Spectral Theorems

(Elementary Proofs)

李 仁 碩

version 150824

이 article에서는 Spectral Theorem들의 'elementary version'을 다룬다. 즉 — linear operator가 아닌 — (square) matrix에 관한 Spectral Theorem들을 다룬다는 뜻이다. 그리고 'elementary proof'란 — dimension에 관한 귀납법이 아닌 — **matrix size에 관한 귀납법**을 의미한다.

그러므로 dual space의 개념이나 transpose operator 및 adjoint operator의 정의는 필요하지 않다. 즉, transpose matrix $A^{\mathbf{t}}$와 adjoint matrix A^*의 정의만 알면 된다. 그리고 이 article에서는 $\mathbb{R}^n$ 및 $\mathbb{C}^n$의 **dot product** $\langle\ ,\rangle$만을 생각하므로, [I, 관찰10.7.1]이 transpose operator와 adjoint operator의 역할을 대신할 것이다.

이 article을 위해서는 우선 [I, §7.2]까지 — 즉, (행렬의) diagonalization을 — 공부한 후,[1] 다음

(a) $\mathbb{R}^n$ 및 $\mathbb{C}^n$의 dot product와 Gram-Schmidt Orthogonalization,
(b) [I, 관찰10.7.1] : $\langle AX, Y\rangle = \langle X, A^*\cdot Y\rangle$ for all $A\in\mathfrak{M}_{n,n}(F)$, $X, Y\in\mathbb{C}^n$,[2]
(c) real orthogonal group $\mathbf{O}(n)$ 및 complex unitary group $\mathbf{U}(n)$의 정의,
(d) [I, §9.4]의 reflection을 만났을 때의 '사고방식',
(e) [I, 정리9.5.7]의 $\mathbf{O}(2)$의 구조

의 준비만으로 충분하다. (독자들은 [I, 정리7.3.1]의 증명 technique도 복습하기 바란다.)

[1] 아, 명제3.1의 증명에는 minimal polynomial과 A-invariant subspace의 정의 및 [I, 보기8.1.3]도 한 번씩 필요하다.
[2] 물론 $F=\mathbb{R}$이면, A^*는 $A^{\mathbf{t}}$로 이해한다.

version

150824

제 1 절 Normal Matrix

이 節에서는 항상 $F = \mathbb{C}$이고, $\mathbb{C}^n$에는 Hermitian **dot product** $\langle\ ,\rangle$가 주어져 있다고 가정한다.

정의 1.1 $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C})$일 때, 만약 $AA^* = A^* \cdot A$이면, A를 **normal matrix**라고 부른다. 물론 $A^* = \overline{A^{\mathbf{t}}}$.

우리가 normal matrix에 관심을 갖는 것은 다음 관찰 때문이다.

관찰 1.2 $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C})$일 때, 만약 A의 eigen-vector들로 이루어진 $\mathbb{C}^n$의 orthonormal basis가 존재하면, A는 normal.

증명 : 익숙한 '사고방식'([I, 관찰 5.6.11 및 관찰 7.2.13])에 의해, $U^{-1}AU = D$인 $U \in \mathbf{U}(n)$과 diagonal matrix D가 존재한다. 그런데, $U^* = U^{-1}$이므로,

$$\overline{D} = D^* = (U^{-1}AU)^* = U^{-1}A^* \cdot U$$

가 된다. 따라서,

$$U^{-1}AA^* \cdot U = D\overline{D} = \overline{D}D = U^{-1}A^* \cdot AU$$

이므로, $AA^* = A^* \cdot A$. (이 증명은 한마디로 "대각행렬의 adjoint는 대각행렬이고, 대각행렬은 서로 commute".) □

이제 위 관찰의 converse를 증명하려면, [I, 관찰 15.2.5]에서처럼, 다음 관찰들이 필요하다.

관찰 1.3 $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C})$일 때, 다음은 동치이다.

(1) A는 normal.
(2) $\langle AX, AY\rangle = \left\langle A^* \cdot X, A^* \cdot Y\right\rangle$ for all $X, Y \in \mathbb{C}^n$.

증명 : 만약 A가 normal이면, [I, 관찰 10.7.1]에 의해

$$\langle AX, AY\rangle = \left\langle X, A^* \cdot AY\right\rangle = \left\langle X, AA^* \cdot Y\right\rangle = \left\langle A^* \cdot X, A^* \cdot Y\right\rangle, \qquad (X, Y \in \mathbb{C}^n)$$

이므로 OK. 역으로, A가 조건 (2)를 만족시키면,

$$\left\langle X, A^* \cdot AY\right\rangle = \langle AX, AY\rangle = \left\langle A^*X, A^*Y\right\rangle = \left\langle X, A \cdot A^*Y\right\rangle, \qquad (X, Y \in \mathbb{C}^n)$$

이므로, A는 normal. □

관찰 1.4 $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ 가 normal 일 때, 만약 $AX = \lambda X$ 이면, $A^* \cdot X = \overline{\lambda}\, X$ (단, $X \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$).

증명 : 먼저, $(A - \lambda I)^*$ 도 normal 이다. 왜냐하면, $(A - \lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda}\, I$ 이므로,

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)(A^* - \overline{\lambda}\, I) &= A \cdot A^* - \overline{\lambda}\, A - \lambda A^* + |\lambda|^2 I \\ &= A^* \cdot A - \lambda A^* - \overline{\lambda}\, A + |\lambda|^2 I \\ &= (A^* - \overline{\lambda}\, I)(A - \lambda I)\end{aligned}$$

이기 때문이다. 이제 위 관찰 1.3 에 의해,

$$0 = \big\langle (A - \lambda I)\, X,\, (A - \lambda I)\, X \big\rangle = \big\langle (A^* - \overline{\lambda}\, I)\, X,\, (A^* - \overline{\lambda}\, I)\, X \big\rangle$$

이므로, $(A^* - \overline{\lambda}\, I)\, X = 0$.[3] □

이제 Spectral Theorem 을 증명할 수 있다.

정리 1.5 (Spectral Theorem : Normal Matrix Case) $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ 일 때, 다음 조건은 동치이다.

(1) A 는 normal.

(2) A 의 eigen-vector 들로 이루어진 $\mathbb{C}^n$ 의 orthonormal basis 존재.

증명 : (i) 한쪽 방향은 이미 증명하였으므로, 이제 A 는 normal 이라고 가정하고, **matrix size** n **에 관한 귀납법**을 사용해 $U^{-1}AU$ 가 diagonal matrix 인 $U \in \mathbf{U}(n)$ 이 존재함을 보이자. 우선 $n = 1$ 이면 증명할 것이 없으므로, $n \geq 2$ 라고 가정하자.

(ii) 당연히, 먼저 A 의 eigen-vector $X_1 \in \mathbb{C}^n$ 을 하나 찾는다 ($F = \mathbb{C}$ 이므로 항상 가능). 이때 우리는 X_1 이 unit vector 라고 생각할 수 있을 것이다 (왜 그런가?). 그리고, X_1 의 eigen-value 를 $\lambda \in \mathbb{C}$ 라고 놓자 (즉, $AX_1 = \lambda X_1$). 다음에는, Gram-Schmidt Orthogonalization 을 이용해 $\mathbb{C}^n$ 의 orthonormal basis $\mathfrak{B} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 을 찾는다. 이제 $U_0 = [I]^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{E}} \in \mathbf{U}(n)$ 으로 표기하면, L_A 의 행렬 표현 $[L_A]^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}$ 는

$$[L_A]^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}} = U_0^{-1} A U_0 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

의 형태가 된다 (단, $B \in \mathfrak{M}_{n-1,n-1}(\mathbb{C})$, $C \in \mathfrak{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$).

[3] Dot product 의 positive definiteness 가 사용되었음에 유의하기 바란다. 저자는 이 관찰을 증명하는 다른 방법을 알지 못한다. 그런 의미에서, 이 증명은 제법 'tricky'하다.

(iii) 그러면, $U_0^* = U_0^{-1}$이므로,

$$\left(\begin{array}{c|c} \overline{\lambda} & 0 \\ \hline C^* & B^* \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)^* = (U_0^{-1}AU_0)^* = U_0^{-1}A^* \cdot U_0 = [L_{A^*}]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}$$

가 된다. 그런데, 관찰 1.4에 의해 $A^* \cdot X_1 = \overline{\lambda}\, X_1$이고, 이는 $C^* = 0$ 이라는 뜻이다. 즉, $C = 0$ 이므로,

$$U_0^{-1}AU_0 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right), \qquad U_0^{-1}A^* \cdot U_0 = \left(\begin{array}{c|c} \overline{\lambda} & 0 \\ \hline 0 & B^* \end{array}\right)$$

가 된다. 따라서, A는 normal이므로, B도 normal matrix인 것은 자명하다 (즉, $BB^* = B^* \cdot B$). 이제 induction hypothesis에 의해, $P^{-1}BP$가 diagonal matrix인 $P \in \mathbf{U}(n-1)$이 존재할 것이다. 마지막으로 $U_1 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right)$로 놓으면, 당연히 $U_1 \in \mathbf{U}(n)$이고 $U_1^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array}\right)$이므로,

$$U_1^{-1}U_0^{-1}AU_0U_1 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & P^{-1}BP \end{array}\right)$$

가 된다. 그런데, $P^{-1}BP$는 diagonal matrix이므로, $U = U_0U_1 \in \mathbf{U}(n)$으로 놓으면, $U^{-1}AU$는 diagonal matrix. □

위 증명에서, 행렬 U_1을 생각하는 technique은 이미 [I, 정리 7.3.1]에서 경험했던 것이다. 이 기술은 우리가 matrix size에 관한 귀납법을 사용할 때의 常用 수법이다.

제 2 절 Real Symmetric Matrix

version

150824

이 節에서는 항상 $F = \mathbb{R}$이고, $\mathbb{R}^n$에는 **dot product** $\langle\ ,\rangle$가 주어져 있다고 가정한다.

이제 real symmetric matrix의 대각화를 시작해 보자. 그런데, $F = \mathbb{R}$인 경우에는 eigen-value가 하나도 없을 수 있으므로, 대각화를 시작조차 할 수 없을지도 모른다. 따라서 우리는 무엇보다도 먼저 real symmetric matrix는 (real) eigen-value를 갖는 것부터 설명해야 한다.

명제 2.1 Symmetric matrix $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ 은 항상 (real) eigen-value 를 갖는다.

증명 : Real matrix A 를 complex matrix $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ 로 이해한다고 해서 뭐 안 될 이유는 없다. 그리고 $\mathbb{C}^n$ 에는 Hermitian dot product 가 주어졌다고 생각하자. 이제, eigen-value $\lambda \in \mathbb{C}$ 를 갖는 A 의 eigen-vector $X \in \mathbb{C}^n$ 을 찾는다(즉, $AX = \lambda X$). 그러면, $A^* = A^{\mathbf{t}} = A$ 이므로, [I, 관찰 10.7.1] 에 의해

$$\lambda \langle X, X \rangle = \langle AX, X \rangle = \left\langle X, A^* \cdot X \right\rangle = \langle X, AX \rangle = \langle X, \lambda X \rangle = \overline{\lambda} \langle X, X \rangle$$

를 얻는다. 따라서, $\overline{\lambda} = \lambda \in \mathbb{R}$. □

우리가 real symmetric matrix 에 관심을 갖는 것은 다음 관찰 때문이다. (지금부터는 (의도적으로) 제 1 절의 표현과 표기법을 반복한다.)

관찰 2.2 $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ 일 때, 만약 A 의 eigen-vector 들로 이루어진 $\mathbb{R}^n$ 의 orthonormal basis 가 존재하면, A 는 symmetric.

증명 : 다시 '사고방식'([I, 관찰 5.6.11 및 관찰 7.2.13]) 에 의해, $U^{-1}AU = D$ 인 $U \in \mathbf{O}(n)$ 과 diagonal matrix D 가 존재할 것이다. 그런데, $U^{\mathbf{t}} = U^{-1}$ 이므로,

$$D = D^{\mathbf{t}} = \left(U^{-1}AU\right)^{\mathbf{t}} = U^{-1}A^{\mathbf{t}} \cdot U$$

가 된다. 따라서 $U^{-1}AU = U^{-1}A^{\mathbf{t}} \cdot U$ 이므로, $A = A^{\mathbf{t}}$. (이 증명은 한마디로 "대각행렬은 대칭행렬".) □

그리고, 위 관찰의 converse 도 성립한다.

정리 2.3 (Spectral Theorem : Real Symmetric Matrix Case) $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ 일 때, 다음 조건

(1) A 는 symmetric.

(2) A 의 eigen-vector 들로 이루어진 $\mathbb{R}^n$ 의 orthonormal basis 존재.

은 동치이다.

증명 : (i) 한쪽 방향은 이미 증명하였으므로, 이제 A 는 symmetric 이라고 가정하고, **matrix size n 에 관한 귀납법**을 사용해 $U^{-1}AU$ 가 diagonal matrix 인 $U \in \mathbf{O}(n)$ 이 존재함을 보이자. 우선 $n = 1$ 이면 증명할 것이 없으므로, $n \geq 2$ 라고 가정하자.

(ii) 당연히, 먼저 A 의 eigen-vector $X_1 \in \mathbb{R}^n$ 을 하나 찾는다(명제 2.1). 이때 우리는 X_1 이 unit vector 라고 생각할 수 있다(왜 그런가?). 그리고, X_1 의 eigen-value 를 $\lambda \in \mathbb{R}$ 이라고 놓자(즉, $AX_1 = \lambda X_1$). 다음에는, Gram-Schmidt Orthogonalization 을 이용해 $\mathbb{R}^n$ 의 orthonormal basis $\mathfrak{B} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 을 찾는다. 이제 $U_0 = [I]^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{E}} \in \mathbf{O}(n)$ 으로 표기하면, L_A 의 행렬 표현 $[L_A]^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}$ 는

$$[L_A]^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}} = U_0^{-1} A U_0 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

의 형태가 된다(단, $B \in \mathfrak{M}_{n-1,n-1}(\mathbb{R})$, $C \in \mathfrak{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$).

(iii) 그런데, $U_0{}^{\mathbf{t}} = U_0^{-1}$ 이고 $A^{\mathbf{t}} = A$ 이므로,

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline C^{\mathbf{t}} & B^{\mathbf{t}} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)^{\mathbf{t}} = (U_0^{-1} A U_0)^{\mathbf{t}} = U_0^{-1} A U_0 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

가 된다. 즉, B 는 **symmetric** 이고 $C = 0$ 이다. 이제 induction hypothesis 에 의해, $P^{-1}BP$ 가 diagonal matrix 인 $P \in \mathbf{O}(n-1)$ 이 존재할 것이다. 마지막으로 $U_1 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right)$ 로 놓으면, 당연히 $U_1 \in \mathbf{O}(n)$ 이고 $U_1^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array}\right)$ 이므로,

$$U_1^{-1} U_0^{-1} A U_0 U_1 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & P^{-1}BP \end{array}\right)$$

가 된다. 그런데, $P^{-1}BP$ 는 diagonal matrix 이므로, $U = U_0 U_1 \in \mathbf{O}(n)$ 으로 놓으면, $U^{-1}AU$ 는 diagonal matrix. □

독자들도 눈치챘겠지만, 관찰 2.2 와 정리 2.3 의 증명은 앞 제 1 절의 관찰 1.2 와 정리 1.5 의 증명과 몇 글자만 다르고 거의 같다. 일단 eigen-value 의 존재만 보장된다면(명제 2.1) — 요령을 좀 부려서 — 제 1 절과 제 2 절을 하나로 묶을 수도 있을 것이다.

그러나, 한 가지 조심할 점은 complex symmetric matrix 는 대각화가 불가능할 수도 있다는 것이다. 왜냐하면, $F = \mathbb{C}$ 일 때, real symmetric matrix 에 대응하는 개념은 self-adjoint matrix 이기 때문이다(self-adjoint matrix 는 물론 normal). 또 real normal matrix — 예를 들어, real skew-symmetric matrix — 도 $\mathbb{R}$-위에서 대각화가 불가능할 수 있다. (“대수학 강의 홈페이지”의 [참고 및 추가, §15.3: 주의 추가] 참조.)

제 3 절 Real Orthogonal Matrix

version 150824

이 節에서는 항상 $F = \mathbb{R}$ 이고, $\mathbb{R}^n$ 에는 **dot product** $\langle\ ,\ \rangle$ 가 주어져 있다고 가정하고, real orthogonal matrix 의 Spectral Theorem 을 공부한다.

그러나, 예를 들어, $\mathbb{R}^2$ 의 rotation 만 하더라도 대각화가 불가능한 것을 우리는 잘 알고 있다. 따라서, real orthogonal matrix 의 Spectral Theorem 에서는 대각화는 포기할 수밖에 없다. 우리의 목표는 real orthogonal matrix 를 size 가 2 이하인 diagonal block 들로 decompose 하는 것이다.[4]

다음 명제는 real number field $\mathbb{R}$ 의 중요한 특성 중 하나이다.

명제 3.1 만약 $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ 이면, $[\dim W = 1$ 혹은 $\dim W = 2]$ 인 $\mathbb{R}^n$ 의 A-invariant subspace W 가 존재한다.

증명 : A 의 minimal polynomial $m_A(t)$ 의 $\mathbb{R}[t]$ 에서의 소인수분해

$$m_A(t) = p_1(t) \cdots p_s(t)$$

를 생각하자(단, $p_i(t)$ 는 monic irreducible polynomial). 그러면, $p_1(A)X = 0$ 인 $0 \neq X \in \mathbb{R}^n$ 이 존재한다. 왜냐하면, (만약 $s = 1$ 이면 설명이 필요 없고) 만약 $s \geq 2$ 이면, $p_2(A) \cdots p_s(A)Y \neq 0$ 인 $Y \in \mathbb{R}^n$ 이 존재하기 때문이다(왜 그런가?). (물론 이때 $X = p_2(A) \cdots p_s(A)Y$ 로 놓는다.) 그런데, [I, 보기 8.1.3] 에 의해, 우리는 $p_1(t)$ 가 1-**차식이거나** 2-**차식**임을 잘 알고 있다.[5] 이제, $W = \langle X, AX \rangle$ 로 놓으면, W 는 $\mathbb{R}^n$ 의 A-invariant subspace 가 된다. 왜냐하면, 만약 $p_1(t) = t + c$ 이면(단, $c \in \mathbb{R}$), $Av = -cv$ 이기 때문이다. 그리고, 만약 $p_1(t) = t^2 + at + b$ 라면(단, $a, b \in \mathbb{R}$), $A^2v = -aAv - bv$ 이므로, 이번에도 W 는 A-invariant subspace 가 된다. □

Real orthogonal matrix 의 Spectral Theorem 은 [I, 따름정리 15.4.3] 과 마찬가지로 그 full proof 를 타자 치고 싶지는 않다. 독자들은 먼저 [I, 따름정리 15.4.3] 의 증명을 다시 읽어 보기 바란다.[6]

---

[4] 대각화는 size 가 1 인 diagonal block 들로 decompose 하는 것이다.

[5] 명제 3.1 의 증명은 여러 가지가 알려져 있지만, 그중에서 $\mathbb{R}$ 의 특성(즉, [I, 보기 8.1.3])이 가장 잘 드러나는 증명을 선택하였다.

[6] [I, 정리 9.6.4] 의 (첫 번째) 증명과 [I, 연습문제 9.6.8] 도 도움이 될 것이다.

정리 3.2 (Spectral Theorem for $\mathbf{O}(n)$) $A \in \mathbf{O}(n)$ 이면, 다음과 같은 $U \in \mathbf{O}(n)$ 과 $A_i \in \mathbf{SO}(2)$ 가 존재한다:

$[A \in \mathbf{SO}(n),\ n = 2m$ case$]$: $U^{-1}AU = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_m)$.
$[A \in \mathbf{SO}(n),\ n = 2m+1$ case$]$: $U^{-1}AU = \mathrm{diag}(1, A_1, \ldots, A_m)$.

$[A \notin \mathbf{SO}(n),\ n = 2m$ case$]$: $U^{-1}AU = \mathrm{diag}(-1, 1, A_1, \ldots, A_{m-1})$.
$[A \notin \mathbf{SO}(n),\ n = 2m+1$ case$]$: $U^{-1}AU = \mathrm{diag}(-1, A_1, \ldots, A_m)$.

증명 : (i) 이번에도 **matrix size n 에 관한 귀납법**을 사용한다. 우선 $n = 1$ 이면 증명할 것이 없고, $n = 2$ 인 경우는 다음 두 fact

(a) [I, 정리 9.5.7]: 만약 $A \in \mathbf{O}(2) - \mathbf{SO}(2)$ 이면, A 는 reflection,

(b) reflection 을 만났을 때의 '사고방식'([I, §9.4]): 만약 A 가 reflection 이면 $U^{-1}AU = \mathrm{diag}(-1, 1)$ 인 $U \in \mathbf{O}(2)$ 존재

로부터 자명하다. 이제 $n \geq 3$ 이라고 가정하자.
(ii) $[\dim W = 1$ 혹은 $\dim W = 2]$ 인 $\mathbb{R}^n$ 의 A-invariant subspace W 가 존재한다(명제 3.1). 그리고 W 의 orthonormal basis 를 확장해 $\mathbb{R}^n$ 의 orthonormal basis $\mathfrak{B}$ 를 찾는다(Gram-Schmidt Orthogonalization). 이제, $U_0 = [I]^{\mathfrak{B}}_{\mathcal{E}} \in \mathbf{O}(n)$ 으로 표기하면, W 는 A-invariant 이므로, L_A 의 행렬 표현 $[L_A]^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}$ 는

$$[L_A]^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}} = U_0^{-1}AU_0 = \left(\begin{array}{c|c} A_0 & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \in \mathbf{O}(n)$$

의 형태가 된다. 이때 A_0 는 (1×1)-matrix 또는 (2×2)-matrix 이다. 한편 $[L_A]^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}} \in \mathbf{O}(n)$ 이기 위해서는 — 특별히, 첫 두 column 이 $\mathbb{R}^n$ 의 orthonormal basis 의 일부가 되려면 — $A_0 \in \mathbf{O}(2)$ 일 수밖에 없다.
(iii) 이번에도 증명의 point 는 $C = 0$ 임을 보이는 것이다.[7] 이제 $U_0{}^{\mathbf{t}} = U_0^{-1}$ 이고 $A^{\mathbf{t}} = A^{-1}$, $A_0{}^{\mathbf{t}} = A_0^{-1}$ 이므로,

$$\left(\begin{array}{c|c} A_0{}^{\mathbf{t}} & 0 \\ \hline C^{\mathbf{t}} & B^{\mathbf{t}} \end{array}\right) = (U_0^{-1}AU_0)^{\mathbf{t}} = (U_0^{-1}AU_0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A_0^{-1} & -A_0^{-1}CB^{-1} \\ \hline 0 & B^{-1} \end{array}\right)$$

가 된다.[8] 따라서 $C = 0$ 이고, $B \in \mathbf{O}(n-1)$ 또는 $B \in \mathbf{O}(n-2)$ 임을 알 수 있다. 이제 real orthogonal matrix B 에 **induction hypothesis** 를 적용할 수 있다.

[7] 만약 A_0 가 (1×1)-matrix 라면, $C = 0$ 임은 거의 자명하다. 그렇지만, A_0 가 (2×2)-matrix 인 경우에는 설명이 더 필요하다.
[8] [I, 연습문제 2.3.14] 참조.

(iv) 저자의 노동(typewriting)은 이 정도로 끝! 증명의 마무리는 독자들의 몫이다.[9] (정리의 statement의 네 가지 경우의 행렬 B에 대해, 행렬 A_0의 size 두 가지와 $\det(A_0)$ 두 가지를 모두 고려하면 총 16-가지 경우를 생각해야 한다.) 증명의 마무리에는 다음 두 fact

(c) [I, 보기 6.2.24] 및 [I, 관찰 6.2.19(다)]: diagonal block의 순서를 바꾸어 주는 transition matrix는 permutation matrix이고, permutation matrix는 orthogonal matrix,

(d) 당연히 $I_2 \in \mathbf{SO}(2)$이고, $-I_2 = R_\pi \in \mathbf{SO}(2)$

가 필요할 것이다. □

$\mathbf{O}(n)$의 Spectral Theorem에 2-dimensional invariant subspace가 등장하는 것은 필연적이다. 왜냐하면, 예를 들어, $n = 4$인 경우에 $\mathrm{diag}(R_\theta, R_\eta)$는 $\mathbb{R}$-위에서 eigen-value를 하나도 갖지 않기 때문이다(단, $R_\theta \neq I_2 \neq R_\eta$).

$\mathbf{SO}(n)$의 Spectral Theorem은 [I, 따름정리 15.4.6]을 참조하기 바란다. (또 Spectral Theorem들의 의미와 응용도 [I] 참조.)

[9] 대부분의 독자들도 이미 사실상 증명이 끝났다는 데에 동의할 것이다.