제 1 장 기본 개념

2002년 1학기

집합과 수리논리
강의록 제 1 장

서울대학교 수학과
계승혁

2002년 3월 3일 게시
2002년 7월 8일 수정
1쪽∼31쪽

이 장에서는 집합론 나아가서 모든 분야의 수학에서 기본이 되는 몇 가지 개념을 소개한다. 이미 알고 있는 합집합, 교집합, 차집합 등 집합의 기본적인 연산부터 시작하여, 전단사함수와 역함수의 성질과 여러 가지 예를 공부한다. 특히, 함수의 개념을 이용하여 임의의 집합족에 대한 곱집합을 정의한다. 수학에서 가장 기본되는 개념은 '같다', '크다', '작다' 등이다. 이 중 '같다'라는 개념을 보다 엄밀하게 설명하는 것이 동치관계인데 이를 분할과 관련하여 1.3 절에서 공부하고, 이어서 순서관계의 기본을 1.4 절에서 공부한다. 이러한 동치관계와 순서관계는 다음 장에서 자연수로부터 정수, 유리수, 실수를 구성할 때에 필수적인 도구이다.

1.1. 집합과 연산

두 집합 A 와 B 가 다음

$$x \in A \iff x \in B$$

을 만족할 때 $A = B$ 라 한다. 또한, 다음

$$x \in A \implies x \in B$$

을 만족할 때 $A \subset B$ 라 쓰고, A 를 B 의 부분집합이라 부른다. 만일 $A \neq B$ 이면서 $A \subset B$ 이면, A 를 B 의 진부분집합이라 부른다.

두 집합 A, B 에 대하여 그 **합집합** $A \cup B$ 를

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 또는 } x \in B\}$$

라 정의한다. 이는

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ 또는 } x \in B$$

라 정의하는 것이나 마찬가지이다. 마찬가지로 **교집합** $A \cap B$, **차집합** $A \setminus B$ 를 다음

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ 그리고 } x \in B$$
$$x \in A \setminus B \iff x \in A \text{ 그리고 } x \notin B$$

과 같이 정의한다. 집합을 기술할 때 이미 알고 있는 집합을 상정하고 그 집합의 원소들 가운데 특정 성질을 만족하는 원소들을 모음으로써 집합을 구성하는 경우가 많다. 이와 같이 **전체집합** U 를 가정하고 있는 경우

$$A^c = U \setminus A$$

라 정의하고, A^c 를 A 의 **여집합**이라 부른다. 끝으로 비어 있는 집합, 즉, 아무런 원소도 가지지 않는 집합을 $\emptyset$ 으로 표시하고 이를 **공집합**이라 부른다.

이제 합집합과 교집합의 성질들

$$\begin{aligned}
A \cup \emptyset = A, &\quad A \cap \emptyset = \emptyset \\
A \cup B = B \cup A, &\quad A \cap B = B \cap A \\
A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, &\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\
A \cup A = A, &\quad A \cap A = A \\
A \subset B \iff A \cup B = B, &\quad A \subset B \iff A \cap B = A \\
A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), &\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned} \tag{1}$$

을 열거하여 보자. 예로서 $A \subset B \iff A \cap B = A$ 를 증명하는 것은 다음 두 명제

$$x \in A \implies x \in B$$

$$x \in A \iff x \in A \text{ 그리고 } x \in B$$

가 동치인가 증명하는 것과 마찬가지인데, 더 이상 설명할 필요가 없으리라 여겨진다.

위 성질들은 다음에 열거하는 여집합의 성질들

$$\emptyset^c = U \quad U^c = \emptyset$$

$$A \cup A^c = U, \quad A \cap A^c = \emptyset$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \tag{2}$$

$$(A^c)^c = A$$

$$A \subset B \iff B^c \subset A^c$$

과 함께 집합 연산의 기본이다. 등식 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 를 증명하기 위해서는 다음

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\iff [x \in A \text{ 혹은 } x \in B] \text{ 의 부정} \\ &\iff x \notin A \text{ 그리고 } x \notin B \\ &\iff x \in A^c \text{ 그리고 } x \in B^c \\ &\iff x \in A^c \cap B^c \end{aligned}$$

과 같이 살펴보면 된다.

문제 1.1.1. 위 (1) 과 (2) 에 나오는 등식과 명제들을 증명하여라.

만일 $\{A_1, A_2\} = \{A_i : i \in \{1, 2\}\}$ 이면

$$\begin{aligned} x \in A_1 \cup A_2 &\iff i = 1 \text{ 혹은 } i = 2 \text{ 에 대하여 } x \in A_i \text{ 이다} \\ &\iff x \in A_i \text{ 인 } i \in \{1, 2\} \text{ 가 존재한다} \end{aligned}$$

가 성립함을 알 수 있다. 이를 염두에 두고, 집합족 $\{A_i : i \in I\}$ 의 **합집합** $\bigcup_{i \in I} A_i$ 을 다음

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff x \in A_i \text{ 가 성립하는 } i \in I \text{ 가 존재한다}$$

과 같이 정의한다. 합집합 $\bigcup_{i\in I} A_i$ 을 $\bigcup\{A_i : i \in I\}$ 로 쓰기도 한다. 마찬가지로 **교집합** $\bigcap_{i\in I} A_i$ 을 다음

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \text{임의의 } i \in I \text{ 에 대하여 } x \in A_i \text{ 가 성립한다}$$

과 같이 정의한다. 만일 각 A_i 들이 전체집합 U 안에 들어 있다면 다음

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c, \qquad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c \tag{3}$$

이 성립한다. 구체적으로 살펴보면, 다음

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c &\iff x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \\ &\iff [x \in A_i \text{ 인 } i \in I \text{ 가 존재한다}]\text{의 부정} \\ &\iff \text{임의의 } i \in I \text{ 에 대하여 } x \notin A_i \text{ 이다} \\ &\iff \text{임의의 } i \in I \text{ 에 대하여 } x \in A_i^c \text{ 이다} \\ &\iff x \in \bigcap_{i\in I} A_i^c \end{aligned}$$

과 같이 증명할 수 있다. 물론 집합족의 합집합과 교집합에 관한 분배법칙

$$A \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (A \cap A_i), \qquad A \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (A \cup A_i) \tag{4}$$

도 성립한다.

문제 1.1.2. 등식 (3) 의 두 번째 등식과 (4) 를 증명하여라.

앞으로

$$x \in A_i, \qquad i \in I$$

와 같이 쓰면, 이는

$$\text{임의의 } i \in I \text{ 에 대하여 } x \in A_i \text{ 이다}$$

라는 뜻이다.

보기 1. 각 양수 $r > 0$ 에 대하여

$$A_r = \{x \in \mathbb{R} : x \geq r\}, \qquad r > 0$$

라 두면

$$\bigcup_{r>0} A_r = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

이 된다. 편의상 $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ 라 두면, 각 $r > 0$ 에 대하여 $A_r \subset A$ 이므로 $\bigcup_{r>0} A_r \subset A$ 임은 당연하다. 역으로 $A \subset \bigcup_{r>0} A_r$ 을 증명한다는 것은 다음

$$x > 0 \implies x \geq r \text{ 인 양수 } r > 0\text{가 존재한다}$$

과 마찬가지이다. 그런데 $r = x$ 라 두면 $0 < r \leq x$ 이므로 $A \subset \bigcup_{r>0} A_r$ 이 성립함을 것을 알 수 있고, 따라서 $A = \bigcup_{r>0} A_r$ 임을 알 수 있다. 지금까지 사용한 기호의 뜻을 보다 분명히 하자면 양수 전체의 집합을 P 라 두고 $\bigcup_{r\in P} A_r$ 와 같이 써야 하지만, 관례상 $\bigcup_{r>0} A_r$ 과 같은 기호를 쓴다. □

보기 2. 비슷한 예를 하나 더 들어 보자. 각 자연수 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{n}\right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

라 두면

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

이 된다. 여기서도 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 은 $\bigcup\{A_n : n = 1, 2, \ldots\}$ 과 마찬가지 뜻으로 쓰인다. 위와 마찬가지로 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A$ 임은 당연하다. 역으로 $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 을 증명한다는 것은 다음

$$x > 0 \implies x \geq \frac{1}{n} \text{ 인 자연수 } n = 1, 2, \ldots \text{이 존재한다}$$

혹은

$$y > 0 \implies y \le n \text{ 인 자연수 } n = 1, 2, \ldots \text{ 이 존재한다}$$

와 마찬가지이다. 이 명제는 당연한 듯이 보이지만 그리 간단한 것은 아니다.(1) □

만일 집합족 $\{A_i : i \in I\}$ 이 다음 성질

$$i, j \in I,\ i \ne j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

을 만족하면 **서로소**인 집합족이라 하고, 이 때 그 합집합을 $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ 로 표시한다.

두 원소 a, b 로 이루어진 집합 $\{a, b\}$ 에는 순서가 없다. 즉, $\{a, b\} = \{b, a\}$ 이다. 두 원소 a, b 의 **순서쌍** (a, b) 를 다음

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

과 같이 정의한다.

정리 1.1.1. 만일 $(a, b) = (c, d)$ 이면 $a = c$ 및 $b = d$ 가 성립한다.

증명: 먼저 $a = b$ 인 경우를 생각하자. 이 경우

$$\{\{a\}\} = (a, b) = (c, d) = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

로부터 $\{a\} = \{c\} = \{c, d\}$ 이므로, $a = b = c = d$ 가 성립한다. 이제 $a \ne b$ 라 가정하자. 그러면 $\{a, b\}$ 는 두 원소의 집합이므로

$$\{c\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\}, \qquad \{c\} \ne \{a, b\}$$

임을 알 수 있다. 따라서, $\{c\} = \{a\}$ 및 $a = c$ 가 성립한다. 마찬가지로

$$\{a, b\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}, \qquad \{a, b\} \ne \{c\}$$

(1) 정리 2.3.3 및 정리 2.6.1 을 참조하라.

로부터 $\{a,b\} = \{c,d\}$ 가 성립한다. 따라서, $b \in \{c,d\}$ 로부터 $b = c$ 혹은 $b = d$ 이다. 그런데, $b = c$ 이면 $a = c = b$ 이므로 $a \neq b$ 라는 가정에 모순이다. 따라서 $b = d$ 가 성립함을 알 수 있다. □

두 집합 A, B 의 **곱집합** $A \times B$ 는

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$$

로 정의한다. 다음 공식들

$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\ A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C) \\ (A \times B) \cap (C \times D) &= (A \cap C) \times (B \cap D) \end{aligned} \tag{5}$$

은 바로 증명할 수 있다.

문제 1.1.3. (5) 에 나오는 등식들을 증명하여라.

문제 1.1.4. 집합족 $\{A_i : i \in I\}$ 과 $\{B_j : j \in J\}$ 에 대하여 다음 등식들

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) &= \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j) \\ \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) &= \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j) \end{aligned}$$

을 증명하여라.

1.2. 함수

두 집합 X, Y 의 곱집합 $X \times Y$ 의 부분집합 $f \subset X \times Y$ 가 다음 두 가지 성질

(함1) $x \in X \implies (x,y) \in f$ 를 만족하는 $y \in Y$ 가 존재한다,

(함2) $(x, y_1) \in f,\ (x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2$

을 만족하면 이를 X 에서 Y 로 가는 **함수**라 하고, $(x, y) \in f$ 일 때 $f(x) = y$ 혹은 $f : x \mapsto y$ 라 쓴다. 이 때, X 를 이 함수의 **변역**, Y 를 f 의 **공역**이라 하고, 이를 $f : X \to Y$ 로 쓴다. 특히,

$$f : x \mapsto y : X \to Y$$

는 $f : X \to Y$ 가 함수이고, $(x, y) \in f$ 라는 의미로 쓴다. 물론, y 는 x 에 의하여 결정되는 Y 의 원소이다. 함수 $f : X \to Y$ 는 변역 X, 공역 Y 및 $X \times Y$ 부분집합 f 로 이루어져 있으므로, '함수'라는 용어를 사용하려면 이 세 가지를 같이 말해 주어야 한다. 특히, 두 함수 $f : X \to Y$ 와 $g : Z \to W$ 가 '같다'라는 말을 하려면 우선 $X = Z$ 와 $Y = W$ 가 성립해야 한다. 물론, 변역과 공역이 분명할 때에는 이를 생략하고 '함수'라는 용어를 사용하기도 한다. 경우에 따라서, '사상', '변환' 등의 용어를 사용하기도 하는데 모두 함수와 같은 뜻이다. 집합 X 에 대하여 $\{(x_1, x_2) \in X \times X : x_1 = x_2\}$ 로 주어진 함수를 **항등함수**라 부르고 $1_X : X \to X$ 라고 쓴다. 즉,

$$1_X(x) = x, \qquad x \in X$$

이다. 또한, $A \subset X$ 일 때, $\{(a, a) \in A \times X : a \in A\}$ 로 주어진 함수를 **포함함수**라 하고, $\iota_A : A \hookrightarrow X$ 라 쓴다. 즉,

$$\iota_A(a) = a, \qquad a \in A$$

이다.

정리 1.2.1. 두 함수 $f : X \to Y$ 와 $g : X \to Y$ 가 같은 함수일 필요충분조건은

$$f(x) = g(x), \qquad x \in X$$

이다.

증명: 먼저 $f = g$ 이면, 임의의 $x \in X$ 에 대하여

$$y = f(x) \iff (x, y) \in f \iff (x, y) \in g \iff y = g(x)$$

가 성립하므로 $f(x) = g(x)$ 임을 알 수 있다. 역으로, 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $f(x) = g(x)$ 이면,

$$(x, y) \in f \iff y = f(x) \iff y = g(x) \iff (x, y) \in g$$

가 성립하여 $f = g$ 이다. □

함수 $f : X \to Y$ 와 $g : Y \to Z$ 에 대하여 그 **합성함수** $g \circ f : X \to Z$ 를 다음

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad x \in X \tag{6}$$

과 같이 정의한다. 만일 f 와 g 를 각각 $X \times Y$ 와 $Y \times Z$ 의 부분집합으로 이해한다면

$$g \circ f = \{(x, z) \in X \times Z : (x, y) \in f,\ (y, z) \in g \text{ 인 } y \in Y \text{ 가 존재한다}\} \tag{7}$$

와 같이 정의된다. 세 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ 에 대하여 다음 등식

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \tag{8}$$

이 성립함은 바로 확인된다. 함수 $f : X \to Y$ 의 변역 X 의 부분집합 A 가 주어졌을 때, 합성함수 $f \circ \iota_A : A \to Y$ 를 f 의 **제한**이라 하는데, 이를 $f|_A : A \to Y$ 로 쓰기도 한다.

문제 1.2.1. 두 정의 (6) 과 (7) 이 같은 정의임을 보여라. 또한, $g \circ f \subset X \times Z$ 가 함수임을 보여라.

문제 1.2.2. 등식 (8) 을 증명하여라.

함수 $f : X \to Y$ 가 다음 성질

$$x_1, x_2 \in X,\ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

을 만족하면 이를 **단사함수**라고 부른다. 항등함수 및 포함함수는 단사함수이다. 또한 단사함수 $f : X \to Y$ 의 변역 X 의 부분집합 A 가 있을 때, f 의 제한 $f|_A$ 은 당연히 단사함수이다.

정리 1.2.2. 함수 $f : X \to Y$ 에 대하여 다음은 동치이다.

(가) f 는 단사함수이다.
(나) $g \circ f = 1_X$ 를 만족하는 함수 $g : Y \to X$ 가 존재한다.

증명: 먼저 $g \circ f = 1_X$ 를 만족하는 g 가 있으면

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) = x_2$$

이므로 f 가 단사함수이다. 그 역을 보이기 위하여

$$B = \{y \in Y : f(x) = y \text{ 를 만족하는 } x \in X \text{ 가 존재한다}\}$$

라 두자. 만일 $y \in B$ 이면 $f(x) = y$ 를 만족하는 $x \in X$ 가 유일하게 존재하는데 $g(y) = x$ 라 정의하고, $y \notin B$ 이면 $g(y)$ 는 아무렇게나 정의한다. 예를 들면 X 의 한 원소 $x_0 \in X$ 를 고정하고

$$g(y) = \begin{cases} x, & y \in B,\ y = f(x), \\ x_0, & y \notin B \end{cases}$$

라 정의하면 $g \circ f = 1_X$ 임이 바로 확인된다. □

함수 $f : X \to Y$ 가 다음 성질

$$\text{임의의 } y \in Y \text{ 에 대하여 } f(x) = y \text{ 를 만족하는 } x \in X \text{ 가 존재한다} \quad (9)$$

을 만족하면 이를 **전사함수**라 부른다. 함수 $f : X \to Y$ 가 전사이면서 동시에 단사이면 이를 **전단사함수**라 부른다. 항등함수는 물론 전단사함수이다.

정리 1.2.3. 함수 $f : X \to Y$ 에 대하여 다음은 동치이다.

(가) f 는 전사함수이다.
(나) $f \circ g = 1_Y$ 를 만족하는 함수 $g : Y \to X$ 가 존재한다.

증명: 먼저 $f \circ g = 1_Y$ 를 만족하는 함수 $g : Y \to X$ 가 존재한다고 가정하자. 각 $y \in Y$ 에 대하여 $x = g(y)$ 라 두면 $f(x) = f(g(y)) = y$ 이므로 (9) 가 성립하고, 따라서 f 는 전사함수이다. 그 역을 보이기 위하여 각 $y \in Y$ 에 대하여 $A_y = \{x \in X : f(x) = y\}$ 라 두면 A_y 는 공집합이 아니다. 각 $y \in Y$ 에 대하여 A_y 의 원소를 하나 택하여[(2)] 이를 $g(y) \in X$ 라 두면 $f(g(y)) = y$ 임이 자명하다. □

함수 $f : X \to Y$ 에 대하여 다음

$$g \circ f = 1_X, \qquad f \circ g = 1_Y$$

을 만족하는 함수 $g : Y \to X$ 가 존재하면 이를 f 의 **역함수**라 한다. 만일 함수 f 의 역함수가 존재한다면 유일하다. 실제로, g 와 h 가 동시에 f 의 역함수라면

$$g = 1_X \circ g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) = h \circ 1_Y = h \tag{10}$$

가 된다. 함수 $f : X \to Y$ 의 역함수를 $f^{-1} : Y \to X$ 로 표시하기도 한다. 만일 함수 $f : X \to Y$ 가 역함수를 가지면 정리 1.2.2 와 정리 1.2.3 에 의하여 f 는 전단사함수이다. 역으로, $f : X \to Y$ 가 전단사함수이면 $h \circ f = 1_X$ 인 $h : Y \to X$ 와 $f \circ g = 1_Y$ 인 $g : Y \to X$ 가 존재하는데, (10) 에 의하여 $g = h$ 이고 이는 f 의 역함수가 된다. 따라서, 다음 정리를 얻는다.

정리 1.2.4. 함수 $f : X \to Y$ 에 대하여 다음은 동치이다.

---

(2) 이러한 원소를 하나씩 택하는 것이 가능한가 하는 문제는 좀 더 신중한 접근을 요한다. 뒤에 이를 가능하다고 가정하는 것이 바로 "선택공리"임을 배우게 된다.

(가) f 는 전단사함수이다.

(나) f 가 역함수를 가진다.

문제 1.2.3. 두 함수 $f : X \to Y$ 와 $g : Y \to Z$ 에 대하여 다음을 증명하여라.

(가) f 와 g 가 단사이면 $g \circ f$ 가 단사이다. 역으로, $g \circ f$ 가 단사이면 f 가 단사이다.

(나) f 와 g 가 전사이면 $g \circ f$ 가 전사이다. 역으로, $g \circ f$ 가 전사이면 g 가 전사이다.

(다) f 와 g 가 전단사이면 $g \circ f$ 가 전단사이고, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 이다.

따름정리 1.2.5. 두 집합 X 와 Y 에 대하여 다음은 동치이다.

(가) 단사함수 $f : X \to Y$ 가 존재한다.

(나) 전사함수 $g : Y \to X$ 가 존재한다.

문제 1.2.4. 따름정리 1.2.5 를 증명하여라.

보기 1. 각 자연수 $n = 0, 1, 2, \dots$ 에 대하여

$$f(2n) = -n, \qquad f(2n-1) = n$$

이라 정의하면 f 는 자연수 전체의 집합(3) $\mathbb{N}$ 에서 정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$ 로 가는 함수가 된다. 만일

$$g(n) = 2n-1, \quad g(-n) = 2n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

라 정의하면 g 는 $\mathbb{Z}$ 에서 $\mathbb{N}$ 으로 가는 함수가 되고 f 와 g 는 서로 역함수관계이다. □

문제 1.2.5. 보기 1 에 나오는 $f(n)$ 이 n 번째 정수가 되도록 정수 전체를 나열하여라.

---

(3) 자연수, 정수, 유리수, 실수에 대해서는 다음 장에서 자세히 공부한다. 그러나, 여러 가지 예를 드는 경우 어릴 때부터 알고 있는 여러 가지 수의 성질들은 아는 것으로 간주한다. 특히, 0 은 자연수로 취급한다. 따라서, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ 이다.

보기 2. 양의 유리수 전체의 집합 $\mathbb{Q}^+$ 를 다음

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \cdots$$

과 같이 늘어 놓자. 여기서 n 번째 나오는 유리수를 $f(n)$ 이라 두면 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ 는 전사함수가 된다. 만일 중복해서 나오는 유리수를 없애고

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{5}{1}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \cdots$$

등과 같이 늘어놓은 후 n 번째 나오는 수를 $g(n)$ 이라 두면 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ 라 두면 g 는 전단사함수가 된다. □

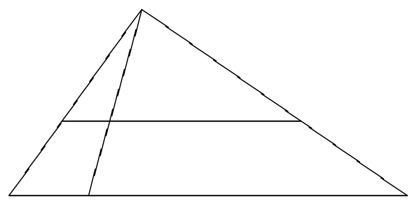
보기 3. 구간 $[0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ 의 원소를 십진법으로 표현하되 9 가 계속 나오는 것을 피한다. 함수 $f : [0, 1) \times [0, 1) \to [0, 1)$ 를 다음

$$f : (0.a_0a_1a_2 \ldots, 0.b_0b_1b_2 \ldots) \mapsto 0.a_0b_0a_1b_1a_2b_2 \ldots$$

과 같이 정의하면 단사함수이다. 즉, $[0, 1) \times [0, 1)$ 에 있는 모든 점들을 구간 $[0, 1)$ 안에 '넣을' 수 있다. 그러나, 주의할 점으로서 $0.090909\ldots$ 같은 원소는 f 의 상에 들어가지 않는다. 물론 $[0, 1)$ 에서 $[0, 1) \times [0, 1)$ 로 가는 단사함수는 쉽게 만들 수 있다. 일반적으로, 집합 X 에서 Y 로 가는 단사함수와 집합 Y 에서 X 로 가는 단사함수가 동시에 존재하면, X 에서 Y 로 가는 전단사함수가 존재한다.(4) □

보기 4. 길이가 같은 선분 사이에 전단사함수가 존재함은 자명하다. 그런데, 길이가 다르더라도 임의의 두 선분 사이에 전단사함수를 정의할 수 있다. 두 선분 $\overline{AB}$ 와 $\overline{CD}$ 를 나란히 놓고 $\overline{AC}$ 와 $\overline{CD}$ 의 연장선이 만나는 점을 O 라 두자. 선분 $\overline{AB}$ 위에 있는 점 P 에 대하여 $\overline{OP}$ 의 연장선이 $\overline{CD}$ 와 만나는 점을 $f(P)$ 라 두면 $f : \overline{AB} \to \overline{CD}$ 는 전단사함수가 된다. □

(4) 정리 3.5.2 를 참조하라.



문제 1.2.6. 임의의 두 구간 사이에는 전단사함수가 존재함을 보여라.

보기 5. 집합 X 에서 Y 로 가는 함수 전체의 집합을 Y^X 라 쓰자. 또한, 집합 X 의 부분집합 전체의 집합을 $\mathcal{P}(X)$ 라 쓰고, 이를 X 의 **멱집합**이라 부른다. 임의의 $A \in \mathcal{P}(X)$ 에 대하여 $\Phi(A) \in \{0,1\}^X$ 를 다음

$$\Phi(A)(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases} \tag{11}$$

과 같이 정의하자. 또한, 임의의 함수 $f \in \{0,1\}^X$ 에 대하여 X 의 부분집합 $\Psi(f) \in \mathcal{P}(X)$ 를

$$\Psi(f) = \{x \in X : f(x) = 1\}$$

라 정의하자. 그러면, 임의의 $f : X \to \{0,1\}$ 에 대하여

$$\Phi(\Psi(f))(x) = 1 \iff x \in \Psi(f) \iff f(x) = 1$$

이므로 $\Phi(\Psi(f)) = f$ 이다. 또한, 임의의 $A \in \mathcal{P}(X)$ 에 대하여

$$x \in \Psi(\Phi(A)) \iff \Phi(A)(x) = 1 \iff x \in A$$

이므로 $\Psi(\Phi(A)) = A$ 이다. 따라서, 두 함수

$$\Phi : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X, \qquad \Psi : \{0,1\}^X \to \mathcal{P}(X)$$

는 서로 상대방의 역함수이다. □

집합 $\mathcal{P}(X)$ 를 X 의 **멱집합**이라 부르고, 이를 2^X 라 쓰기도 한다. 또한, (11) 과 같이 정의된 함수를 A 의 **특성함수**라 부르고, 이를 χ_A 라 쓴다. 즉,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

이다.

문제 1.2.7. 다음 등식

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{P}(X_i) = \mathcal{P}\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right), \qquad \bigcup_{i \in I} \mathcal{P}(X_i) \subset \mathcal{P}\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)$$

을 증명하여라. 둘째 식에서 진부분집합이 되는 예를 들어라.

보기 6. (칸토르(5)) 집합 $\mathbb{N}$ 에서 구간 $[0,1]$ 로 가는 전사함수가 존재하지 않음을 보이자. 즉, 어떤 함수 $f : \mathbb{N} \to [0,1]$ 도 전사함수가 될 수 없음을 보이려 한다. 각 $n = 0, 1, 2, \dots$ 의 상 $f(n)$ 은 무한소수로 표현될 수 있으므로 이를 다음과 같이 쓰자.

$$\begin{array}{llll} f(0) = 0.x_{00}x_{01}x_{02} & \dots & x_{0n} & \dots \\ f(1) = 0.x_{10}x_{11}x_{12} & \dots & x_{1n} & \dots \\ f(2) = 0.x_{20}x_{21}x_{22} & \dots & x_{2n} & \dots \\ \qquad\qquad \dots & \dots & & \\ f(n) = 0.x_{n0}x_{n1}x_{n2} & \dots & x_{nn} & \dots \\ \qquad\qquad \dots & \dots & & \end{array}$$

각 자연수 $n = 0, 1, 2, \dots$ 에 대하여 수열 $\langle a_n \rangle$ 을

$$a_n = \begin{cases} 0, & x_{nn} \neq 0, \\ 1, & x_{nn} = 0, \end{cases}$$

로 정의하면, 소수 $\alpha = 0.a_0a_1a_2 \dots a_n \dots$ 는 $f(0), f(1), \dots, f(n), \dots$ 중 어느 것과도 다른 수이다. 따라서, $\alpha \in [0,1]$ 는 어떤 자연수 n 에 대해서도 $f(n)$ 이 될 수 없고, 따라서 f 는 전사함수가 아니다. □

(5) Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845∼1918), 독일 수학자. 베를린 대학에서 학위를 한 후 1869 년부터 1905 년까지 Halle 대학에서 활동하였는데, 만년을 정신병원에서 보냈다. 그가 처음부터 집합론을 구상한 것은 아니고, 삼각급수를 연구하는 과정에서 무한집합을 다루게 되었다. 그의 업적을 소개한 책으로 [12] 가 있다.

문제 1.2.8. 임의의 집합 X 에 대하여 X 에서 2^X 로 가는 전사함수가 없음을 보여라.

함수 $f : X \to Y$ 와 $A \subset X$ 및 $B \subset Y$ 에 대하여

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}, \qquad f(A) = \{f(x) \in Y : x \in A\}$$

라 정의하자. 집합 $f^{-1}(B)$ 를 B 의 **역상**이라 부르고, $f(A)$ 를 A 의 **상**이라 부른다. 함수 f 가 전사일 필요충분조건은 $f(X) = Y$ 이다. 일반적으로

$$x \in A \implies f(x) \in f(A) \iff x \in f^{-1}(f(A))$$

이므로

$$f^{-1}(f(A)) \supset A, \qquad A \in 2^X$$

가 성립한다. 또한, $y \in f(f^{-1}(B))$ 이면 $y = f(x)$ 인 $x \in f^{-1}(B)$ 가 존재하는데, 이는 $f(x) \in B$ 임을 뜻한다. 따라서 $y = f(x) \in B$ 이고, 다음 관계

$$f(f^{-1}(B)) \subset B, \qquad B \in 2^Y$$

가 성립함을 알 수 있다.

문제 1.2.9. 함수 f 가 단사일 필요충분조건은

$$f^{-1}(f(A)) = A, \qquad A \in 2^X$$

임을 보여라. 또한, 함수 f 가 전사일 필요충분조건은

$$f(f^{-1}(B)) = B, \qquad B \in 2^Y$$

임을 보여라.

임의의 $i \in I$ 에 대하여 $B_i \subset Y$ 일 때, 다음 등식

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \qquad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \quad (12)$$

이 성립함은 바로 확인되다. 그러나, 상과 교집합의 교환에 대해서는 조심해야 한다. 임의의 $i \in I$ 에 대하여 $A_i \subset X$ 일 때, 다음 성질

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i), \qquad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i) \tag{13}$$

역시 바로 확인할 수 있다. 그러나, $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ 인 경우 $y = f(x_1) = f(x_2)$ 인 $x_1 \in A_1$ 과 $x_2 \in A_2$ 를 찾을 수 있으나, $x_1 = x_2$ 인보장이 없으므로 $y \in f(A_1 \cap A_2)$ 라는 결론을 내릴 수 없다.

문제 1.2.10. 등식 (12), (13) 을 증명하여라. 등식

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

이 성립할 필요충분조건을 찾아라.

지난 절에서 정의한 곱집합의 정의를 살펴보자. 곱집합 $X_1 \times X_2$ 의 원소 (x_1, x_2) 에 대하여

$$p[x_1, x_2] : i \mapsto x_i : \{1, 2\} \to X_1 \cup X_2, \qquad i = 1, 2$$

와 같이 함수 $p[x_1, x_2]$ 를 정의하자. 그러면

$$(x_1, x_2) \mapsto p[x_1, x_2] : X_1 \times X_2 \to (X_1 \cup X_2)^{\{1,2\}}$$

는 단사함수가 되고, 그 상은

$$\{f \in (X_1 \cup X_2)^{\{1,2\}} : f(1) \in X_1,\ f(2) \in X_2\}$$

가 된다. 이제, 임의의 집합족 $\{X_i : i \in I\}$ 에 대한 **곱집합** $\prod_{i\in I} X_i$ 를 다음

$$\prod_{i\in I} X_i = \left\{f \in \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)^I : f(i) \in X_i,\ i \in I\right\}$$

과 같이 정의한다. 각 $i \in I$ 에 대하여 다음 함수

$$\pi_i : f \mapsto f(i) : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$$

를 생각할 수 있는데, 이를 **사영**이라 한다. 임의의 $i \in I$ 에 대하여 $X_i = X$ 이면, $\prod_{i\in I} X_i = X^I$ 이다.

보기 7. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 을 n 개 곱한 곱집합을 $\mathbb{R}^n$ 이라 쓰자. 만일 $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ 이라 두면[(6)] 이는 n 에서 $\mathbb{R}$ 로 가는 함수 전체의 집합이다. 이 때, n 에서 $\mathbb{R}$ 로 가는 함수 가운데

$$i \mapsto a_i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

인 것을 $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ 이라 표시하면 편리하다. □

1.3. 동치관계

집합 X 에 **관계**가 주어져 있다는 것은 곱집합 $X \times X$ 의 부분집합이 주어져 있다는 것과 마찬가지 말이다. 관계 $R \subset X \times X$ 이 다음 성질들

(동1) 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $(x, x) \in R$ 이다,
(동2) $(x, y) \in R$ 이면 $(y, x) \in R$ 이다,
(동3) $(x, y) \in R$ 이고 $(y, z) \in R$ 이면 $(x, z) \in R$ 이다

을 만족하면 이를 **동치관계**라 부른다. 동치관계 $R \subset X \times X$ 가 주어져 있을 때, $(x, y) \in R$ 을 $x \sim y$ 로 쓰기도 한다. 물론, 기호 $\sim$ 은 여러 가지로 바꾸어 쓸 수 있다. 위 조건들을 다시 한 번 열거하면 다음

$$\begin{aligned} x \in X &\implies x \sim x, \\ x \sim y &\implies y \sim x, \\ x \sim y,\ y \sim z &\implies x \sim z \end{aligned}$$

과 같이 된다.

(6) 실제로 다음 장에서 자연수 n 을 집합 $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ 로 정의한다.

집합 X 에 동치관계 $\sim$ 가 주어져 있을 때 각 $x \in X$ 에 대하여

$$[x] = \{z \in X : z \sim x\}$$

라 정의하자. 그러면

$$x \sim y \iff [x] = [y], \qquad x \nsim y \iff [x] \cap [y] = \emptyset \tag{14}$$

임을 바로 확인할 수 있다. 만일 $x \sim y$ 이면, (동2) 와 (동3) 에 의하여

$$z \in [x] \iff z \sim x \iff z \sim y \iff z \in [y]$$

가 된다. 역으로, $[x] = [y]$ 이면 $x \sim x$ 이므로 $x \in [x] = [y]$ 가 되고, 따라서 $x \sim y$ 임을 알 수 있다. 두번째 성질을 증명하는데

$$[x] \cap [y] \neq \emptyset \implies [x] = [y]$$

임을 보이면 된다. 만일 $z \in [x] \cap [y]$ 이면 $z \sim x$ 및 $z \sim y$ 가 성립하고, 따라서 $x \sim y$ 이다. 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $x \in [x]$ 이므로, (14) 에 의하여 집합 X 는 $\{[x] : x \in X\}$ 으로 분할됨을 알 수 있다.

일반적으로, 집합 X 의 부분집합족 $\{A_i : i \in I\}$ 가 다음 두 성질

(분1) $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ 이다,
(분2) 임의의 $i, j \in I$ 에 대하여 $A_i = A_j$ 이거나 $A_i \cap A_j = \emptyset$ 이다

을 만족하면, 이를 X 의 **분할**이라 한다. 따라서, 집합 X 에 동치관계 $\sim$ 가 주어지면 자동적으로 X 의 분할이 생김을 알 수 있는데, 이러한 분할을 앞으로 $X/\sim$ 으로 표시한다. 만일 각 집합 $[x]$ 의 원소를 하나 택하여 r_x 라 두고 $I = \{r_x : x \in X\}$ 라 두면, $\{[r] : r \in I\}$ 는 서로소인 집합족이 되고, 따라서 $X = \bigsqcup\{[r] : r \in I\}$ 임을 알 수 있다.

보기 1. 정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$ 에 다음

$$m \sim n \iff m - n \text{ 은 } 2 \text{ 의 배수이다}$$

과 같이 관계를 정의하면 동치관계임을 바로 확인할 수 있다. 이 때, m 이 짝수이면 $[m]$ 은 짝수 전체의 집합이 되고, m 이 홀수 이면 $[m]$ 은 홀수 전체의 집합이 된다. 따라서,

$$\mathbb{Z}/\!\sim\, = \{[m] : m \in \mathbb{Z}\} = \{[m] : m = 0, 1\} = \{[0], [1]\}$$

가 되고, $\mathbb{Z} = [0] \sqcup [1]$ 이 된다. 물론, 위에서 0 과 1 대신에 8 과 5 를 택하여 $\mathbb{Z} = [8] \sqcup [5]$ 라 써도 마찬가지이다. □

보기 2. 집합 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{N}\}$ 에 다음

$$(m, n) \sim (m', n') \Longleftrightarrow m + n' = n + m'$$

과 같이 관계 $\sim$ 를 정의하면 동치관계가 된다. 우선 (동1) 과 (동2) 가 성립함은 자명하다. 만일 $(m, n) \sim (m', n')$ 및 $(m', n') \sim (m'', n'')$ 가 성립하면,

$$m + n'' = (m + n') + (m' + n'') = (n + m') + (n\prime + m'') = n + m''$$

가 성립하고, 따라서 $(m, n) \sim (m'', n'')$ 가 성립한다. 이 경우

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\!\sim\, = \{[(0, 0)], [(n, 0)], [(0, n)] : n = 1, 2, \dots\}$$

임을 바로 확인할 수 있다. □

보기 3. 집합 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ 에 다음

$$(a, b) \sim (c, d) \iff abd^2 = cdb^2$$

과 같이 관계를 정의하면 동치관계가 된다. 이 보기에서도 (동1), (동2) 가 성립함은 자명하다. 만일 $(a, b) \sim (c, d)$ 와 $(c, d) \sim (e, f)$ 가 성립하면 $abd^2 = cdb^2$ 및 $cdf^2 = efd^2$ 이다. 만일 $c = 0$ 이면 $abd^2 = 0$ 에

서 $b, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 이므로 $a = 0$ 이고 마찬가지로 $e = 0$ 이다. 따라서 $(a, b) \sim (e, f)$ 임을 알 수 있다. 만일 $c \neq 0$ 이면

$$(abf^2)(cd^3) = (abd^2)(cdf^2) = (cdb^2)(efd^2) = (efb^2)(cd^3)$$

에서 $abf^2 = efb^2$ 이므로 $(a, b) \sim (e, f)$ 임을 알 수 있다. □

이제, 집합 X 의 분할 $\mathcal{P} = \{X_i : i \in I\}$ 가 주어졌을 때 거꾸로 동치관계를 만들어 보자. 집합 X 의 두 원소 $x, y \in X$ 가 다음 성질

$$x, y \in X_i \text{ 인 } i \in I \text{ 가 존재한다}$$

을 만족할 때 $x \sim y$ 라 정의하자. 그러면 $\sim$ 이 동치관계임은 바로 확인된다. 실제로, $x \in X$ 이면 (분1) 에 의하여 $x \in X_i$ 인 $i \in I$ 를 찾을 수 있고, 따라서 $x \sim x$ 가 성립한다. 두번째 성질 (동2) 가 성립함은 정의에 의하여 자명하다. 끝으로 (동3) 이 성립함을 보이기 위하여 $x \sim y$, $y \sim z$ 라 가정하자. 그러면 $x, y \in X_i$ 인 $i \in I$ 와 $y, z \in X_j$ 인 $j \in I$ 가 존재한다. 그런데 $y \in A_i \cap A_j$ 이므로 $A_i = A_j$ 이고, 따라서, $x \sim y$ 이다. 이와 같이 분할 $\mathcal{P}$ 에 의하여 정의된 동치관계를 $\sim_{\mathcal{P}}$ 라 쓰기로 한다. 다음 정리는 동치관계와 분할이 사실상 같은 것임을 말해 준다.

정리 1.3.1. 집합 X 에 정의된 동치관계 $\sim$ 에 대하여 $\sim = \sim_{(X/\sim)}$ 이 성립한다. 역으로, 임의의 분할 $\mathcal{P}$ 에 대하여 $\mathcal{P} = X/\sim_{\mathcal{P}}$ 가 성립한다. 즉, 임의의 $x, y \in X$ 와 $A \in 2^X$ 에 대하여

$$x \sim y \iff x \sim_{(X/\sim)} y, \qquad A \in \mathcal{P} \iff A \in X/\sim_{\mathcal{P}}$$

가 성립한다.

증명: 먼저 $x \sim y$ 이면 $x \in [x],\ y \in [x]$ 이고 $[x] \in X/\sim$ 이므로 $x \sim_{(X/\sim)} y$ 가 성립한다. 역으로, $x \sim_{(X/\sim)} y$ 이면 $x \in [z],\ y \in [z]$ 인 $[z] \in X/\sim$ 이 존재한다. 그러면 $x \sim z$, $y \sim z$ 이므로 $x \sim y$ 임을 알 수 있다.

이제 두번째 명제를 보이기 위하여 $A \in \mathcal{P}$ 라 가정하고, $a \in A$ 를 택하자. 만일 $x \in A$ 이면 정의에 의하여 $x \sim_{\mathcal{P}} a$ 이다. 만일 $x \sim_{\mathcal{P}} a$ 이면 $x \in B$, $a \in B$ 인 $B \in \mathcal{P}$ 가 존재하는데 $a \in A \cap B$ 이므로 $A = B$ 이고, 따라서 $x \in A$ 이다. 그러므로

$$A = \{x \in X : x \sim_{\mathcal{P}} a\} \in X/\sim_{\mathcal{P}}$$

임을 알 수 있다. 역으로 $A \in X/\sim_{\mathcal{P}}$ 이면 적절한 $a \in X$ 에 대하여 $A = \{x \in X : x \sim_{\mathcal{P}} a\}$ 이다. 한편 분할 $\mathcal{P}$ 에서 $a \in X$ 가 포함되는 것을 $B \in \mathcal{P}$ 라 하자. 그러면 방금 증명한 바에 의하여 $A = B$ 이고, 따라서 $A \in \mathcal{P}$ 임을 알 수 있다. □

보기 4. 홀수 전체의 집합을 O, 짝수 전체의 집합을 E 라 두면 $\mathcal{P} = \{O, E\}$ 는 정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$ 의 분할이다. 그러면 동치관계 $\sim_{\mathcal{P}}$ 의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} m \sim_{\mathcal{P}} n &\iff m \text{ 과 } n \text{ 이 같이 짝수이거나 같이 홀수이다} \\ &\iff m - n \text{ 은 } 2 \text{ 의 배수이다} \end{aligned}$$

따라서, 동치관계 $\sim_{\mathcal{P}}$ 는 보기 1 에서 정의한 것과 마찬가지가 된다. □

집합 X 에 동치관계 혹은 분할에 의하여 얻어진 집합 $X/\sim$ 을 보통 **몫집합**이라 부르고, 다음 함수

$$q : X \to X/\sim \,: x \mapsto [x]$$

를 **몫사상**이라 부른다. 몫사상은 물론 전사사상이다. 함수 $f : X \to Y$ 가 다음 조건

$$x \sim y \implies f(x) = f(y) \tag{15}$$

을 만족한다 가정하자. 그러면 새로운 함수

$$\widetilde{f} : X/\sim \,\to Y : [x] \mapsto f(x)$$

를 정의할 수 있다. 여기서, 이 정의가 잘 정의되어 있는지 살펴 보아야 한다. 왜냐하면, $[x]$ 의 함수값을 정의하기 위하여 x 를 이용하였는데 $[x]$ 를 대표하는 원소가 x 외에도 더 있을 수 있기 때문이다. 즉, $[x] = [y]$ 이면 $f(x) = f(y)$ 가 성립하여야 하는데, 이를 보장하는 것이 조건 (15) 이다. 그러면 당연히 $\widetilde{f} \circ q = f$ 가 성립한다. 역으로, $\widetilde{f} \circ q = f$ 가 성립하는 함수 $\widetilde{f} : X/\sim \to Y$ 가 존재하면 조건 (15) 가 성립하는 것은 당연하다.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

정리 1.3.2. 집합 X 및 동치관계 $\sim$ 와 함수 $f : X \to Y$ 에 대하여 다음은 동치이다.

(가) $\widetilde{f} \circ q = f$ 인 함수 $\widetilde{f} : X/\sim \to X$ 이 유일하게 존재한다.

(나) $x \sim y$ 이면 $f(x) = f(y)$ 이다.

문제 1.3.1. 정리 1.3.2 에서, 만일 $\widetilde{f} \circ q = f$ 를 만족하는 $\widetilde{f}$ 가 존재한다면 유일함을 보여라. 즉, 두 함수 $\phi, \psi : X/\sim \to Y$ 가 $\phi \circ q = \psi \circ q$ 이면 $\phi = \psi$ 임을 보여라.

문제 1.3.2. 함수 $\widetilde{f}$ 가 전사일 필요충분조건은 f 가 전사임을 보여라. 함수 $\widetilde{f}$ 가 단사일 필요충분조건은

$$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

임을 보여라.

보기 5. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 의 한 점 $A = (a_1, a_2)$ 에서 출발하여 $B = (b_1, b_2)$ 까지 가는 화살표 $\overrightarrow{AB}$ 전체의 집합을 X 라 하자. 집합 X 에 동치관계를 다음

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \iff B - A = D - C$$

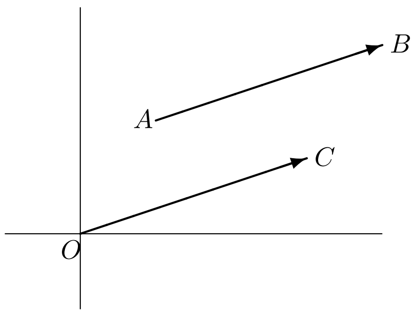
로 정의하면[7] 동치관계임을 바로 확인할 수 있다. 이 때, 임의의 $\overrightarrow{AB} \in X$ 에 대하여 $A + C = B$ 인 $C \in \mathbb{R}^2$ 를 잡으면 $\left[\overrightarrow{AB}\right] = \left[\overrightarrow{OC}\right]$ 이다. 여기서 물론 $O = (0, 0)$ 이다. 따라서

$$X/\sim = \left\{ \left[\overrightarrow{OC}\right] : C \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

임을 알 수 있다. 이 때, 다음 함수

$$C \mapsto \left[\overrightarrow{OC}\right] : \mathbb{R}^2 \to X/\sim$$

은 전단사함수가 된다. 다시 말하여 좌표평면 위의 모든 벡터는 한 점에 의하여 결정된다. 따라서, $\mathbb{R}^2$ 의 원소 (a_1, a_2) 를 벡터라 부르는데, 이는 원점에서 이 점까지 가는 화살표로 이해하는 것이다. □



보기 6. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 V 와 그 부분공간 W 가 주어져 있을 때

$$x \sim_W y \iff x - y \in W$$

라 정의하면 동치관계가 된다. 임의의 $x \in V$ 에 대하여

$$[x] = \{y : x - y \in W\} = \{x + z : z \in W\}$$

---

(7) 여기서 $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ 인데, $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ 는 $A - C = B - D$, 즉 $\overrightarrow{AB}$ 와 $\overrightarrow{CD}$ 의 방향과 크기가 같다는 말이다.

가 되는데, $V/{\sim_W}$ 에 다음

$$[x]+[y]=[x+y], \qquad a[x]=[ax], \qquad x,y\in V,\ a\in\mathbb{R}$$

과 같이 연산을 정의하자. 이 때, $[x+y]$ 를 정의하기 위하여 x 를 이용하였지만 $[x]$ 를 대표하는 원소가 x 만 있는 것이 아니므로, 이 정의가 잘 정의되어 있는가 살펴 보아야 한다. 즉,

$$[x_1]=[x_2],\ [y_1]=[y_2] \implies [x_1+y_1]=[x_2+y_2],\ [ax_1]=[ax_2]$$

임을 증명하여야 한다. 먼저, $[x_1]=[x_2]$, $[y_1]=[y_2]$ 이면 $x_1\sim x_2$, $y_1\sim y_2$ 이고 따라서 $x_1-x_2, y_1-y_2\in W$ 이다. 이로부터

$$(x_1+y_1)-(x_2+y_2)=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\in W,$$
$$ax_1-ax_2=a(x_1-x_2)\in W$$

임을 알 수 있고, 따라서 원하는 결론을 얻는다. 이와 같이 새로이 정의된 연산에 대하여 $V/{\sim_W}$ 는 다시 벡터공간이 되는데, 이를 V/W 라 쓰고 **몫공간**이라 부른다. □

문제 1.3.3. 벡터공간 V 의 분할 V/W 이 다시 벡터공간이 됨을 보여라. 선형사상 $\phi: V\to Z$ 에 대하여 $\widetilde{\phi}\circ q=\phi$ 를 만족하는 선형사상 $\widetilde{\phi}: V/W\to Z$ 가 존재할 필요충분조건이

$$x\in W \implies \phi(x)=0$$

임을 보여라.

1.4. 순서

집합 X 의 관계 $R\subset X\times X$ 이 다음 조건

(순1) 임의의 $x\in X$ 에 대하여 $(x,x)\in R$ 이다,

(순2) $(x,y)\in R$, $(y,x)\in R$ 이면 $x=y$ 이다,

(순3) $(x,y)\in R$ 이고 $(y,z)\in R$ 이면 $(x,z)\in R$ 이다.

을 만족하면 이를 **순서관계**라 한다. 순서관계는 보통 $\leq$ 로 표시하는데, 이 경우 위 세 조건은 다음

$$x \in X \implies x \leq x,$$

$$x \leq y,\ y \leq x \implies x = y,$$

$$x \leq y,\ y \leq z \implies x \leq z$$

과 같이 쓸 수 있다. 순서관계가 정의되어 있는 집합을 **순서집합**이라 한다. 만일 $x \leq y$ 이면서 $x \neq y$ 이면 $x < y$ 라 쓴다.

보기 1. 집합 $X = \{a, b, c\}$ 에

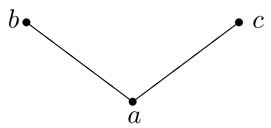
$$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (a,c)\} \subset X \times X$$

에 의하여 관계를 정의하면 순서관계가 됨을 바로 확인할 수 있다. 이 경우, 원소 a, b, c 사이에는 다음 다섯 개의 순서

$$a \leq a, \quad b \leq b, \quad c \leq c, \quad a \leq b, \quad a \leq c$$

가 있게 된다. □

순서집합은 그림으로 나타내면 편리한 경우가 많다. 원소들을 점으로 표시하고, 두 원소 사이에 순서가 정의되어 있는 경우 대응하는 점을 선분으로 잇되 큰 원소가 윗쪽에 오도록 한다. 보기 1 에 있는 순서집합을 그림으로 표시하면 다음과 같다.



문제 1.4.1. (순1) 과 (순2) 를 만족하지만 (순3) 을 만족하지 않는 관계의 예를 들어라. 마찬가지로, (순2), (순3) 을 만족하지만 (순1) 을 만족하지 않는 예, 그리고 (순3), (순1) 을 만족하지만 (순2) 를 만족하지 않는 예를 들어라.

순서집합 X 의 부분집합 $S \subset X$ 와 한 원소 $a \in X$ 에 대하여 다음 명제

$$x \in S \Longrightarrow x \leq a$$

가 성립하면 a 가 S 의 **상계**라 한다. 순서집합의 부분집합이 상계를 가지면 이 집합을 **위로 유계**라 한다. 상계 중에서 가장 작은 원소를 **최소 상계** 또는 **상한**이라 한다. 보다 구체적으로 말하여, $\alpha \in X$ 와 $S \subset X$ 가 다음 두 조건

(가) α 는 S 의 상계이다, 즉, $x \in S \Longrightarrow x \leq \alpha$ 이다,
(나) β 가 S 의 상계이면 $\alpha \leq \beta$ 이다, 즉, 모든 $x \in S$ 에 대하여 $x \leq \beta$ 이면 $\alpha \leq \beta$ 이다

을 만족하면 α 를 S 의 최소상계 혹은 상한이라 한다. 만일 집합 S 가 상한을 가지면 위 정의 (나) 으로부터 오직 하나밖에 없음을 금방 알 수 있고, 그 상한을 $\sup S$ 라 쓴다.

보기 2. 순서집합 X 의 어떤 원소가 부분집합 $\emptyset \subset X$ 의 상계인지 살펴보자. 원소 $a \in X$ 가 $\emptyset$ 의 상계라 함은

$$x \in \emptyset \Longrightarrow x \leq a$$

가 성립한다는 말인데, 이는 임의의 $a \in X$ 에 대하여 항상 성립한다. 실제로, 이 명제를 부정하면

$$x \leq a \text{ 가 아닌 } x \in \emptyset \text{ 가 존재한다}$$

인데, 이는 $x \in \emptyset$ 이 성립할 수가 없으므로 당연히 틀린 명제이다. 따라서, 임의의 원소는 공집합 $\emptyset$ 의 상계이다. □

보기 3. 실수집합에 우리가 잘 아는 순서를 부여하면, 집합 $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ 의 상계 전체의 집합은 $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ 이고, 이 집합의 최소 원소는 1 이다. 따라서 $\sup(0, 1) = 1$ 이다. 마찬가지로

$[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$ 이라 두면, $\sup[0,1] = 1$ 이다. 이와 같이, 어느 집합의 상한은 그 집합의 원소일 수도 있고, 그렇지 않을 수도 있다. 만일 $\sup A$ 가 A 의 원소가 되면, 이는 당연히 A 의 최대 원소가 된다. □

마찬가지로 다음

$$x \in S \Longrightarrow x \ge a$$

이 성립하면 a 가 S 의 **하계**라 하고, 순서집합의 부분집합이 하계를 가지면 이 집합을 **아래로 유계**라 한다. 또한, $\alpha \in X$ 와 $S \subset X$ 가 다음 두 조건

(가) α 는 S 의 하계이다,
(나) β 가 S 의 하계이면 $\alpha \ge \beta$ 이다

을 만족하면 α 를 S 의 **최대하계** 또는 **하한**이라 한다. 만일 집합 S 가 하한을 가지면 오직 하나밖에 없는데, 그 하한을 $\inf S$ 라 쓴다.

보기 4. 집합 X 의 멱집합 2^X 에 포함관계에 의한 순서를 부여하자. 즉 $A \subset B$ 일 때 $A \le B$ 로 정의하자는 말이다. 이 관계가 실제로 (순1) 부터 (순3) 까지 만족함은 자명하다. 집합족 $\mathcal{A} \subset 2^X$ 가 주어지면

$$\sup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}, \qquad \inf \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A},$$

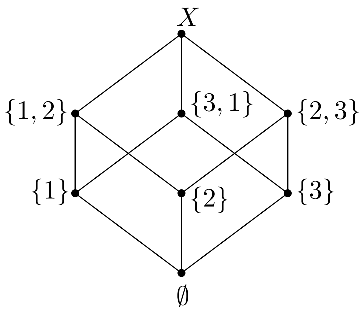
이 된다. 우선, 임의의 $A \in \mathcal{A}$ 에 대하여 $A \le \bigcup \mathcal{A}$ 이므로 $\bigcup \mathcal{A}$ 는 $\mathcal{A}$ 의 상계이다. 만일 $S \in 2^X$ 가 $\mathcal{A}$ 의 상계라면, 임의의 $A \in \mathcal{A}$ 에 대하여 $A \subset S$ 이므로

$$x \in \bigcup \mathcal{A} \implies x \in A \text{ 인 } A \in \mathcal{A} \text{ 가 존재한다} \implies x \in S$$

가 성립한다. 따라서 $\bigcup \mathcal{A} \le S$ 이고, $\sup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}$ 이다. □

문제 1.4.2. 등식 $\inf \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A}$ 을 증명하여라.

보기 4 에서, $X = \{1, 2, 3\}$ 일 때 순서집합 2^X 는 다음과 같이 그림으로 나타낼 수 있다.



보기 5. 좌표공간 $\mathbb{R}^\nu$ 의 부분집합 $C \subset \mathbb{R}^\nu$ 가 다음 성질

$$x, y \in C,\ 0 \le t \le 1 \implies tx + (1-t)y \in C$$

을 만족하면 이를 **볼록집합**이라 한다. 볼록집합 C 의 볼록부분집합 F 가 다음 성질

$$x, y \in C,\ tx + (1-t)y \in F \text{ 인 } t \in (0,1) \text{ 가 존재한다} \implies x, y \in F$$

을 만족하면 F 를 C 의 **면**이라 한다. 한 점으로 이루어진 면을 **꼭지점**이라 부른다. 볼록집합 C 의 면 전체의 집합 $\mathcal{F}(C)$ 는 포함관계에 의하여 순서집합이 된다.

만일 C 가 정사면체 $ABCD$ 이면 $\mathcal{F}(C)$ 는 원소 네 개인 집합 $X = \{a, b, c, d\}$ 에 의한 2^X 와 같은 순서집합이다. 실제로 정사면체 $ABCD$ 의 면들은 꼭지점을 어떻게 선택하느냐에 달려 있다. 꼭지점을 선택하지 않으면 $\emptyset$, 하나를 선택하면 '꼭지점', 두 개를 선택하면 '모서리', 세 개를 선택하면 '면', 네 개를 모두 선택하면 자기 자신이 된다. 따라서, 이러한 선택과 X 의 부분집합을 만드는 선택과 대응시키면 된다. 예를 들어, 모서리 $AC \in \mathcal{F}(C)$ 는 $\{a, c\} \in 2^X$ 와 대응된다. □

문제 1.4.3. 볼록집합 C 의 면들로 주어진 순서집합 $\mathcal{F}(C)$ 의 임의의 부분집합은 상한과 하한을 가짐을 증명하여라.

이제, 순서집합 X 의 두 원소 $x, y \in X$ 에 대하여

$$x \vee y = \sup\{x, y\}, \qquad x \wedge y = \inf\{x, y\}$$

라 쓰자. 임의의 두 원소 $x, y \in X$ 에 대하여 $x \vee y$ 및 $x \wedge y$ 가 존재하면 X 를 **격자**라 한다. 임의의 부분집합이 상한과 하한을 가지면 이를 **완비격자**라 부른다. 상한의 정의를 다시 한번 반복하면 $x \vee y$ 는 다음 두 가지 성질

$$x \le x \vee y, \qquad y \le x \vee y$$

$$x \le z,\ y \le z \implies x \vee y \le z$$

에 의하여 결정된다. 일반적으로, $X \times X$ 에서 X 로 가는 함수가 주어지면 이를 X 의 **이항연산**이라 부른다. 예를 들어서 자연수의 더하기와 곱하기 등은 모두 이항연산이다. 방금 정의한

$$(x, y) \mapsto x \vee y, \qquad (x, y) \mapsto x \wedge y$$

는 모두 이항연산인데, 임의의 $x, y, z \in X$ 에 대하여 다음 등식

$$\begin{aligned} x \vee x &= x & x \wedge x &= x \\ x \vee y &= y \vee x & x \wedge y &= y \wedge x \\ (x \vee y) \vee z &= x \vee (y \vee z) & (x \wedge y) \wedge z &= x \wedge (y \wedge z) \\ (x \vee y) \wedge x &= x & (x \wedge y) \vee x &= x \end{aligned} \tag{16}$$

이 성립한다.

처음 두 가지 등식은 자명하다. 연산 $\vee$ 에 대한 결합법칙을 보이기 위하여 다음 부등식

$$(x \vee y) \vee z \le x \vee (y \vee z)$$

을 먼저 보이자. 우선 $x \le x \vee (y \vee z)$ 및 $y \le y \vee z \le x \vee (y \vee z)$ 로 부터 $x \vee y \le x \vee (y \vee z)$ 가 성립한다. 또한, $z \le y \vee z \le x \vee (y \vee z)$ 와 함께 생각하면 위 부등식이 성립함을 알 수 있다. 반대 부등식과 $\wedge$ 에 관한 결합법칙은 같은 방법으로 증명된다. 또한, 등식 $(x \vee y) \wedge x = x$ 를 보이려면

$$x \le x, \qquad x \le x \vee y$$

$$z \le x,\ z \le x \vee y \implies z \le x$$

를 보이면 되는데, 이는 자명하다.

문제 1.4.4. (16) 에 나오는 등식들의 증명을 마무리하여라.

정리 1.4.1. 순서집합 X 의 임의의 두 원소 $x, y \in X$ 에 대하여 $x \vee y$ 및 $x \wedge y$ 가 존재하면 (16) 이 성립한다. 역으로, 집합 X 에 이항연산 $\vee$ 과 $\wedge$ 가 정의되어 성질 (16) 을 만족한다고 가정하자. 이 때,

$$x \le y \iff x \vee y = y$$

라 정의하면 X 는 순서집합이 되고, 이 순서에 대하여 격자가 된다.

증명: 첫째 명제는 이미 증명하였다. 먼저, $x \le x$ 는 (16) 의 첫번째 성질에서 나온다. 만일 $x \le y$, $y \le x$ 이면 $x \vee y = y$ 이고 $y \vee x = x$ 이다. 그런데 이항연산 $\vee$ 이 교환법칙을 만족하므로 $x = y$ 임을 알 수 있다. 만일 $x \le y$, $y \le z$ 이면

$$x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$$

이므로 $x \le z$ 가 성립한다. 이제, $\sup\{x, y\} = x \vee y$ 임을 보이자. 먼저

$$x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y$$

이므로 $x \le x \vee y$ 가 성립하고, 여기에서 x 와 y 의 역할을 바꾸면 $y \le y \vee x = x \vee y$ 임을 알 수 있다. 끝으로, $x \le z$, $y \le z$ 이면

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee z = z$$

이고, 따라서 $x \vee y \le z$ 이다. 그러므로 $\sup\{x, y\} = x \vee y$ 이 증명되었다. 등식 $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ 의 증명은 연습문제로 남긴다. □

문제 1.4.5. 정리 1.4.1 의 증명에서 등식 $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ 을 증명하여라.