimes \psi) = \det(\varphi)^{\dim W} \cdot \det(\psi)^{\dim V}$.
(다) Show $\varphi \otimes \psi = 0$ if and only if $\varphi = 0$ or $\psi = 0$.

[34] 우선 이틀 정도 혼자 힘으로 시도해 보고, Hungerford [4, p. 212, Theorem 5.8] 의 엉터리 증명에 잠시 미소 짓고······, Lang [6, p. 604] 의 증명을 참조하라. Lang의 증명에서 $(x, \alpha) \mapsto \overline{\lambda}_x(\alpha)$ 는 왜 R-bilinear인가? Lang은 이런 것들을 — 즉, 타자 치기 싫은 것들을 —- 항상 "obvious"라고 표현한다.
[35] 따라서 $A \otimes_R B \otimes_R C$ 의 표기법이 가능하겠다.
[36] 명제 1.4.3을 생각하면, 이 명제는 임의의 free R-module로 확장할 수 있다.
[37] 따라서 두 행렬의 tensor product도 정의할 수 있다.

다음 주의 사항도 tensor product 의 중요한 본질이다.

주의 3.4.19. (가) $n > 1$ 일 때, 위 연습문제 3.4.15 에 의하면 $\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_n \approx \mathbb{Z}_n$. 또 위 연습문제 3.4.6 에 의하면 $\mathbb{Q}\otimes\mathbb{Z}_n = 0$. 따라서 — 비록 canonical embedding $\imath : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ 는 injection 이지만 — $\imath\otimes id : \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Q}\otimes\mathbb{Z}_n$ 은 절대로 injection 일 수 없다. 즉, tensor functor 는 일반적으로 injection 을 injection 으로 보내지 않는다. 대개 $\ker(\varphi\otimes\psi)$ 를 구하는 것은 쉽지 않다.
(나) 그러므로 a, b 가 각각 어느 R-module 의 원소인지 밝히지 않고 그냥 $a\otimes b$ 를 말하는 것은 위험.

그래서 다음 보조명제는 특히 인상적이다.

보조명제 3.4.20. $\varphi : X \to Z,\ \psi : Y \to W$ 가 모두 **surjection** 일 때, 다음

$$\ker(\varphi\otimes\psi) = \langle x\otimes y \mid x \in \ker\varphi \text{ or } y \in \ker\psi\rangle$$

이 성립한다.

증명 : 물론 abstract non-sense 이지만 약간의 'trick'이 필요하다. 아마도 이 강의록에서 가장 '어려운' abstract non-sense. 필요한 trick 은:
(a) Want to show $\widetilde{\varphi\otimes\psi} : (X\otimes_R Y)/K \to Z\otimes_R W$ is injective, where $K = \langle x\otimes y \mid x \in \ker\varphi \text{ or } y \in \ker\psi\rangle$.
(b) Want to find j^* such that $j^*\circ\widetilde{\varphi\otimes\psi} = id$.
나머지는 routine. □

위 보조명제를 이용하면 다음은 단순한 diagram chasing.

명제 3.4.21. For $A \in \mathfrak{M}_R$, the tensor functor $A\otimes_R - : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ is **right** exact.

증명 : Abstract non-sense □

위 주의 3.4.19 에 의하면 $\mathbb{Z}_n\otimes - : \mathcal{A}b \to \mathcal{A}b$ 은 (left) exact functor 가 아니다. 다음은 우리가 좋아하는 exact functor 를 찾을 차례. Flat module 의 존재와 성질은 §3.9 에서 다룬다.

정의 3.4.22. $A \in \mathfrak{M}_R$ is called a **flat** R-module if $A \otimes_R - : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ is an exact functor.

Tensor functor 와 hom functor 는 서로 아무런 관련이 없어 보이지만 — 놀랍게도 — 둘은 밀접한 관계가 있다.

명제 3.4.23. (Adjoint Theorem) For $A, B, C \in \mathfrak{M}_R$, we have

$$\mathrm{Hom}_R(A \otimes_R B,\, C) \approx \mathrm{Hom}_R\big(A,\, \mathrm{Hom}_R(B, C)\big).$$

증명 : Abstract non-sense. 명제 3.4.4 를 이용하면 종이와 잉크를 좀 절약할 수 있다. □

위 명제를 보고 우리는 "the tensor functor $-\otimes_R B$ is left **adjoint** to the hom functor $\mathrm{Hom}_R(B, -)$"라고 말한다.

다음 연습문제도 — 비록 자명하지만 — 비슷한 상황이다. 우리는 "the free module functor $\mathcal{F}_R$ is left adjoint to the forgetful functor" 라고 말한다.

연습문제 3.4.24. Let $\mathcal{F}_R : \mathcal{S}et \to \mathfrak{M}_R$ denotes the free module functor and let $U : \mathfrak{M}_R \to \mathcal{S}et$ be the forgetful functor.[38] For $S \in \mathcal{S}et$, $A \in \mathfrak{M}_R$, show $\mathrm{Hom}_R\big(\mathcal{F}_R(S),\, A\big) \approx \mathrm{Mor}_{\mathcal{S}et}\big(S,\, U(A)\big)$ as sets.

Adjoint functor 의 정의는 생략한다. 여유가 있다면 [2, §II.7] 과 [7, Ch. IV] 참조. Adjoint functor 는 Category Theory 의 중요한 개념 중 하나이며 매우 흥미롭기도 하다. Adjoint functor 의 세 번째 보기는 §3.8 에서 만난다.

연습문제 3.4.25. 연습문제 3.3.8 (나) 항과 명제 3.4.23 (Adjoint Theorem) 를 이용하여 tensor functor 가 right exact 임을 다시 증명하라.[39]

[38] Forgetful functor는 보기 2.3.3 참조. $U(A)$는 A의 underlying set이므로, forgetful functor는 underlying functor라고도 불리운다.
[39] 이 증명 방법은 [9, p. 28] 에서 배웠다.

3.5. Tensor Functors II

HomAlg § 3.5
version-151123

이제부터 R, S 는 **그냥 ring** (not necessarily commutative) 이라고 하자. Left R-module 들의 category 는 $\mathfrak{M}_R^\ell$ 로 표기하고, right R-module 들의 category 는 $\mathfrak{M}_R^r$ 로 표기한다.

Discussion 3.5.1. (가) R 이 non-commutative ring 일 때에도 left R-module 들의 tensor product 를 정의 3.4.1 처럼 정의한다면,[40] 무엇이 문제일까?
(나) 아래에서도 왜 left R-module 들의 tensor product ${}_RA \otimes_R {}_RB$ 는 정의하지 않을까? 아래 정의 3.5.2 에서 $A_R \otimes_R {}_RB$ 를 left R-module 로 만들 수는 없을까?[41]

이젠 앞 節의 시작 부분과 같은 motivation 은 필요하지 않을 것이다.

정의 3.5.2. $A \in \mathfrak{M}_R^r$, $B \in \mathfrak{M}_R^\ell$ 일 때, 즉 A_R, ${}_RB$ 일 때,

$$A_R \otimes_R {}_RB = A \otimes_R B = \mathcal{F}_{\mathcal{A}b}(A \times B) \big/ \langle T' \rangle$$

으로 정의하고, 이 **abelian group** 을 A, B 의 **tensor product** 라고 부른다. 단, $\mathcal{F}_{\mathcal{A}b}(A \times B)$ 는 free abelian group generated by the set $A \times B$, $\langle T' \rangle$ 은 subgroup generated by T' 이고,

$$T' = \left\{ \begin{matrix} (a+a', b) - (a,b) - (a', b), \\ (ar, b) - (a, rb), \\ (a, b+b') - (a,b) - (a, b') \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a, a' \in A,\ b, b' \in B, \\ r \in R \end{matrix} \right\}.$$

이번에도

$$\tau : A \times B \subset \mathcal{F}_{\mathcal{A}b}(A \times B) \xrightarrow{\pi} \mathcal{F}_{\mathcal{A}b}(A \times B) \big/ \langle T' \rangle = A \otimes_R B$$
$$\tau(a, b) = a \otimes b, \qquad (a \in A,\ b \in B)$$

로 표기하고, $\tau : A \times B \to A \otimes_R B$ 를 **tensor map** 이라고 부른다.

이제 R 이 commutative 인 경우에 했던 일을 하나씩 모두 반복한다. 단, 종이를 절약하기 위해 자명한 내용과 그림 (삼각형) 은 생략.

---

[40] 뭐, 꼭 그렇게 정의하겠다고 우긴다면 막을 수는 없다…….
[41] 특히 연습문제 3.5.11을 생각해 보라.

연습문제 3.5.3. In the above definition, show that the tensor map $\tau : A \times B \to A_R \otimes_R {}_R B$ is an R-**middle** map (or R-**balanced** map), in the following sense: τ is biadditive and $\tau(ar, b) = \tau(a, rb)$ for $a \in A,\ b \in B,\ r \in R$.

Universal property.

명제 3.5.4. $A_R \otimes_R {}_R B$ satisfies the following universal property: for every abelian group X and for every R-middle map $f : A \times B \to X$, there exists a unique group homomorphism $\varphi : A \otimes_R B \to X$ such that $\varphi \circ \tau = f$.

다음 연습문제에서는 먼저 the set of R-middle maps $\mathcal{M}id_R(A \times B,\, M)$ 의 abelian group structure 를 정의해야 한다.

연습문제 3.5.5. For $M \in \mathcal{A}b$ and $A_R,\, {}_R B$, we have:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_R B,\, M) \approx \mathcal{M}id_R(A \times B,\, M)$$

as abelian groups.

우리는 앞으로 abelian group X 를, 예를 들어, left R-module 로 만들고 싶은 상황을 자주 만나게 된다. 만약 X 에 왼쪽 R-상수곱을 정의하고 싶다면 우선 biadditive map $\alpha : R \times X \to X$ 를 하나 정의해야 할 것이다. 그러나 이 일이 여의치 않다면, 각각의 $r \in R$ 에 대해, group homomorphism $\lambda_r : X \to X$ 을 정의하는 것이 **요령**이다. 그리고

$$rx = \lambda_r(x), \qquad (r \in R,\ x \in X)$$

로 정의하면 된다. 물론 이때

$$\lambda_r + \lambda_{r'} = \lambda_{r+r'}, \qquad \lambda_{r'} \circ \lambda_r = \lambda_{r'r}, \qquad \lambda_1 = id_X, \qquad (r, r' \in R)$$

가 성립함을 설명해야 할 것이다. 이를 간단히 표현하면, $\lambda(r) = \lambda_r$ 로 정의된 $\lambda : R \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(X)$ 가 ring homomorphism 임을 확인해야 한다는 뜻이다. 우리가 만날 대부분의 경우에는 λ_r 의 well-definedness 만이 문제가 되고, 나머지 사항들은 거의 자명하다. 그러므로 앞으로도 λ_r 의 well-definedness 만을 언급하기로 한다.

다음 관찰은 R, S 가 commutative 인 경우에도 성립한다. 따라서 앞 節에서 시작할 수도 있었지만, 아무래도 이 節의 분위기와 어울린다.

관찰 3.5.6. (가) ${}_SA_R$, ${}_RB$ 일 때, abelian group ${}_SA_R \otimes_R {}_RB$ 를 자연스럽게 left S-module 로 만들 수 있다.[42]
(나) 마찬가지로 A_R, ${}_RB_S$ 일 때, abelian group $A_R \otimes_R {}_RB_S$ 는 right S-module.

증명 : (가) (Biadditive map $\alpha : S \times (A \otimes_R B) \to A \otimes_R B$ 는 정의하기 어려워 보이므로) $s \in S$ 일 때, R-middle map $f_s : A \times B \to A \otimes_R B$ 를

$$f_s(a, b) = (sa) \otimes b, \qquad (a \in A,\ b \in B)$$

로 정의하고, 삼각형을 생각하면 group homomorphism $\lambda_s : A \otimes_R B \to A \otimes_R B$ 를 얻는다. (이제 S-상수곱은 다음 식

$$s(a \otimes b) = (sa) \otimes b, \qquad (s \in S,\ a \in A,\ b \in B)$$

으로 설명할 수 있다.) Detail 은 독자들의 몫. □

무엇보다도 먼저 확인하고 싶은 것이 있다! 사실 이걸 확인하기 전에는 한 발짝도 앞으로 나갈 수 없다. (혼동을 방지하기 위하여 아래 명제에서만 **임시로** 이 節 (non-commutative case) 에서 정의한 tensor product 를 $\oslash$ 로 표기하자.)

명제 3.5.7. R 이 commutative 이면,
(가) $A \otimes_R B \approx A_R \oslash_R {}_RB$ as abelian groups.
(나) $A \otimes_R B \approx {}_RA_R \oslash_R {}_RB$ as R-modules.

증명 : 숙제로 남긴다. 앞으로 $\oslash$ 의 표기법을 다시 사용할 일은 없을 것이다. Note : R, S 가 commutative 이면 모든 R-module 은 (R, R)-bimodule. □

Tensor functors.

연습문제 3.5.8. Define functors $A \otimes_R - : \mathfrak{M}_R^\ell \to \mathcal{A}b$, $- \otimes_R A : \mathfrak{M}_R^r \to \mathcal{A}b$, and show that they are additive functors.[43] Also define a 'bifunctor' $- \otimes_R - : \mathfrak{M}_R^r \times \mathfrak{M}_R^\ell \to \mathcal{A}b$.

---

[42] R, S 가 commutative 이면 $A \otimes_R B$ 는 (R, S)-bimodule.
[43] 정의 3.2.11 참조.

연습문제 3.5.9. (가) ${}_SA_R$, ${}_RB$, ${}_SC_R$, ${}_RD$ 일 때, $f : A \to C$ 는 (S,R)-bimodule homomorphism 이고, $g : B \to D$ 는 left R-module homomorphism 이면, $f \otimes g : A \otimes_R B \to C \otimes_R D$ 는 left S-module homomorphism.
(나) A_R, ${}_RB_S$, C_R, ${}_RD_S$ 일 때, $\cdots\cdots$.

다시 앞 節의 반복.

연습문제 3.5.10. For A_R, ${}_RB_S$, ${}_SC$, show $(A \otimes_R B) \otimes_S C \approx A \otimes_R (B \otimes_S C)$.

R 은 항상 (R,R)-bimodule.

연습문제 3.5.11. (가) For ${}_RA$ and B_R, show $R \otimes_R A \approx A$ as left R-modules, and $B \otimes_R R \approx B$ as right R-modules.
(나) In other words, show that $R \otimes_R - : \mathfrak{M}_R^\ell \to \mathfrak{M}_R^\ell$ is naturally equivalent to the identity functor $id_{\mathfrak{M}_R^\ell} : \mathfrak{M}_R^\ell \to \mathfrak{M}_R^\ell$, and $- \otimes_R B : \mathfrak{M}_R^r \to \mathfrak{M}_R^r$ is naturally equivalent to the identity functor $id_{\mathfrak{M}_R^r} : \mathfrak{M}_R^r \to \mathfrak{M}_R^r$.

연습문제 3.5.12. For $A, A_i \in \mathfrak{M}_R^r$, $B_j \in \mathfrak{M}_R^\ell$, show:
(가) $A \otimes_R (\oplus_{j\in J} B_j) \approx \oplus_{j \in J} (A \otimes_R B_j)$ as abelian groups.
(나) $(\oplus_{i\in I} A_i) \otimes_R (\oplus_{j\in J} B_j) \approx \oplus_{(i,j)\in I\times J} (A_i \otimes_R B_j)$ as abelian groups.

지금은 추가할 것이 있다.

연습문제 3.5.13. For ${}_SA_R$, ${}_RB_j$, show: $A \otimes_R (\oplus_{j\in J} B_j) \approx \oplus_{j\in J} (A \otimes_R B_j)$ as left S-modules.

연습문제 3.5.14. For $A \in \mathfrak{M}_R^r$ and $B \in \mathfrak{M}_R^\ell$, show that the tensor functors $A \otimes_R - : \mathfrak{M}_R^\ell \to \mathcal{A}b$ and $- \otimes_R B : \mathfrak{M}_R^r \to \mathcal{A}b$ are right exact.[44]

연습문제 3.5.15. For A_R, ${}_RB_S$, C_S, show:

$$\mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B,\, C) \approx \mathrm{Hom}_R\big(A,\, \mathrm{Hom}_S(B, C)\big)$$

as abelian groups.[45]

[44] 지금도 flat module을 정의할 수 는 있겠지만$\cdots\cdots$.
[45] $\mathrm{Hom}_S(B,C)$ is a right R-module. 연습문제 1.2.10 참조.

다음 소개할 scalar extension 은 수학 전체에서 없어서는 안 될 매우 중요한 개념이다. 우리가 [I] 에서 $\mathbb{R}$-vector space 를 $\mathbb{C}$-vector space 로 생각하지 못하고 "표기법상의 subtle 한 문제" 운운했던 것은 모두 scalar extension 을 몰랐기 때문이다.

$1 \in R \leq S$ 이면 당연히 S 는 (S, R)-bimodule. 이는 $\varphi : R \to S$ 가 ring homomorphism 일 때, S 가 (S, R)-bimodule 인 것의 특수한 경우.[46]

정의 3.5.16. $\varphi : R \to S$ 는 ring homomorphism, M 은 left R-module 일 때,

$$M^S = S \otimes_R M$$

으로 표기하고, 이를 M 의 **scalar extension** 이라고 부른다. 물론 M^S 는 left S-module. ($M \mapsto M^S$ 는 covariant functor $\mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_S$ 로 이해.)

주의 3.5.17. Scalar extension 은 상수곱의 '진짜' 확장이 아닐 때도 있다. 무슨 뜻인고 하니, 예를 들어 $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}_2$ 의 $\mathbb{Q}$ 로의 scalar extension 은 $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_2 = 0$ 이니 $\cdots\cdots$.[47] (상수곱의 '진짜' 확장은 함수 $R \times M \to M$ 을 $S \times M \to M$ 으로 확장해야 한다. '진짜' 확장의 보기는 명제 3.10.15 참조.)

중요한 보기 세 개만. 먼저 선형대수부터.

보기 3.5.18. (가) E 가 k 의 extension field 이고, V 는 k-vector space 라고 하자. 그러면, $V^E = E \otimes_k V$ 는 E-vector space. 이때

$$\dim_E(V^E) = \dim_k(V)$$

가 성립한다. 왜냐하면

$$E \otimes_k (\oplus_{i \in I}\, k) \approx \oplus_{i \in I}\, (E \otimes_k k) \approx \oplus_{i \in I}\, E$$

as E-vector spaces. 당연히 $\mathfrak{B} = \{v_i\}$ 가 V 의 k-basis 이면, $\mathfrak{B}^E = \{1 \otimes v_i\}$ 가 V^E 의 E-basis.[48]

(나) 위 (가) 항의 가장 익숙한 형태는 물론, 예상대로,

$$E \otimes_k k^n \approx E^n$$

as E-vector spaces.

---

[46] 보기 1.2.8 참조.

[47] Scalar extension 하려다가 '초가삼간 다 태운 격'.

[48] R 이 commutative 일 때, 이 결과를 free module 로 확장해 보라.

연습문제 3.5.19. 위 보기에서 $\dim_k(V) < \infty$ 라고 하고, $L \in \mathfrak{L}(V,V)$ 일 때, 다음을 보여라.
(가) $L^E = id \otimes L : V^E \to V^E$ 로 표기하기로 하면, $L^E \in \mathfrak{L}(V^E, V^E)$ 이다. 이 때 $[L^E]_{\mathfrak{B}^E}^{\mathfrak{B}^E} = [L]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}$ 이고, 따라서 $\phi_{L^E}(t) = \phi_L(t)$.
(나) $L^E = 0$ 이면 $L = 0$.
(다) $f(t) \in k[t]$ 이면 $f(L^E) = f(L)^E$.
(라) E/k 가 finite Galois extension 이거나 또는 k 가 perfect field 라고 가정하면, $m_{L^E}(t) = m_L(t)$.

위 연습문제 (라) 항을 위해서는 다음 명제가 필요할 것이다. 이 명제는 [II] 에 포함시켰어야 했다.

명제 3.5.20. E/k 이고 $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(k)$ 라고 하자. 만약 E/k 가 finite Galois extension 이거나, 또는 만약 k 가 perfect field 이면, $m_A^E(t) = m_A(t)$.[49]

증명 : (i) 먼저 E/k 가 finite Galois extension 인 경우: $h(t) = m_A^E(t) \in k[t]$ 인 것만 보이면 충분하다. 이제 $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/k)$ 이면,

$$0 = 0^\sigma = h(A)^\sigma = h^\sigma(A^\sigma) = h^\sigma(A)$$

이므로, minimal polynomial (over E) 의 유일성으로부터 $h^\sigma(t) = h(t)$. Galois Theory 에 의해 $h(t) \in k[t]$.[50]
(ii) k 가 perfect field 인 경우: $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in E$ 를 다항식 $m_A^E(t)$ 의 계수들이라고 하고, $E_0 = k(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ 로 놓자. 그러면 $m_A^E(t) = m_A^{E_0}(t)$ 인 것은 당연. 또 K 를 splitting field of $m_A(t)$ over k 라고 놓자. 그러면 $m_A^{E_0}(t) \mid m_A(t)$ in $E_0[t]$ 이므로, K/E_0. 한편 k 가 perfect field 이므로, K/k 는 finite Galois extension 이고, (i) 에 의해 $m_A^K(t) = m_A(t)$. 따라서 $m_A^{E_0}(t) = m_A(t)$. □

이제 [I, 명제 8.1.5] 의 "표기법상의 subtle 한 문제"를 해결해 보라.

Scalar extension 의 다음 보기는 group representation. 어차피 알고 있는 non-commutative ring 은 거의 group ring 뿐.

---
[49] k 가 perfect field 가 아니면……, 관심 없다. "관심 없다"="자꾸 캐물으면 미워할 것이다".
[50] [I, 관찰 8.1.15] 의 증명 참조.

보기 3.5.21. G는 group이고, $H \leq G$라고 하자. 또 W는 $k[H]$-module이라고 하자. 즉, W는 H의 representation space. 당연히 $k[H]$는 $k[G]$의 k-subalgebra. 이때 $W^G = k[G] \otimes_{k[H]} W$를 W의 **induced representation** (또는 induced module) 이라고 부른다. 물론 W^G는 G의 representation space.

연습문제 3.5.22. 위 보기에서 $[G : H]$, $\dim_k(W) < \infty$일 때, $\dim_k(W^G)$를 구하라.[51]

[51] Consider the coset decomposition of G mod H.

HomAlg § 3.6
version-130812

3.6. Tensor Product of Algebras

이 節부터는 다시 R, S는 **commutative** ring이다. 그렇지만 R-algebra들은 commutative라고 가정하지 않는다(명제 3.6.4에서는 commutative R-algebra라고 가정).

먼저 R-algebra $\mathcal{A}$가 있을 때, $\mathcal{A}$의 곱셈의 의미를 분석해 보자. $\mathcal{A}$의 곱셈은 R-bilinear map $\mu' : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$가 주어져 있다는 의미이고, 명제 3.4.4에 따르면 이는 R-linear map $\mu : \mathcal{A} \otimes_R \mathcal{A} \to \mathcal{A}$가 주어져 있다는 것과 동치가 된다. 물론 $\mathcal{A}$의 곱셈은 $1_{\mathcal{A}}$의 존재와 결합법칙 그리고

$$(ra)b = r(ab) = a(rb), \qquad (r \in R, \ \ a, b \in \mathcal{A})$$

이라는 추가조건도 만족해야 할 것이다. 그러나 대부분의 경우 R-linear map $\mu : \mathcal{A} \otimes_R \mathcal{A} \to \mathcal{A}$의 well-definedness만이 문제가 된다.

명제 3.6.1. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$가 R-algebra이면, R-module $\mathcal{A} \otimes_R \mathcal{B}$는 자연스러운 R-algebra structure를 갖는다.

증명 : 방금 지적한 것처럼 R-linear map $m : (\mathcal{A} \otimes_R \mathcal{B}) \otimes_R (\mathcal{A} \otimes_R \mathcal{B}) \to \mathcal{A} \otimes_R \mathcal{B}$를 하나 정의해야 한다. 이를 위해 $\mathcal{A}$의 곱셈은 $\mu : \mathcal{A} \otimes_R \mathcal{A} \to \mathcal{A}$로 표기하고, $\mathcal{B}$의 곱셈은 $\nu : \mathcal{B} \otimes_R \mathcal{B} \to \mathcal{B}$로 표기하자. 이제

$$m : (\mathcal{A} \otimes_R \mathcal{B}) \otimes_R (\mathcal{A} \otimes_R \mathcal{B}) \approx (\mathcal{A} \otimes_R \mathcal{A}) \otimes_R (\mathcal{B} \otimes_R \mathcal{B}) \xrightarrow{\mu \otimes \nu} \mathcal{A} \otimes_R \mathcal{B}$$

로 정의하면 된다. 이를 잘 들여다 보면, $\mathcal{A} \otimes_R \mathcal{B}$의 곱셈은

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = aa' \otimes bb', \qquad (a, a' \in \mathcal{A}, \ \ b, b' \in \mathcal{B})$$

로 설명할 수 있다. 결합법칙 등은 거의 자명. □

따라서 algebra의 scalar extension도 정의할 수 있다.

정의 3.6.2. $\varphi : R \to S$는 ring homomorphism, $\mathcal{A}$는 R-algebra일 때,

$$\mathcal{A}^S = S \otimes_R \mathcal{A}$$

로 표기하고, 이를 $\mathcal{A}$의 **scalar extension**이라고 부른다. 그러면 물론 $\mathcal{A}^S$는 S-algebra.

다음 결과들은 우리가 기대했던 것과 정확히 일치한다.

연습문제 3.6.3. $\varphi : R \to S$ 가 ring homomorphism 일 때, 다음을 보여라.
(가) $R[t_1, \ldots, t_n]^S = S \otimes_R R[t_1, \ldots, t_n] \approx S[t_1, \ldots, t_n]$ as S-algebras.
(나) $\mathfrak{M}_{n,n}(R)^S = S \otimes_R \mathfrak{M}_{n,n}(R) \approx \mathfrak{M}_{n,n}(S)$ as S-algebras.
(다) For a group G, we have $R[G]^S = S \otimes_R R[G] \approx S[G]$ as S-algebras.

위 연습문제의 point 는 $R[t_1, \ldots, t_n]$ 과 $\mathfrak{M}_{n,n}(R)$, 그리고 $R[G]$ 는 모두 free R-module 이라는 것이다.[52] 이 사실을 증명에 사용하였는가?

다음은 commutative algebra 의 finite coproduct. 이 결과는 수학 전체에서 매우 중요한 의미를 갖는다.

명제 3.6.4. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 가 **commutative** R-algebra 이면, R-algebra $\mathcal{A} \otimes_R \mathcal{B}$ 는 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 의 coproduct in $\mathcal{C}omm\mathcal{A}lg_R$.[53]

증명 : Define $\imath : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes_R \mathcal{B}$ and $\jmath : \mathcal{B} \to \mathcal{A} \otimes_R \mathcal{B}$ by

$$\imath(a) = a \otimes 1, \qquad \jmath(b) = 1 \otimes b, \qquad (a \in \mathcal{A}, \ \ b \in \mathcal{B})$$

(그림 : 마름모, 삼각형)[54]

□

[52] Free 이면 flat. 명제 3.9.4 참조.
[53] $\mathcal{C}omm\mathcal{A}lg_R$ 에서의 infinite coproduct 는 (전혀) 관심 없다. “관심 없다” = “· · · · · ·”.
[54] 증명의 어느 부분에 commutativity 가 사용되는가?

HomAlg § 3.7
version-130812

3.7. Projective and Injective Modules

이 節에서는 **commutative** ring 위에서의 projective module 의 존재와 성질, 그리고 injective module 의 성질을 공부한다.

앞으로 살펴 보겠지만 projective module 의 성질에서 모든 화살표의 방향을 거꾸로 하면 injective module 의 성질이 얻어진다. 그렇지만 injective module 의 existence proof 는 좀 까다로우므로 다음 節에서 따로 다룬다. 이는 **existence 만은 화살표 방향을 바꾸어서 얻어지지 않음**을 뜻하고 있다. 우리는 앞에서 같은 상황을 categorical product 와 coproduct 의 경우에도 경험했었다.

우리는 이미 정의 3.3.9 에서 projective module 과 injective module 을 정의했다. 이제 그 뜻풀이부터 시작하자. (Hom functor 는 모두 left exact functor 임을 기억하라. 명제 3.3.6 참조.)

연습문제 3.7.1. 다음 조건들은 동치임을 보여라.

(1) P is a projective R-module, i.e., $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ is an exact functor.

(2) $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ is a right exact functor.

(3) For every epimorphism $A \xrightarrow{\varphi} B$, $\mathrm{Hom}_R(P,A) \xrightarrow{\varphi*} \mathrm{Hom}_R(P,B)$ is an epimorphism.

(4) For every epimorphism $A \xrightarrow{\varphi} B$, and for every homomorphism $P \xrightarrow{g} B$, there exists a homomorphism $P \xrightarrow{f} A$ such that $\varphi_*(f) = \varphi \circ f = g$.[55]

(그림)

위 조건 (4) 에서 우리는 "$g : P \to B$ factors through $\varphi : A \to B$" 라고 말한다. (Epimorphism $\varphi : A \to B$ 는 항상 canonical projection $\pi : A \to A/\ker\varphi$ 와 본질적으로 같음도 기억하라.)

[55] 주의: 일반적으로 $f : P \to A$는 유일하지 않다. 즉, projective module은 universal property로 정의된 것이 아니다. Injective module의 경우도 마찬가지.

연습문제 3.7.2. 다음 조건들은 동치임을 보여라.

(1) J is an injective R-module, i.e., $\mathrm{Hom}_R(-, J)$ is an exact functor.

(2) $\mathrm{Hom}_R(-, J)$ is a right exact functor.

(3) For every monomorphism $A \xleftarrow{\varphi} B$, $\mathrm{Hom}_R(A, J) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}_R(B, J)$ is an epimorphism.

(4) For every monomorphism $A \xleftarrow{\varphi} B$, and for every homomorphism $J \xleftarrow{g} B$, there exists a homomorphism $J \xleftarrow{f} A$ such that $\varphi^*(f) = f \circ \varphi = g$.

(그림)

이번에는 위 조건 (4) 에서 우리는 "$g : B \to J$ is extended to A"라고 말한다. (Monomorphism $\varphi : B \to A$ 는 항상 canonical embedding $\imath : \mathrm{im}\,\varphi \to A$ 와 본질적으로 같음도 기억하라.)

이 節에서는, 방금 그런 것처럼, projective module 에 관한 statement 바로 다음에 (화살표의 방향을 바꾸어) injective module 의 성질을 state 한다. 칠판에서 이 작업은 더욱 인상적일 것이다. 위 두 연습문제에서 특히 조건 (4) 는 서로 정확히 화살표 방향만 거꾸로 되어 있다.[56] 즉, injective module 은 projective module 의 **dualization** (and vice versa).

항상 existence 가 먼저.

명제 3.7.3. (가) Every free R-module is projective.
(나) Every R-module is (isomorphic to) a homomorphic image of a free (hence projective) R-module.

증명 : (그림) [II, 명제 10.4.1] 참조.

□

[56] 연습문제 3.3.12에 의하면 monomorphism은 epimorphism의 dual.

명제 3.7.4. (가) Every cofree R-module is injective.
(나) Every R-module is (isomorphic to) an R-submodule of a cofree (hence injective) R-module.

증명 : Cofree module 의 정의와 증명은 §3.8 로 미룬다. □

다음 두 연습문제는 abstract non-sense.

연습문제 3.7.5. Show that $\oplus_{i\in I}P_i$ is projective if and only if P_i is projective for every $i \in I$.

연습문제 3.7.6. Show that $\prod_{i\in I} J_i$ is injective if and only if J_i is injective for every $i \in I$.

명제 3.7.3 의 두 번째 증명 : $\mathrm{Hom}_R(R, -)$ 은 identity functor 와 같으므로 (연습문제 3.3.4), R 은 물론 항상 projective R-module 이다. 이제 위 연습문제 3.7.5 에 의해 free R-module $\oplus_{i\in I}R$ 은 projective. □

다음 연습문제에는 명제 3.7.3 과 명제 3.7.4 가 필요하다. (연습문제 3.7.8 에서 연습문제 3.7.6 을 적용할 때는 $X \times Y = X \oplus Y$ 를 생각해야 한다.)

연습문제 3.7.7. 다음은 동치임을 보여라.
(1) P is a projective R-module.
(5) Every SES $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$ splits.
(6) P is a direct summand of a free (hence projective) R-module.

연습문제 3.7.8. 다음은 동치임을 보여라.
(1) J is an injective R-module.
(5) Every SES $0 \longleftarrow A \longleftarrow B \longleftarrow J \longleftarrow 0$ splits.
(6) J is a direct summand of a cofree (hence injective) R-module.

이것으로 projective module 과 injective module 의 일반적인 성질은 끝. 특별히 R 이 PID 일 때는 다음 결과들을 얻는다.

명제 3.7.9. Over a PID, projective = free.

증명 : Projective module 은 free module 의 direct summand (따라서 물론 submodule). 그리고 **PID 위에서는 free module 의 submodule 도 free**. [II, 명제 11.2.4] 참조. □

그러나 다음 결과는 연습문제 3.7.8 과는 무관하다.

명제 3.7.10. Over a PID, injective = divisible.

증명 : Zorn's Lemma 가 필요. 다음 節에서 다룬다. □

그러고 보니, 연습문제 3.7.1 과 연습문제 3.7.2 의 조건 (4) 를 이용하면, 임의의 category 에서 projective object 와 injective object 를 정의할 수 있다. (임의의 category 의 monomorphism 과 epimorphism 은 정의 3.1.1 참조.) Candy 와 cookie 생각에 잠시 옆길 (?) 로 빠진다.

연습문제 3.7.11. Assume V and W are **finite dimensional** vector spaces. Describe projective/injective candies/cookies in $\mathcal{C}_{V,W}/\mathcal{C}_V$.[57]

[57] 연습문제 3.1.6 참조.

HomAlg § 3.8
version-130812

3.8. Existence of Injective Modules

이 節에서는 injective module의 존재와 관련된 앞 節의 명제 3.7.4를 증명한다. 그런데:

주의 3.8.1. Free이면 projective이므로 (명제 3.7.3), 이 과정을 dualize하면 injective module의 존재를 증명할 수 있지 않을까? 그러려면 먼저 free module의 정의를 dualize해 '코-free' module을 정의해야 할 것이다.[58] 그러나 보기 2.4.4의 삼각형에서 세 개의 화살표 $\imath, \jmath, \varphi$ 방향을 모두 바꾸건 혹은 φ 하나만 바꾸건 (특수한 경우를 제외하곤) '코-free' module은 아예 존재하지 않는다.[59] 따라서 이 시도는 시작부터 실패. 우리가 앞으로 할 일은 free module의 '완전한' dual이 아닌 '약간만' dual인 cofree module을 찾는 것이다.

이제 injective module의 정의를 살펴 보자. J가 injective R-module이면, $X \leq_R Y$일 때 X에서 정의된 임의의 R-linear map을 Y로 extend할 수 있어야 한다. 그리고 또 $Y \leq_R Z$이면 이 R-linear map을 Z까지도 extend할 수 있을 것이다. 이렇게 계속 extend할 수 있어야 한다.

[II, § 14.3]에서의 경험에 따르면, 이렇게 homomorphism을 계속 끝까지 (!) 확장하려면 Zorn's Lemma가 필요한 것은 당연하다. 또 $\mathfrak{a} \leq_R R$인 경우부터 — 즉, $\mathfrak{a}$가 R의 ideal인 경우부터 — 조사해 보는 것도 그리 대단한 발상은 아니다.

보조명제 3.8.2. 다음은 동치.

(1) J is an injective R-module.

(2) For every ideal $\mathfrak{a}$ of R and for every R-linear map $g : \mathfrak{a} \to J$, there exists an R-linear map $f : R \to J$ such that $f|_{\mathfrak{a}} = g$.

증명 : By Zorn's Lemma! Routine!! (증명은 **외길**임을 강의에서 설명.) □

이제 다음 (명제 3.7.10)은 거의 자명.

명제 3.8.3. If R is a PID, J is an injective R-module if and only if J is a divisible R-module.

증명 : 보조명제 3.8.2를 적용. □

[58] 정의 3.8.12에서 정의할 cofree module과 구분하기 위해 '코-free' module이라는 이름을 (임시로) 급조하였다.
[59] [4, p. 199, Exercises 13] 참조.

앞 명제의 증명을 잘 들여다 보면, 사실은:

연습문제 3.8.4. If R is an integral domain, show that every injective R-module is a divisible R-module.[60]

다음은 divisible module 에 관한 자명한 fact 들.

연습문제 3.8.5. Show that a homomorphic image of a divisible module is also divisible.

연습문제 3.8.6. 다음은 동치임을 보여라.
(1) A_i are divisible for all $i \in I$.
(2) $\prod_{i\in I} A_i$ is divisible.
(3) $\oplus_{i\in I} A_i$ is divisible.

다음 순서는 명제 3.8.3 을 이용해 — 특별히 $R = \mathbb{Z}$ 인 경우에 — 명제 3.7.4 를 증명하는 것이다.

명제 3.8.7. Every abelian group A can be embedded in a injective (divisible) abelian group.

증명 : $0 \neq a \in A$ 일 때,[61] group homomorphism $\alpha_a : \mathbb{Z}a \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 를 다음

$$\alpha_a(a) = \begin{cases} \overline{1/n}, & \text{if } |a| = n < \infty \\ \text{non-zero 아무거나}, & \text{if } |a| = \infty \end{cases}$$

과 같이 정의하면, α_a 는 well-defined and **non-zero**. 그런데 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 는 injective (divisible) abelian group 이므로, α_a 의 extension $\beta_a : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 가 존재할 것이다. 따라서 group homomorphism $\beta : A \to \prod_{0\neq a\in A} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 가 존재한다 (단, $\beta = \prod_{0\neq a\in A} \beta_a$). 한편 $\alpha_a \neq 0$ for all $0 \neq a \in A$ 이므로 β 가 injection 인 것은 자명하고, $\prod_{0\neq a\in A} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 는 injective (divisible) abelian group 이므로 증명 끝. □

[60] R 이 integral domain 이라는 가정은 왜 필요한가? 연습문제 3.10.12 및 연습문제 3.10.20 참조.
[61] $A = 0$ 이면 $\cdots\cdots$.

위 증명에 대한 주의 사항 하나: [4, pp. 196–197] 의 증명도 틀리지는 않았지만 완전 misoriented! "Misoriented = no motivation = no 'story' = 증명을 외워야 한다". 우리의 목표는 — 단순히 증명을 이해하는 것이 아니고 — 'story'를 이해하는 것이다. [4] 의 증명은 'story'가 없다.

위 증명에서 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 의 역할에 주목해 보자. 왜 갑자기 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 가 등장했을까? 우선 $\mathbb{Q}$ 도 divisible abelian group 이지만, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 의 역할을 대신할 수 없다(아래 보기 3.8.9 참조).[62] 이제 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 의 성질을 분석해 보자.

위 명제 3.8.7 의 증명의 point 는 다음 명제이다:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B,\, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0, \text{ for every } 0 \neq B \in \mathcal{A}b.$$

그리고 이 명제의 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 의 성질은 다음 명제

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) \neq 0, \text{ for every } 0 \neq B \in \mathcal{A}b.$$

의 $\mathbb{Z}$ 의 성질과 '약간만' dual 이라고 할 수 있다.[63] Free abelian group 은 $\oplus\mathbb{Z}$ 이므로, 이제 free abelian group 의 '약간만' dual 인 cofree abelian group 은 당연히 $\prod \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 로 정의한다.

정의 3.8.8. An abelian group is **cofree** if it is isomorphic to $\prod_{i\in I} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ for some index set I.[64]

보기 3.8.9. 예를 들어,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}) = 0$$

이므로, $\mathbb{Q}$ 는 cofree abelian group 이 아니다. (Cofree abelian group 은 모두 torsion abelian group 이지만(왜 그런가?), $\mathbb{Q}$ 는 torsion-free abelian group 이기도 하다.)

다음 연습문제는 3.8.7 의 증명을 다시 쓴 것에 불과하다.

연습문제 3.8.10. Show that every cofree abelian group is injective. Also show that every abelian group can be embedded in a cofree abelian group.

---

[62] $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx S^1$ 은 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$의 역할을 대신할 수 있다. 그러나 대수학에서는 어쩐지 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$가 더 예뻐 보인다.

[63] 이 두 명제가 각각 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$와 $\mathbb{Z}$를 characterize해 주는 것은 아니다.

[64] $I = \emptyset$이어도 OK.

이제 위 결과들을 R-module 의 경우로 확장하자. 우리는 당연히 다음 명제

$$\mathrm{Hom}_R(M, ?) \neq 0, \text{ for every } 0 \neq M \in \mathfrak{M}_R.$$

를 만족시키는 R-module ?를 하나 찾아야 할 것이다(그리고 하나만 찾으면 충분하다). 이를 위해서는 adjoint functor 의 세 번째 보기가 필요하다.

명제 3.8.11. (Adjoint Theorem) For $M \in \mathfrak{M}_R$ and $A \in \mathcal{A}b$, we have

$$\mathrm{Hom}_R\big(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R_R, A)\big) \approx \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A)$$

as abelian groups.[65]

증명 : Sheer abstract non-sense. □

위 명제를 보고 우리는 "the functor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R_R, -) : \mathcal{A}b \to \mathfrak{M}_R$ is right adjoint to the forgetful functor $U : \mathfrak{M}_R \to \mathcal{A}b$" 라고 말한다.[66]

이제 위 Adjoint Theorem 을 (우리의 예상대로) $A = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 인 경우에 적용하면,

$$\mathrm{Hom}_R(M, \widetilde{R}) \approx \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

가 된다(단, $\widetilde{R} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R_R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$). 따라서 $\widetilde{R}$ 가 바로 우리가 찾던 R-module 이다. 즉, $\widetilde{R}$ 는 우리가 원하던 다음 명제

$$\mathrm{Hom}_R(M, \widetilde{R}) \neq 0, \text{ for every } 0 \neq M \in \mathfrak{M}_R$$

를 만족시키는 것을 알 수 있다.

독자들도 지금 **우리의 'story'를 즐기고 있는가?** 우리 'story'의 주인공들은 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, Adjoint Theorem, 그리고 $\widetilde{R}$.

예정된 정의 :

정의 3.8.12. An R-module is **cofree** if it is isomorphic to $\prod_{i \in I} \widetilde{R}$ for some index set I,[67] where $\widetilde{R} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R_R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. (물론 $\widetilde{\mathbb{Z}} \approx \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 이므로, 정의 3.8.8 의 cofree abelian group 은 지금 정의의 특수한 경우이다.)

---

[65] Note that $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R_R, A)$ is a left R-module. 연습문제 1.2.10 참조.
[66] 명제 3.4.23과 연습문제 3.4.24 참조.
[67] $I = \emptyset$ 이어도 OK.

이젠 앞 節의 명제 3.7.4의 증명은 거의 자명.

명제 3.8.13. (가) Every cofree module is injective.
(나) Every R-module M can be embedded in a cofree R-module.

증명 : (가) 연습문제 3.7.6에 의해, $\widetilde{R}$가 injective인 것만 보이면 된다. Adjoint Theorem을 이용해 그림을 그려 보면,

(그림 두 개)

이제 $\widetilde{\psi} \circ f = \widetilde{\varphi}$로부터 $\psi \circ f = \varphi$임을 확인해야 한다. 아래 연습문제 3.8.14 참조.
(나) (명제 3.8.7의 증명의 반복.) $0 \neq x \in M$이면, **non-zero** R-linear map $\alpha_x : Rx \to \widetilde{R}$ 존재. 그런데 $\widetilde{R}$는 injective R-module이므로, α_x의 extension $\beta_x : M \to \widetilde{R}$가 존재한다. 따라서 R-embedding $\beta : M \to \prod_{0 \neq x \in M} \widetilde{R}$가 존재한다.[68] □

위 (가)항의 증명에는 다음 연습문제가 종이를 절약해 준다.

연습문제 3.8.14. Show that isomorphisms in the above Adjoint Theorem (명제 3.8.11) are 'natural' in the following sense: For every R-linear map $f : M \to N$, the following diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R\big(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R_R, A)\big) \arrow[r, "\eta_N", "\approx"'] \arrow[d, "f^*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, A) \arrow[d, "f^*"] \\
\mathrm{Hom}_R\big(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R_R, A)\big) \arrow[r, "\approx", "\eta_M"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A)
\end{tikzcd}$$

is commutative.[69]

---

[68] (나)항의 증명은 정말 명쾌.
[69] Adjoint functor를 제대로 정의했더라면, 사실 이 연습문제의 내용은 adjoint functor의 정의에 포함되어 있다.

주의 사항 하나.

주의 3.8.15. 우리가 $\prod_{i\in I}\widetilde{R}$ 을 cofree R-module 로 정의한 것은 매우 '인위적'이다. 즉, 우리의 정의에서 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 대신 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 를 사용해도 괜찮을 것이다. 그밖에도 cofree R-module 의 후보는 많이 있을 것이다. 따라서, 예를 들어, "injective 이면 cofree 인가?" 또는 "cofree 이면 divisible 인가?" 등의 질문은 별로 의미가 없다.

우리의 'story'는 Hilton-Stammbach [2, pp. 32–35] 를 참조하였다. Lang [6] 의 'story'도 — 얼핏 좀 달라 보이지만 — 본질적으로 우리의 것과 같다. 왜냐하면 Lang [6, p. 784, Theorem 4.1] 의 증명에서,[70] $F^\wedge$ 는 다름 아닌 우리의 cofree R-module 이기 때문이다 (왜 그런가?).

Hungerford [4, pp. 196–197] 에서는, 잘 들여다 보면 J 가 injective abelian group 일 때, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, J)$ 를 cofree R-module 의 代役으로 사용하고 있다.

연습문제 3.8.16. J 가 injective abelian group 일 때, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, J)$ 는 injective R-module 임을 보여라.

이 節의 목표를 달성하였지만, 추가할 comment 들과 질문들이 남아 있다. 이 질문들은 flat module 까지 공부한 후 §3.10 에서 계속한다.

[70] Lang의 증명에서 M, F 는 abelian group 이 아니고 R-module로 수정해야 한다.

HomAlg §3.9
version-130812

3.9. Flat Modules

이 節에서는 (commutative ring 위의) flat module 을 공부한다. 이번에도 뜻풀이부터 시작. (Tensor functor 는 모두 right exact functor 임을 기억하라. 명제 3.4.21 참조.)

연습문제 3.9.1. 다음 조건들은 동치임을 보여라.

(1) M is a flat R-module, i.e., $M \otimes_R -$ is an exact functor.

(2) $M \otimes_R -$ is a left exact functor.

(3) If $\varphi : A \to B$ is a monomorphism, then $id \otimes \varphi : M \otimes_R A \to M \otimes_R B$ is a monomorphism.

이 節에서는 다음 연습문제가 자주 사용된다.

연습문제 3.9.2. Show that $\oplus_{i\in I} f_i : \oplus_{i\in I} A_i \to \oplus_{i\in I} B_i$ is a monomorphism if and only if $f_i : A_i \to B_i$ is a monomorphism for every $i \in I$.

Abstract non-sense 부터.

명제 3.9.3. $\oplus_{i\in I} A_i$ is a flat R-module if and only if A_i is a flat R-module for every $i \in I$.

증명 : Abstract non-sense. 명제 3.4.16 과 연습문제 3.9.2 이용. □

Flat module 을 projective module 을 공부한 후에 다루는 건 다음 명제 때문이다.

명제 3.9.4. (가) R itself is a flat R-module.
(나) Free 이면 flat.
(다) Projective 이면 flat.

증명 : (가) $R \otimes_R - : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R$ is naturally equivalent to the identity functor (명제 3.4.15).
(나) 명제 3.9.3.
(다) Projective 이면 free 의 direct summand (연습문제 3.7.7). Free 이면 flat 이고, flat 의 direct summand 도 flat (명제 3.9.3). □

특별히 integral domain 위에서는:

명제 3.9.5. R이 integral domain일 때, flat이면 torsion-free.

증명 : R의 field of quotient Q도 물론 R-module. Canonical embedding $\imath : R \to Q$를 생각. $0 \neq x \in M_{\text{tor}}$이면, $0 \neq x \otimes 1 \in M \otimes_R R \approx M$이지만, $0 = (id \otimes \imath)(x \otimes 1) = x \otimes 1 \in M \otimes_R Q$. 왜냐하면 $0 \neq r \in R$이고 $rx = 0$일 때, $0 = (rx) \otimes \frac{1}{r} = x \otimes 1 \in M \otimes_R Q$. □

Moreover, if R is a PID:

명제 3.9.6. Over a PID, flat = torsion-free.

증명 : Knight [5, pp. 21–24] 또는 Rotman [8, Theorem 4.23] 참조…….[71] Torsion functor를 이용할 수도 있다 ([3, pp. 143–144] 참조). □

Tensor product와 scalar extension에 관한 연습문제들.

연습문제 3.9.7. If M, N are flat R-modules, show that $M \otimes_R N$ is also a flat R-module.

연습문제 3.9.8. Let $\varphi : A \to B$ be a ring homomorphism. If M is a flat A-module, show that $B \otimes_A M$ is a flat B-module.

[71] 타자 치기 괴롭다…….

HomAlg § 3.10
version-130812

3.10. Examples and Q & A's

이 節은 언제나 미완성 상태일 것.

사실 projective module, injective module, 그리고 flat module 은 제법 (매우) delicate 한 object 들이다. 예를 들어, 우리가 많이 참고한 Hilton-Stammbach [2, p. 36, Exercises 8.5] 에는 정말 희한한 연습문제도 하나 있다. 옮겨 적어 보면: "State a property of divisible modules that you suspect may not hold for arbitrary injective modules." 아니, "suspect" 라니 ······, ㅎㅎ.

보기 3.10.1. Hilton-Stammbach [2, p. 36, Exercises 8.5] 의 '희한한' 연습문제의 '정답' 후보들은 (아마도):
(가) Is $\oplus A_i$ injective, if A_i is injective for every i?
(나) Is every homomorphic image of an injective module again injective?

임시변통 표기법

$$\clubsuit = \{\text{free, projective, flat, torsion-free, injective, divisible}\}$$

을 이용해 질문들을 나열해 보자.[72] $\heartsuit \neq \diamondsuit \in \clubsuit$ 일 때:

질문 1: Does $\heartsuit$ imply $\diamondsuit$?
질문 2: If A is $\heartsuit$, is every homomorphic image of A again $\heartsuit$?
질문 3: If A is $\heartsuit$, is every submodule of A again $\heartsuit$?
질문 4: If A is $\heartsuit$, is every direct summand of A again $\heartsuit$?
질문 5: $\prod_{i \in I} A_i$ is $\heartsuit$ iff every A_i is $\heartsuit$?
질문 6: $\oplus_{i \in I} A_i$ is $\heartsuit$ iff every A_i is $\heartsuit$?

그리고 위 질문들은 조금 변형시킬 수도 있다. 예를 들어:

질문 k′: 위 질문 k 의 $\heartsuit$ 를 finitely generated $\heartsuit$ 로 대체.[73]

보기 3.10.2. (가) 예를 들어, R 이 PID 일 때, f.g. torsion-free 이면 free. [II, 따름정리 11.2.5] 참조.

[72] $\clubsuit$에 cofree는 포함시키지 않았다. 주의 3.8.15 참조.
[73] 물론 질문 5′과 질문 6′은 $|I| < \infty$ 일 때.

(나) 또 예를 들어, "Is A flat if every finitely generated submodule of A is flat?"과 같은 질문도 추가할 수 있다. 이 질문의 답은 "true". [8, Corollary 3.31] 참조.

이 질문들을 '일반적인 경우'에 답하는 것은 그리 어려운 일이 아닐 듯하다(그냥 느낌이 그렇다).[74] 그러나 이 질문들을 base ring R에 따라 다음 case들로 나누면 상황은 달라진다.

Case A: R is a field.

Case B: R is a PID, but not a field.

Case C: R is an integral domain, but not a PID.

Case D: R is a commutative ring, but not an integral domain.

위에서 네 개의 case로 나눈 것은 그냥 **例示에 불과**하고, 실제로는 수많은 variation들이 있을 수 있다. 즉, "R이 $\cdots$ 이지만 $\cdots$ 는 아닌 경우"를 얼마든지 추가할 수 있다. 이때 "$\cdots$"의 후보들은 field, PID, UFD, Noetherian, local, Bezout, Dedekind, (semi) hereditary 등 끝이 없다.[75] 게다가 "R이 $\cdots$ 이고 $\cdots$ 이지만 $\cdots$ 는 아닌 경우"에도 의미있는 문제들이 있을 것이다.

Discussion 3.10.3. 가능한 수많은 질문 중 일부는 (답하기는 쉽지 않지만) 단순한 호기심에 불과하고 별로 '의미'는 없을 수도 있다. '의미있는 질문'의 가치판단 기준은 무엇일까?

각설하고, 우선 고향부터 해결하자.

연습문제 3.10.4. R이 field이면, $|\clubsuit| = 1$임을 보여라. 그리고 이 경우에 질문 k와 질문 k′의 답은 모두 "true"임을 보여라(단, $k = 1, \ldots, 6$).

자명한 fact들부터 시작.

연습문제 3.10.5. $A \in \mathfrak{M}_R$가 torsion-free이면, A의 모든 R-submodule도 torsion-free임을 보여라.

[74] '일반적인 경우'란 임의의 commutative ring R에 대해 "true or false"를 묻는 질문.

[75] 이 강의록에서는 local, Bezout, Dedekind, (semi) hereditary의 정의는 생략.

연습문제 3.10.6. $A_i \in \mathfrak{M}_R$ 일 때, 다음은 동치임을 보여라.

(1) A_i is torsion-free for every $i \in I$.

(2) $\prod_{i \in I} A_i$ is torsion-free.

(3) $\oplus_{i \in I} A_i$ is torsion-free.

연습문제 3.10.7. $\heartsuit =$ torsion-free 일 때, Case B, Case C, Case D 의 경우, 질문 2 의 답은 모두 "false" 이고, 질문 3–질문 6 의 답은 모두 "true" 임을 보여라.

연습문제 3.10.8. 다음은 동치임을 보여라.

(1) R is an integral domain.

(2) R is a torsion-free R-module.

(3) Every free R-module is torsion-free.

연습문제 3.10.9. 다음은 동치임을 보여라.

(1) R is a field.

(2) R is a divisible R-module.

연습문제 3.10.10. R 이 integral domain 일 때, 다음은 동치임을 보여라.[76]

(1) R is a field.

(2) R is an injective R-module.

다음 연습문제는 위 연습문제 3.10.10 에 R 이 integral domain 이라는 가정이 왜 꼭 필요한지 보여 준다.

연습문제 3.10.11. (가) Show that $\mathbb{Z}_n$ is a PIR (principal ideal ring).
(나) Let $n > 1$. Show that $\mathbb{Z}_n$ is an injective $\mathbb{Z}_n$-module.[77] [78]

다음은 정말 자명.

연습문제 3.10.12. Assume R is not an integral domain.
(가) Show that there is no non-zero torsion-free R-module.
(나) Show that there is no non-zero divisible R-module.

[76] 연습문제 3.8.4 참조.
[77] 물론 보조명제 3.8.2를 이용.
[78] Note that $\mathbb{Z}_n$ is a free (hence projective and flat) $\mathbb{Z}_n$-module too.

앞으로, 예를 들어, 다음 표기법

$$(\text{free}) = \text{the collection of all free } R\text{-modules}$$

을 사용하자. (좀 어색한 표기법이긴 하지만, 종이 절약⋯⋯.)

연습문제 3.10.13. If R is not a field, show $(\text{free}) \cap (\text{divisible}) = \{0\}$.[79]

연습문제 3.10.14. Let R be an integral domain but not a field, and let Q be the field of quotients of R.
(가) Show Q is not projective.
(나) Show $(\text{projective}) \cap (\text{injective}) = \{0\}$.[80]

명제 3.10.15. R이 integral domain 일 때, Q를 R의 field of quotients 라고 하자. $A \in \mathfrak{M}_R$ 일 때, 다음은 동치.
(1) $A \in (\text{torsion-free}) \cap (\text{divisible})$.
(2) A의 R-상수곱을 Q-상수곱으로 확장 가능.[81]
따라서, $(\text{torsion-free}) \cap (\text{divisible}) = (Q\text{-vector space})$로 쓸 수 있다.

증명 : A는 torsion-free 이고 divisible 이라고 하자. 만약 $0 \neq r \in R$ 이고 $x \in A$ 이면, A는 divisible 이므로, $ry = x$ 인 $y \in A$가 존재한다. 그리고 A는 torsion-free 이므로, $ry = x$ 인 $y \in A$는 unique. 이때 $y = \frac{x}{r}$로 표기하자. 이제 A의 Q-상수곱을

$$\frac{s}{r} \cdot x = \frac{sx}{r}, \qquad (0 \neq r \in R,\ s \in R,\ x \in A)$$

로 정의하면 된다 (확인해 보라). Converse 는 당연. □

연습문제 3.10.16. Let R be an integral domain.
(가) Show $(\text{torsion-free}) \cap (\text{divisible}) \subseteq (\text{injective})$.[82] In other words: If torsion-free, then injective iff divisible.
(나) Show $(\text{flat}) \cap (\text{divisible}) = (Q\text{-vector space})$.

[79] 연습문제 3.8.6 참조.
[80] Hint: If $M \in (\text{projective}) \cap (\text{injective})$, then $Q \leq_R M$.
[81] 이때 상수곱의 확장은 — 정의 3.5.16의 scalar extension 이 아니고 — '진짜' 확장.
[82] Hint: localize everything at (0).

다음은 one of the most non-trivial ‘fact’.

보기 3.10.17. $R = \mathbb{Z}$ 일 때, $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ 는 free abelian group 일까?[83] 이 질문은 Hilton-Stammbach [2, p. 26, Exercises 4.4] 의 거의 유일한 의문문 연습문제이기도 하다.[84] Hungerford [4, p. 75] 는 Fuchs [10, p. 168] 를 보라고 했으나, Fuchs 의 책 168 쪽에는 그런 내용이 없는 것 “같다”.[85] 어쨌든, 답은 “아니오” 라고 알려져 있다⋯⋯. [8, p. 42] 에 의하면 첫 번째 증명은 1937 년 R. Baer.

그러고 보니, k 가 field 일 때, $\prod_{i=1}^{\infty} k$ 가 k-free 라는 증명은 — k-basis 를 construct 한 것이 아니라 — Zorn’s Lemma 덕분⋯⋯.

이제 Case B (R is a PID, but not a field) 의 경우 앞의 질문 대부분에 답할 수 있다. Case B 의 R-module 들의 세계의 地圖를 그려 보면 다음과 같다 (지도에 표시된 typical example 들은 $R = \mathbb{Z}$ 인 경우).

(지도)

연습문제 3.10.18. Case B (R is a PID, but not a field): 다음을 보여라.

(가) $\heartsuit$ = free = projective 이면, 질문 2 와 질문 5 만 “false”.

(나) $\heartsuit$ = flat = torsion-free 이면, 질문 2 만 “false”.

(다) $\heartsuit$ = injective = divisible 이면, 질문 3 만 “false”.

그러나 Case C 와 Case D 의 경우에는 — 이 강의록의 수준에서 (?) — 답할 수 있는 질문들이 제한적이다. 알고 있는 module 들의 list 가 매우 빈약하기 때문이다. 몇 가지 보기들을 제시하는 것으로 만족하자.

---

[83] 이 질문은 “projective module 의 direct product 도 projective 인가?” 라는 질문의 특수한 경우이다.

[84] Hilton-Stammbach 은 여기에 목숨 걸 생각이 없는 듯, ㅎㅎ.

[85] 나도 목숨 걸 생각은 없다. 정재명 선생님께서는 “아마 Fuchs 의 original lecture note 의 page number” 라고 말씀하셨다.

연습문제 3.10.19. (가) Let R be an integral domain and $\mathfrak{a}$ be an ideal of R. Show that $\mathfrak{a}$ is a free R-module if and only if $\mathfrak{a}$ is a principal ideal of R.
(나) $\mathbb{Z}[t]$ 의 ideal $(2,t)$ 는 free $\mathbb{Z}[t]$-module 이 아님을 보여라.[86]

다음 연습문제는, 특별히, 위 연습문제 3.10.19 (가) 항에 왜 R 이 integral domain 이라는 가정이 꼭 필요한지 보여 준다.

연습문제 3.10.20. (가) Show that the principal ideal ($\mathbb{Z}_4$-submodule) (2) in $\mathbb{Z}_4$ is not a flat (hence not projective and not free) $\mathbb{Z}_4$-module. (Hint: show $0 \neq 2 \otimes 2 \in (2) \otimes_{\mathbb{Z}_4} (2)$, but $0 = 2 \otimes 2 \in (2) \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_4$.)
(나) Show $(2) \approx \mathbb{Z}_4/(2)$ as $\mathbb{Z}_4$-modules.[87]
(다) Also show that (2) is an injective $\mathbb{Z}_4$-module.

연습문제 3.10.21. Note that $\mathbb{Z}_6 = (2) \oplus (3)$. Show that the principal ideal (2) in $\mathbb{Z}_6$ is projective (hence flat) but not free as a $\mathbb{Z}_6$-module.

참고도서에서 눈에 띄는 결과들을 몇 개 소개한다.

Fact 1 : R is Noetherian: (f.g. flat) = (f.g. projective). ([5, p. 54])

Fact 2 : R is Noetherian: $\oplus A_i$ is injective if A_i is injective for every i. ([8, Theorem 4.27])

Fact 3 : R is a Dedekind domain: (f.g. torsion-free) = (f.g. projective). ([6, p. 168])

가장 관심 있는 문제는 물론 Case C (R is an integral domain, but not a PID) 의 경우에 projective 이지만 free 가 아닌 보기를 찾는 것이다. 우선 몇 가지 알려진 결과들을 소개한다.

Fact 4 : R is local: (projective) = (free). (이는 I. Kaplansky (Annals of Math, 1958) 의 결과. 증명은 [5, p. 43–48] 참조. Finitely generated case 의 증명은 [8, Theorem 4.34] 참조.)

[86] $\mathbb{Z}[t]$ 는 물론 free $\mathbb{Z}[t]$-module 이므로, 이 보기는 $\heartsuit$ = free 일 때 Case C–질문 3 의 반례.
[87] 따라서 $\heartsuit$ = flat 일 때 Case D–질문 2 의 답은 "아니오".

Serre's Conjecture $\cdots\cdots$.

Fact 5 : $R = k[t_1, \ldots, t_n]$ where k is a field : (f.g. projective) = (f.g. free). (이 결과는 Serre's Conjecture (1955) 로 알려져 있다가, 1976 년에 D. Quillen 과 A. Suslin 이 (independently) 증명하여 지금은 흔히 Quillen-Suslin Theorem 으로 불리운다.[88] L. Vaseršteĭn 의 simple proof 는 Lang [6, pp. 844–850] 에 수록되어 있다.

다음 보기는 조영현 선생님께 배웠다.

보기 3.10.22. R 이 Dedekind domain 이면, $K_0(R) \approx \mathbb{Z} \oplus C(R)$ 이다 (이때 $C(R)$ 은 R 의 ideal class group 이고, K_0 의 K 는 Algebraic K-Theory 의 K). 그리고, 만약 모든 f.g. projective R-module 이 free 라면, $K_0(R) \approx \mathbb{Z}$ 이 성립한다 (J. Milnor [11, Corollary 1.11] 참조). 그런데 우리는 ideal class group 이 non-zero 인 Dedekind domain $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ 의 존재를 많이 알고 있다. (Note that the ideal class group of $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ is trivial iff $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ is a PID.)

Case C 와 Case D (그리고 그 variation 들) 의 경우에, 앞으로 Ring Theory, Commutative Algebra, Algebraic Geometry, Algebraic Number Theory 등을 더 공부하면, 아래 여백에 추가할 보기들이 몇 개 더 있을 것이다.[89]

[88] D. Quillen 은 1978 년에 Fields Medal 을 수상.

[89] 더 전문적인 책을 공부하기 전에 Rotman [8, §4] 을 우선 읽어 보면 분위기를 맛볼 수 있을 것이다.

3.11. Categorical Duality

우리는 앞에서 이미 — 별 설명 없이 — dual statement, dualization 등의 용어를 사용해 왔다. Dualization 은 물론 모든 화살표 (arrow) 의 방향을 바꾼다는 의미이다. 이제 dualization 의 의미를 더 분명히 해 보자.

그러나 — ker, coker 등을 화살표의 언어로 번역하는 일을 뒤로 미룬 이 강의록의 수준에서는 — 100 % 만족스러운 설명은 쉽지 않다. 앞으로 이 節의 내용을 보충하는 일은 독자들의 몫이다. 먼저 정의 3.3.10 의 opposite category 부터 복습.

연습문제 3.11.1. (가) Show that the initial object in $\mathcal{C}$ is the terminal object in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ and vice versa.
(나) Show that the coproduct in $\mathcal{C}$ is the categorical product in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ and vice versa.
(다) Show that the injectives in $\mathfrak{M}_R$ is the projectives in $\mathfrak{M}_R^{\mathrm{op}}$ and vice versa.

그럼 이제 duality 의 보기를 들어 보자.

보기 3.11.2. Category $\mathcal{C}$ 의 monomorphism 이라는 concept c 는 다음

$$\mathsf{c}(\mathcal{C}):\ [\,\varphi\circ\alpha=\varphi\circ\beta \Longrightarrow \alpha=\beta\,]\ \text{ in } \mathcal{C}$$

과 같다. 이 concept 은 모든 category 에 적용되므로 — 즉, 모든 category 에서 의미를 가지므로 — 이를 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ **에 적용**하면,

$$\mathsf{c}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}):\ [\,\varphi\star\alpha=\varphi\star\beta \Longrightarrow \alpha=\beta\,]\ \text{ in } \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$$

이 된다. 이제 이를 $\mathcal{C}$ **에서 해석**하면, 예를 들어, $\varphi\star\alpha=\alpha\circ\varphi$ 이므로,

$$\mathsf{c}^{\mathrm{op}}(\mathcal{C}):\ [\,\alpha\circ\varphi=\beta\circ\varphi \Longrightarrow \alpha=\beta\,]\ \text{ in } \mathcal{C}$$

를 얻는다. 이때 concept $\mathsf{c}^{\mathrm{op}}(\mathcal{C})$ 를 $\mathsf{c}(\mathcal{C})$ 의 **dual concept** 라고 부르면 그럴 듯할 것이다. 물론 지금 concept $\mathsf{c}^{\mathrm{op}}(\mathcal{C})$ 는 $\mathcal{C}$ 의 epimorphism 을 의미한다. 따라서 다음 표기법

$$\text{monomorphism}^{\mathrm{op}} = \text{epimorphism}$$

도 사용할 수 있다.

우리는 물론 concept (개념) 이나 proposition (명제, statement) 의 의미를 엄밀하게 정의하려는 시도는 하지 않을 것이다. 그저 category 의 language (즉, object 와 morphism 그리고 morphism 의 합성) 와 $=$, $\forall$, $\exists$, and, or, $\Rightarrow$, $\in$ 으로 (만) 이루어진 '문장'이라는 정도로 대충 넘어가자.[90] [91]

다음 차례는 연습문제 3.1.5.

보기 3.11.3. Category $\mathcal{C}$ 의 proposition p 를

$$\mathsf{p}(\mathcal{C}): \ [\psi \circ \varphi \text{ is monic} \implies \varphi \text{ is monic}] \text{ in } \mathcal{C}$$

라고 하자. 이 proposition 은 모든 category 에서 true 이므로, 이를 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ **에 적용**하면,

$$\mathsf{p}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}): \ [\psi \star \varphi \text{ is monic} \implies \varphi \text{ is monic}] \text{ in } \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$$

이 된다. 이제 이를 $\mathcal{C}$ **에서 해석**하면,

$$\mathsf{p}^{\mathrm{op}}(\mathcal{C}): \ [\varphi \circ \psi \text{ is monic}^{\mathrm{op}} \implies \varphi \text{ is monic}^{\mathrm{op}}] \text{ in } \mathcal{C}$$

를 얻는다. 그런데 $\text{monic}^{\mathrm{op}} = \text{epic}$ 이므로,

$$\mathsf{p}^{\mathrm{op}}(\mathcal{C}): \ [\varphi \circ \psi \text{ is epic} \implies \varphi \text{ is epic}] \text{ in } \mathcal{C}$$

가 된다. 이때 proposition p^{op} 을 p 의 **dual proposition** 이라고 부르면 그럴듯할 것이다. 물론 p^{op} 도 모든 category 에서 true 이다. (따라서 연습문제 3.1.5 의 (나) 항은 따로 증명할 필요가 없었다는 뜻이다.)

이렇게 $\mathsf{c}(\mathcal{C})$ 에서 $\mathsf{c}^{\mathrm{op}}(\mathcal{C})$ 을 얻는 과정과 $\mathsf{p}(\mathcal{C})$ 에서 $\mathsf{p}^{\mathrm{op}}(\mathcal{C})$ 을 얻는 과정을 dualization 이라고 부른다. 그리고 p 가 모든 category 에서 true 이면 p^{op} 도 모든 category 에서 true 라는 사실을 흔히 **duality principle** 이라고 부른다.

모든 duality 에는 항상 "and vice versa" 라는 표현이 따라다닌다. 이는

$$(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}, \qquad (\mathsf{c}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathsf{c}, \qquad (\mathsf{p}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathsf{p}$$

라는 뜻이다. 앞으로는 "and vice versa" 부분은 생략하기로 하자. (예를 들어, $\text{monic}^{\mathrm{op}} = \text{epic}$ 만 언급하고, $\text{epic}^{\mathrm{op}} = \text{monic}$ 은 생략.)

---

[90] $\in$ 은, 예를 들어, $A, B \in \mathcal{C}$, $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 와 같은 경우에만 허용된다. 예를 들어, $a \in A$ 는 不可.

[91] 대충 넘어가자는 말은 '문장'이 뭔지 묻지 말자는 뜻.

분명히 해 둘 것들이 있다. 보기 3.11.2 와 보기 3.11.3 에서 우리가 사용한 "c (or p) is meaningful in every category" 라는 표현은 물론 c (또는 p) 가 category 의 언어 (즉, object 와 morphism 그리고 morphism 의 합성) 와 $=$, $\forall$, $\exists$, and, or, $\Rightarrow$, $\in$ 으로 (만) 이루어 있다는 의미이다.

그리고 "proposition p is true in every category" 라는 표현은 "not only p is meaningful in every category but also the **proof** of p is meaningful (and valid) in every category" 라는 의미로 해석하면 된다. 이때 p^{op} 의 증명은 p 의 증명에서 화살표 방향만 바꾸면 될 것이다. 즉, "the proof can be also dualized". 표기법을 남용하여,

$$(\mathsf{p}\text{의 증명})^{\mathrm{op}} = (\mathsf{p}^{\mathrm{op}}\text{의 증명})$$

이라고 쓰는 것도 멋있어 보인다.

그런데, 이제 생각해 보니, concept 에도 concept 들이 포함되어 있을 수 있다. 예를 들어:

보기 3.11.4. Category $\mathcal{C}$ 의 projective 라는 concept 을 c 라고 하면,

$$\begin{aligned}
\mathsf{c}(\mathcal{C}):\ & \varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \text{ epic, and } g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,B) \\
& \qquad\qquad \Longrightarrow \exists f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,A) \text{ s.t. } \varphi \circ f = g \\
\mathsf{c}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}):\ & \varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A,B) \text{ epic, and } g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,B) \\
& \qquad\qquad \Longrightarrow \exists f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,A) \text{ s.t. } \varphi \star f = g \\
\mathsf{c}^{\mathrm{op}}(\mathcal{C}):\ & \varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,A) \text{ epic}^{\mathrm{op}}\text{, and } g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,X) \\
& \qquad\qquad \Longrightarrow \exists f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,X) \text{ s.t. } f \circ \varphi = g \\
\mathsf{c}^{\mathrm{op}}(\mathcal{C}):\ & \forall \varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,A) \text{ monic, and } \forall g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,X), \\
& \qquad\qquad \Longrightarrow \exists f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,X) \text{ s.t. } f \circ \varphi = g
\end{aligned}$$

가 된다. 즉, projective$^{\mathrm{op}}$ = injective.[92]

다음은 노파심에서.

연습문제 3.11.5. (가) Show: initial$^{\mathrm{op}}$ = terminal.
(나) Show: coproduct$^{\mathrm{op}}$ = (categorical) product. (앞으로 표기법을 또 남용하여, $\coprod^{\mathrm{op}} = \prod$ 로도 표기한다.)

[92] $\mathcal{C}$ 에는 projective 나 injective 가 존재하지 않을 수도 있다. 앞으로 이런 comment 는 생략.

보기 3.11.6. 예를 들어, 연습문제 2.5.16 다음에 "(가) 항의 증명에서 모든 화살표의 방향을 바꾸기만 하면 (나) 항의 증명이 얻어진다"고 한 것은

$$\begin{aligned}&\left[\textstyle\prod_{i\in I} X_i \approx \left(\prod_{j\in J} X_j\right) \prod \left(\prod_{k\in K} X_k\right)\right]^{\mathrm{op}}\\ &= \textstyle\prod_{i\in I}^{\mathrm{op}} X_i \approx \left(\prod_{j\in J}^{\mathrm{op}} X_j\right) \prod^{\mathrm{op}} \left(\prod_{k\in K}^{\mathrm{op}} X_k\right)\\ &= \textstyle\coprod_{i\in I} X_i \approx \left(\coprod_{j\in J} X_j\right) \coprod \left(\coprod_{k\in K} X_k\right)\end{aligned}$$

라는 의미.

다음에는 — 임의의 category 에서 — 연습문제 3.7.5 와 연습문제 3.7.6 사이의 duality 를 분석한다.

보기 3.11.7. (가) 연습문제 3.7.5 의 proposition ($\coprod X_i$ is projective iff X_i is projective for every i) 와 연습문제 3.7.6 의 proposition ($\prod X_i$ is injective iff X_i is injective for every i) 은 물론 모든 category 에서 meaningful. 그리고 서로 duality 의 관계가 있음도 분명하다. 그런데 이 proposition 들은 모든 category 에서 true 일까? 그러기 위해서는 그 증명들도 모든 category 에서 meaningful 해야 할 것이다.
(나) 연습문제 3.7.5 의 if part

$$\coprod X_i \text{ is projective} \Longleftarrow X_i \text{ is projective for every } i$$

의 증명은 모든 category 에서 meaningful 하고 (확인해 보라), 따라서 이 명제는 모든 category 에서 true. 그러므로 duality principle 에 의해

$$\prod X_i \text{ is injective} \Longleftarrow X_i \text{ is injective for every } i$$

도 모든 category 에서 true.
(다) 그러나 only if part 는 사정이 좀 다르다. $\mathcal{C} = \mathfrak{M}_R$ 에서 연습문제 3.7.5 (와 연습문제 3.7.6) 의 only if part 를 증명할 때, 아마 (일부) 독자들은 category $\mathcal{C} = \mathfrak{M}_R$ 의 다음 성질 (property)

$$\mathsf{p}: \quad \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \neq \emptyset \text{ for every } A, B \in \mathcal{C}$$

을 필요로 했을 것이다.[93] [94] 이 성질은 모든 category 가 공유하는 성질이 아니므로, only if part 는 모든 category 에서 true 라고 할 수 없고 따라서 duality principle 을 적용할 수 없다.

---

[93] A property of a category $\mathcal{C}$ is of course a proposition in $\mathcal{C}$.
[94] 대부분의 독자들은 zero map의 존재를 필요로 했을 것이지만, 그 말이 그 말.

(라) 이제 a collection (class) of categories $\mathsf{S}(\mathsf{p})$ 를

$$\mathsf{S}(\mathsf{p}) = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ satisfies the property } \mathsf{p}\}$$

로 정의하자 (단, p 는 앞 (다) 항의 property p). 그러면 연습문제 3.7.5 의 only if part 의 증명은 $\mathsf{S}(\mathsf{p})$ 에 속하는 모든 category 에서 meaningful and true. 한편 $\mathsf{p}^{\mathrm{op}} = \mathsf{p}$ 이므로, duality principle 을 $\mathsf{S}(\mathsf{p})$ 에 **제한해 적용**하면, 연습문제 3.7.6 의 only if part 도 $\mathsf{S}(\mathsf{p})$ 에 속하는 모든 category 에서 true 임을 알 수 있다.

이제 — 임의의 category 에서 — 연습문제 3.7.7 과 연습문제 3.7.8 사이의 duality 를 분석해 보자. 단, 임의의 category 에서 SES 는 (이 강의록의 수준에서는) 다루기 힘드니, SES 는 잠시 퇴장.

보기 3.11.8. (가) Category $\mathcal{C}$ 의 다음 dual proposition

a : X is projective $\Longleftrightarrow$ $\exists$ projective Y and $\exists Z$ s.t. $Y \approx X \coprod Z$

a^{op} : X is injective $\Longleftrightarrow$ $\exists$ injective Y and $\exists Z$ s.t. $Y \approx X \prod Z$

을 생각하자. a, a^{op} 은 물론 모든 category 에서 meaningful 하지만, 항상 true 라고 할 수는 없다. 그렇다면 proposition a 를 증명하려면 category $\mathcal{C}$ 에는 어떤 property 들이 필요할까? 독자들은 $\mathcal{C}$ 가 다음 세 개의 property

p : $A, B \in \mathcal{C} \Longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \neq \emptyset$

q : $X \in \mathcal{C} \Longrightarrow \exists$ projective Y and $\exists$ epic $\varphi : Y \to X$

r : $\varphi : Y \to X,\ \psi : X \to Y,\ \varphi \circ \psi = id \Longrightarrow \exists Z$ s.t. $Y \approx X \coprod Z$

를 만족시킨다면, $\mathcal{C}$ 의 명제 a 를 증명할 수 있음을 확인할 수 있을 것이다.[95] 그리고 이는 $\mathcal{C}$ 가 p^{op}, q^{op}, r^{op} 을 만족시킨다면, $\mathcal{C}$ 의 명제 a^{op} 을 증명할 수 있다는 뜻이다. 아, 感 잡았다.

(나) 이제 a collection (class) of categories S 를

$$\mathsf{S} = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ satisfies properties } \mathsf{p}, \mathsf{q}, \mathsf{r} \text{ and } \mathsf{p}^{\mathrm{op}}, \mathsf{q}^{\mathrm{op}}, \mathsf{r}^{\mathrm{op}}\}$$

로 정의하고 ($\mathsf{p}^{\mathrm{op}} = \mathsf{p}$), duality principle 을 S 에 **제한해 적용**하면, 명제 a^{op} 도 S 에 속하는 모든 category 에서 true. 물론 (a 의 증명)$^{\mathrm{op}}$ = (a^{op} 의 증명).

[95] 물론 다른 property 들도 가능하다. 또 property r 을 깊이 분석하면 여러 개의 property 들로 나눌 수도 있을 것이다.

주의 3.11.9. 위 보기 3.11.8 에서, 예를 들어, 우리는 $\mathfrak{M}_R \in \mathsf{S}$ 에서조차 특히 property q^{op} 의 증명은 'long story'를 필요로 함을 알고 있다. **주의**: 각각의 $\mathcal{C} \in \mathsf{S}$ 에서 p, q, r, p^{op}, q^{op}, r^{op} 을 어떻게 증명하는지는 상관하지 않는다.

이제 다음 정의는 자연스럽다.

정의 3.11.10. Let $\{\mathsf{p}_i \mid i \in I\}$ be a collection of properties meaningful in every category. A collection of categories S, defined by

$$\mathsf{S} = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ satisfies properties } \mathsf{p}_i \text{ and } \mathsf{p}_i^{\mathrm{op}} \text{ for every } i \in I\},$$

is said to be **self-dual**. **Duality criterion**: When S is self-dual, if a proposition a is meaningful and true in every category in S, then a^{op} is also meaningful and true in every category in S.[96]

그런데, functor 들이 개입되어 있으면 신경을 조금 더 써야 한다. Functor $F(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 를 $\mathcal{C}$ 에서 dualize 하려면, 우선 $F(\mathcal{C})$ 는 — codomain $\mathcal{D}$ 를 고정할 때 — 모든 category $\mathcal{C}$ 에 대해 meaningful 해야 한다.[97] 그러면, 명제를 dualize 할 때와 같이, 우선 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 에 적용하여 $F(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ 를 얻은 후, 이를 $\mathcal{C}$ 에서 해석하여 $F^{\mathrm{op}}(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 를 얻으면 된다. 이때 $\mathcal{C}$ 의 화살표 방향만 바뀔 뿐이고, codomain **$\mathcal{D}$ 의 화살표 방향은 바뀌지 않음**에 주의.

보기 3.11.11. 예를 들어, 임의의 category 에서 명제 3.3.5 의 (가) 항과 (나) 항을 생각해 보자. $A \in \mathcal{C}$ 일 때, $F(\mathcal{C}) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ 으로 놓으면,

$$F(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, -) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et, \qquad F^{\mathrm{op}}(\mathcal{C}) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-, A) : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$$

가 된다.[98] Duality principle 을 적용하면 ($F(\mathcal{C}) = F$, $F^{\mathrm{op}}(\mathcal{C}) = F^{\mathrm{op}}$ 로 표기),

$$\mathsf{p} \;:\; F\big(\textstyle\prod B_i\big) \approx \prod F(B_i), \quad \text{i.e.,} \quad \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}\left(A, \prod B_i\right) \approx \prod \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B_i)$$

의 dual proposition 은

$$\mathsf{p}^{\mathrm{op}} \;:\; F^{\mathrm{op}}\big(\textstyle\prod^{\mathrm{op}} B_i\big) \approx \prod F^{\mathrm{op}}(B_i), \quad \text{i.e.,} \quad \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}\left(\coprod B_i, A\right) \approx \prod \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B_i, A)$$

가 된다. 물론 (p 의 증명)$^{\mathrm{op}}$ = (p^{op} 의 증명).

---

[96] Self-dual collection 의 typical example 은 (collection of) abelian categories. [2], [6], [7] 등 참조.
[97] Functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 의 domain 은 $\mathcal{C}$ 이고 codomain(또는 range)은 $\mathcal{D}$.
[98] 연습문제 3.3.13 참조.

연습문제 3.11.12. 임의의 category 에서 연습문제 3.7.1 의 조건 (3) 과 연습문제 3.7.2 의 조건 (3) 사이의 duality 를 설명하라. 화살표 하나는 방향이 바뀌지 않는 이유도 설명하라.

이 강의록에는 duality principle 과 duality criterion 을 적용할 수 있는 많은 보기들이 있다. 독자들의 확인을 부탁.

이 정도로 마무리하자.

제 4 장 Tor_n and Ext^n

Torsion functor와 extension functor.

4.1. Torsion Functor

HomAlg §4.1
version-130812

Hu [3, Ch. III] 로 충분하다. 강의도 Hu [3, Ch. III] 를 따라갈 것이다.

[3, Ch. III, 첫 줄] 에는 torsion functor 와 extension functor 를 homological algebra 의 "main subject" 라고 선언했다. 그러나, 답답한 것은 — 이번에도 당연히 — 구체적인 example 을 다룰 수 없다는 것이다. 첫눈이 빨리 오기만 바랄 뿐 $\cdots\cdots$![1]

4.2. Extension Functor

HomAlg §4.2
version-130812

Extension functor 는 torsion functor 의 dual concept 이므로 앞 節에 몇 줄만 추가하면 된다.

[1] [3] 에서 spectral sequence는 다루지 않은 게 그나마 다행이다$\cdots\cdots$.

HomAlg §4.3
version-201011

4.3. Epilogue

우리는 — 두말할 것도 없이 — Category Theory 와 Homological Algebra 의 첫걸음을 뗀 수준이다. 왜 exact functor 를 열심히 찾았는지도 아직 설명할 길이 없다. (이제야 밝히지만 사실은 명제 3.7.3 (나) 항과 명제 3.7.4 (나)항의 역할도 중요하다.) Kernel 과 cokernel 을 화살표의 언어로 번역하는 것도 뒤로 미루었고.

이 강의록의 근본적인 한계는 ([II] 에서 그토록 강조하던) motivation 과 구체적인 example 이 없다는 것이다. 이 강좌에서, 예를 들어, group (co) homology 나 singular homology 등을 다룰 시간은 절대적으로 부족하기 때문이다.

Category Theory 와 Homological Algebra 를 사용하지 않는 수학 분야는 거의 없다. 구체적인 example 들은 앞으로 오랜 기간 독자들의 몫이다.

⋮

수정 201011

다만, 훗날 다음과 같이 쓰여진 책을 만나더라도 당황하지 않기를 바란다 (학부생 시절에 배운 것이라고 $\cdots\cdots$): "If X is a topological space, then the category $\mathcal{A}b(X)$ of sheaves of abelian groups on X has enough injectives. Let $\Gamma(X,-) : \mathcal{A}b(X) \to \mathcal{A}b$ be the global section functor. Now we can define the cohomology functors $H^i(X,-)$ to be the right derived functors of $\Gamma(X,-)$." [2]

[2] Right derived functor 는 extension functor 의 abelian category 에서의 일반화. [1, pp. 203–207] 참조.

참고 문헌

HomAlg ref
version-130812

[1] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM 52, Springer, 1977.

[2] P. J. Hilton and U. Stammbach, *A Course in Homological Algebra*, Second Corrected Printing, GTM 4, Springer, 1971.

[3] S.-T. Hu, *Introducton to Homological Algebra*, Holden-Day, 1968.

[4] T. W. Hungerford, *Algebra*, GTM 73, Springer, 1974.

[5] J. T. Knight, *Commutative Algebra*, LMS LNS 5, Cambridge University Press, 1971.

[6] S. Lang, *Algebra*, 3 rd edition (Reprinted with corrections), Addison-Wesley, 1993. (GTM 211, Springer, 2002.)

[7] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, 2 nd edition, GTM 5, Springer, 1998.

[8] J. J. Rotman, *Notes on Homological Algebras*, Van Nostrand Reinhold, 1970.

다음 책들은 이 강의록에서 한번만 언급된 것들이다.

[9] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969. (§ 3.4 에서 언급.)

[10] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups*, Academic, 1970. (§ 3.10 에서 언급.)

[11] J. Milnor, *Introduction to Algebraic K-Theory*, Princeton University Press, 1971. (§ 3.10 에서 언급.)

[12] B. Stenström, *Rings of Quotients: An Introduction to Methods of Ring Theory*, Springer, 1979. (§ 2.3 에서 언급.)