적분으로 정의된 함수

명제 0.0.1. 연속함수 $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ 에 대하여 함수

$$\phi(x) = \int_c^d f(x,t)dt, \qquad x \in [a,b] \tag{1}$$

이라 정의하면 다음이 성립한다.

(가) 함수 ϕ 는 $[a,b]$ 위에서 연속이다.

(나) 만일 편도함수 $D_1 f$ 가 $(a,b)\times[c,d]$ 위에서 존재하고 연속이면, ϕ 는 (a,b) 위에서 미분가능하고 등식

$$\phi'(x) = \int_c^d D_1 f(x,t)dt, \qquad x \in (a,b)$$

이 성립한다.

증명: 함수 f 가 옹골집합 $[a,b]\times[c,d]$ 위에서 연속이므로, f 는 고른연속함수가 된다. 따라서, 임의의 양수 $\epsilon > 0$ 에 대하여 다음

$$|x-y| < \delta,\ t \in [c,d] \implies |f(x,t) - f(y,t)| < \frac{\epsilon}{d-c}$$

을 만족하는 양수 $\delta > 0$ 을 잡을 수 있다. 만일 $|x-y| < \delta$ 이면

$$|\phi(x) - \phi(y)| \le \int_c^d |f(x,t) - f(y,t)| < \epsilon$$

이므로 (가) 가 증명되었다. 이제 (나) 를 보이기 위하여 연속함수 $D_1 f$ 에 미적분학의 기본정리를 적용하면

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(\phi(x+h) - \phi(x)) &= \frac{1}{h}\int_c^d [f(x+h,t) - f(x,t)]dt \\ &= \frac{1}{h}\int_c^d \int_x^{x+h} D_1 f(z,t)dz\,dt\end{aligned}$$

가 성립한다. 그런데 $D_1 f$ 가 $x \in (a,b)$ 에서 연속이므로, 다음

$$|z-x| < \delta,\ t \in [c,d] \implies |D_1 f(z,t) - D_1 f(x,t)| < \frac{\epsilon}{d-c}$$

이 성립하는 양수 $\delta > 0$ 을 잡을 수 있다. 만일 $0 < h < \delta$ 이면

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} - \int_c^d D_1 f(x,t) dt \right| \\
&\qquad = \left| \int_c^d \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [D_1 f(z,t) - D_1 f(x,t)] dz\, dt \right| \\
&\qquad \le \int_c^d \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |D_1 f(z,t) - D_1 f(x,t)| dz\, dt = \epsilon
\end{aligned}$$

이 성립한다. 물론 $-\delta < h < 0$ 인 경우도 마찬가지이다. □

여기서부터 특이적분에 대한 사전지식이 있는 것으로 간주한다. 특히, 특이적분의 비교판정법에 대하여 아는 것으로 간주한다.

명제 0.0.2. 만일 $|f| \le g$ 이고 특이적분 $\int_a^b g$ 가 수렴하면 특이적분 $\int_a^b f$ 도 수렴하고, 이 때 부등식

$$\left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b g$$

이 성립한다.

다음 정리에서 주어진 적분들은 구간 $[c,d)$ 위에서 특이적분이고, 구간 $[c,d)$ 가 유계구간이거나 그렇지 않은 경우나 마찬가지로 성립한다.

정리 0.0.3. 연속함수 $f : [a,b] \times [c,d) \to \mathbb{R}$ 이 주어져 있다. 만일 다음 두 조건

(가) 각 $(x,t) \in [a,b] \times [c,d)$ 에 대하여 $|f(x,t)| \le g(t)$ 이다,
(나) 특이적분 $\int_c^d g$ 가 수렴한다

을 만족하는 함수 $g : [c,d) \to \mathbb{R}$ 가 존재하면, 특이적분 (1) 이 각 $x \in [a,b]$ 에 대하여 수렴하고, $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ 가 연속함수이다.

증명: 특이적분 (1) 의 수렴성은 비교판정법에서 바로 나온다. 이제 함수 ϕ 의 연속성을 보이기 위하여, d 로 수렴하는 수열 $\langle d_n \rangle$ 을 $[c, d)$ 안에서 잡고 각 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여

$$\phi_n(x) = \int_c^{d_n} f(x,t)dt, \qquad x \in [a,b] \tag{2}$$

라 정의하자. 그러면 명제 0.0.1 에 의하여 각 ϕ_n 은 연속함수이다. 따라서, 함수열 $\langle \phi_n \rangle$ 이 함수 ϕ 로 고르게 수렴함을 증명하면 정리 6.1.1 에 의하여 증명이 끝난다. 그런데 특이적분 $\displaystyle\int_c^d g$ 가 수렴하므로, 임의의 양수 $\epsilon > 0$ 에 대하여 다음

$$n \geq N \implies \int_{d_n}^d g < \epsilon$$

이 성립하는 자연수 N 을 잡을 수 있다. 만일 $n \geq N$ 이면, 임의의 $x \in [a,b]$ 에 대하여

$$|\phi_n(x) - \phi(x)| \leq \int_{d_n}^d |f(x,t)|dt \leq \int_{d_n}^d g(t)dt < \epsilon$$

이 되고, 따라서 $\langle \phi_n \rangle$ 은 ϕ 로 고르게 수렴한다. □

보기 1. 각 $x \in (0, \infty)$ 에 대하여

$$\phi(x) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin t}{t} dt \tag{3}$$

라 정의하자. 정리 0.0.3 을 적용하기 위하여 $(0, \infty)$ 안의 유계닫힌구간 $[a,b]$ 를 고정하자. 그러면 $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leq 1$ 이므로 $g(t) = e^{-at}$ 라 둠으로써 정리의 가정이 충족된다. 그러면, 함수 ϕ 는 임의의 유계구간 $[a,b]$ 에서 연속이고, 따라서 $(0, \infty)$ 위에서 연속이다. 이러한 증명 방법은 거듭제곱급수의 연속성이나 미분가능성을 증명할 때에도 사용한 바 있다. 한편, 각 $x > 0$ 에 대하여

$$|\phi(x)| \leq \int_0^\infty e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$$

이므로 $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = 0$ 임을 알 수 있다. □

정리 0.0.4. 연속함수 $f : [a,b] \times [c,d) \to \mathbb{R}$ 에 대하여 편도함수 $D_1 f$ 가 $(a,b) \times [c,d)$ 위에서 존재하고 연속이며, 적당한 $x_0 \in (a,b)$ 에 대하여 특이적분 $\int_c^d f(x_0,t)dt$ 가 수렴한다고 가정하자. 만일 다음 두 조건

(가) 각 $(x,t) \in (a,b) \times [c,d)$ 에 대하여 $|D_1 f(x,t)| \leq h(t)$ 이다,

(나) 특이적분 $\int_c^d h$ 가 수렴한다

을 만족하는 함수 $h : [c,d) \to \mathbb{R}$ 가 존재하면, 특이적분 (1) 이 각 $x \in [a,b]$ 에 대하여 수렴하고, $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ 가 미분가능함수이다. 또한, 등식

$$\phi'(x) = \int_c^d D_1 f(x,t)dt, \qquad x \in (a,b)$$

이 성립한다.

증명: 점 d 로 수렴하는 증가수열 $\langle d_n \rangle$ 을 $[c,d)$ 안에서 잡고 정리 0.0.3 의 증명과 마찬가지로 각 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 함수 ϕ_n 을 (2) 과 같이 정의한다. 정리 6.3.1 과 명제 0.0.1 (나) 를 고려하면 함수열 $\langle \phi_n' \rangle$ 이 고르게 수렴함을 증명하면 된다. 우선 특이적분 $\int_c^d h$ 가 수렴하므로, 임의의 양수 $\epsilon > 0$ 에 대하여 다음

$$m \geq n \geq N \implies \int_{d_n}^{d_m} h < \epsilon$$

이 성립하는 자연수 N 을 잡을 수 있다. 만일 $m \geq n \geq N$ 이면, 임의의 $x \in (a,b)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} |\phi_n'(x) - \phi_m'(x)| &= \left| \int_c^{d_n} D_1 f(x,t)dt - \int_c^{d_m} D_1 f(x,t)dt \right| \\ &\leq \int_{d_n}^{d_m} h(t)dt < \epsilon \end{aligned}$$

이 성립하므로, 함수열 $\langle \phi_n' \rangle$ 은 고르게 수렴한다. □

보기 2. 보기 1 에서 정의한 함수 ϕ 의 도함수를 구하려 하는데, 이번에도 구간 $[a,b]$ 위에서 생각하면, 정리 0.0.4 의 가정이 모두 충족됨을 알 수

있다. 따라서,

$$\phi'(x) = -\int_0^\infty e^{-tx} \sin t dt = -\frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in (0, \infty)$$

임을 알 수 있다. 여기서 둘째 등식은 부분적분을 이용하여 바로 계산할 수 있다. 그런데, $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$ 이므로

$$\phi(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x, \qquad x \in (0, \infty) \tag{4}$$

임을 알 수 있다.

끝으로 삼각급수와 푸리에급수에서 자주 사용하게 될 특이적분

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x}$$

의 값을 구해보자. 우선 이 특이적분의 극한값이 존재한다는 것은 쉽게 보일 수 있다. 먼저 등식

$$\int_0^\infty (e^{-tx} - 1)\frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^1 (e^{-tx} - 1)\frac{\sin t}{t}\, dt + \int_1^\infty (e^{-tx} - 1)\frac{\sin t}{t}\, dt$$

을 주목하자. 만일 0 으로 수렴하는 양수열 $\langle x_n \rangle$ 을 잡고 $f_n(t) = e^{-tx_n}$ 이라 두면 $\langle f_n \rangle$ 은 구간 $[0, 1]$ 위에서 상수함수 1 로 고르게 수렴한다. 따라서, 명제 6.3.2 에 의하여 $\lim_{x\to 0} \int_0^1 (e^{-tx} - 1)\frac{\sin t}{t}\, dt = 0$ 임을 알 수 있다. 둘째 항의 극한을 구하기 위하여, 함수 $t \mapsto \dfrac{e^{-tx} - 1}{t}$ 를 미분하고 $t \mapsto \sin t$ 를 적분하여 부분적분하면

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty (e^{-tx} - 1)\frac{\sin t}{t}\, dt \\
&\qquad = (e^{-x} - 1)\cos 1 - \int_1^\infty (e^{-tx} - 1)\frac{\cos t}{t^2}\, dt - x\int_1^\infty e^{-tx}\frac{\cos t}{t}\, dt
\end{aligned}$$

를 얻는다. 다시 한 번 함수 $t \mapsto \dfrac{e^{-tx}}{t}$ 와 $t \mapsto \cos t$ 를 각각 미분과 적분하여 부분적분하면

$$\int_1^\infty e^{-tx}\frac{\cos t}{t}\, dt = -e^{-x}\sin 1 + x\int_1^\infty e^{-tx}\frac{\sin t}{t}\, dt + \int_1^\infty e^{-tx}\frac{\sin t}{t^2}\, dt$$

가 되므로, 이는 x 에 관한 유계함수임을 알 수 있다. 한편 $\int_A^\infty \frac{2}{t^2}\,dt < \epsilon$ 인 양수 A 를 잡고 $\alpha(x,t) = (e^{-tx}-1)\frac{\cos t}{t^2}$ 라 두면

$$\begin{aligned}\left|\int_1^\infty (e^{-tx}-1)\frac{\cos t}{t^2}\,dt\right| &\le \left|\int_1^A \alpha(x,t)\,dt\right| + \left|\int_A^\infty \alpha(x,t)\,dt\right| \\ &\le \left|\int_1^A \alpha(x,t)\,dt\right| + \left|\int_A^\infty \frac{2}{t^2}\,dt\right| \\ &\le \left|\int_1^A (e^{-tx}-1)\frac{\cos t}{t^2}\,dt\right| + \epsilon\end{aligned}$$

이 되는데, 앞에서 본 바와 같이 $\lim_{x\to 0} e^{-tx} = 1$ 는 유계구간 $[1, A]$ 위에서 고르게 수렴한다. 이상에서 살펴본 바를 종합하면

$$\lim_{x\to 0}\int_1^\infty (e^{-tx}-1)\frac{\sin t}{t}\,dt = 0$$

임을 알 수 있고, 따라서 (4) 를 적용하여 다음 등식

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \lim_{x\to 0}\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

을 얻는다. □