제 2 장 수의 체계

2002년 1학기

집합과 수리논리
강의록 제 2 장

서울대학교 수학과
계승혁

2002년 3월 3일 게시
2002년 7월 8일 수정
33쪽~78쪽

이 장에서는 우리가 어릴 때부터 사용하던 수의 더하기, 곱하기, 순서 등을 체계적으로 공부한다. 먼저 $0=\emptyset$, $1=\{0\}$, $2=\{0,1\}$ 등으로 자연수를 정의하고, 자연수 사이의 더하기 및 곱하기를 정의한다. 이러한 정의에 입각하여 교환법칙, 결합법칙, 배분법칙 등을 증명한다. 자연수의 순서와 관련하여 가장 중요한 성질은 임의의 자연수집합은 최소값을 가진다는 것인데, 물론 자연수의 정의에 입각하여 이를 증명한다. 정수를 두 자연수의 차이로 이해하기 위하여, 자연수의 순서쌍들에 적절한 동치관계를 부여함으로써 정수집합을 만든다. 마찬가지로 정수의 순서쌍들에 적절한 동치관계를 부여하여 유리수집합을 만드는데, 유리수에서는 가감승제가 자유로워진다. 유리수체는 가장 작은 순서체이다. 이 장에서는 유리수로부터 실수를 구성하는 두 가지 방법을 소개하는데, 하나는 데데킨트가 고안한 절단을 이용하는 것이고, 또 다른 하나는 칸토르가 고안한 코시수열을 이용하는 것이다. 이 두가지 방법은 1872 년 같은 해에 각각 발표되었다. 이 두가지 방법은 사실상 같은 결과를 가져오는데, 마지막 절에서 임의의 완비순서체는 항상 같음을 보인다.

2.1. 자연수

집합 A 에 대하여 새로운 집합 A^+ 를 다음

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

으로 정의한다. 예를 들어서, 공집합부터 출발하여 $0 = \emptyset$ 이라 두고, $1 = 0^+, 2 = 1^+, 3 = 2^+, \ldots$ 등으로 정의하면 다음

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= 0^+ = 0 \cup \{0\} = \emptyset \cup \{0\} = \{0\} \\ 2 &= 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0,1\} \\ 3 &= 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0,1\} \cup \{2\} = \{0,1,2\} \\ &\ \ \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

과 같이 된다. 다음 두 가지 성질

$$\emptyset \in \mathcal{A}, \qquad A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^+ \in \mathcal{A} \tag{2}$$

을 가지는 집합 $\mathcal{A}$ 들 전체의 교집합을 $\mathbb{N}$ 이라 쓰고, 이 집합의 원소들을 **자연수**라 부른다. 집합 $\mathbb{N}$ 이 성질 (2) 를 가지는 것은 바로 확인된다. 따라서 다음 정리의 (가), (나) 가 성립하고, (1) 과 같이 정의된 집합 $0, 1, 2, 3, \ldots$ 는 자연수이다. 또한, $n^+ = n \cup \{n\}$ 은 공집합이 아니므로 다음 정리의 (다) 도 당연하다. 다음 정리에 열거된 다섯 가지 성질은 **빼아노[1] 공리계**라 불리운다.

정리 2.1.1. 집합 $\mathbb{N}$ 은 다음 성질들을 만족한다.

(가) $0 \in \mathbb{N}$.

(나) $n \in \mathbb{N} \implies n^+ \in \mathbb{N}$.

(다) 임의의 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $n^+ \neq 0$ 이다.

(라) 자연수들의 집합 $X \subset \mathbb{N}$ 가 다음 두 성질

$$0 \in X, \qquad n \in X \Longrightarrow n^+ \in X \tag{3}$$

을 만족하면 $X = \mathbb{N}$ 이다.

(1) Giuseppe Peano (1958∼1932), 이탈리아 수학자. Turin 에서 공부하고 활동하였다.

(마) 만일 $m, n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $m^+ = n^+$ 이면 $m = n$ 이다.

만일 $X \subset \mathbb{N}$ 가 성질 (2) 를 가지면 당연히 $X = \mathbb{N}$ 이 되는데, 이를 다시 쓴 것이 (라) 이다. 이는 **수학적 귀납법**을 사용할 수 있는 근거이다. 만일 자연수 $n \in \mathbb{N}$ 에 관한 명제 $P(n)$ 이 있을 때, $P(n)$ 이 성립하는 자연수 $n \in \mathbb{N}$ 들의 집합을 X 라 두자. 만일 $P(0)$ 이 성립함을 알고, $P(n) \Longrightarrow P(n^+)$ 을 보이면 X 가 성질 (3) 을 만족한다는 말이 된다. 따라서 $X = \mathbb{N}$ 인데, 이는 임의의 자연수 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $P(n)$ 이 성립한다는 뜻이다.

이제, 정리 2.1.1 의 (마) 를 증명해 보자. 우선,

$$n \in n^+ = m^+ = m \cup \{m\}$$

이므로 $n \in m$ 이거나 $n = m$ 이다. 마찬가지 방법으로 $m \in n$ 이거나 $n = m$ 이다. 따라서, 다음

$$n \in \mathbb{N},\ x \in n \implies x \subset n \tag{4}$$

을 증명하면 $n \subset m$ 과 $m \subset n$ 이 성립하여 증명이 끝난다. 이제 (4) 를 증명하기 위하여

$$X = \{n \in \mathbb{N} : x \in n \implies x \subset n\}$$

이라 두자. 먼저 $0 \in X$ 임은 분명하다. 즉, $x \in \emptyset \Longrightarrow x \subset \emptyset$ 은 옳은 명제이다. 이제 수학적 귀납법을 사용하기 위하여 $n \in X$ 라 가정하자. 만일 $x \in n^+ = n \cup \{n\}$ 이면 $x \in n$ 이거나 $x = n$ 이다. 만일 $x = n$ 이면 $x = n \subset n^+$ 이고, $x \in n$ 이면 귀납법 가정에 의하여 $x \subset n$ 이므로 $x \subset n \subset n^+$ 가 성립한다. 따라서 $X = \mathbb{N}$ 이고 (4) 가 증명되었다.

다음 정리는 집합 X 의 원소 $\gamma(0), \gamma(1), \gamma(2), \ldots$ 가 특정 점화식을 만족하도록 귀납적으로 정의할 수 있음을 말해 주는데, 자연수의 연산을 정의하는 데에 중요한 역할을 한다.

정리 2.1.2. 집합 X 의 한 원소 $a \in X$ 과 함수 $f : X \to X$ 에 대하여, 다음 성질

(가) $\gamma(0) = a$,
(나) 임의의 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $\gamma(n^+) = f(\gamma(n))$ 이 성립한다

을 만족하는 함수 $\gamma : \mathbb{N} \to X$ 가 유일하게 존재한다.

증명: 먼저, (가) 와 (나) 를 동시에 만족하는 함수 γ_1 과 γ_2 가 있다고 가정하고,

$$X = \{n \in \mathbb{N} : \gamma_1(n) = \gamma_2(n)\}$$

이라 두자. 먼저 (가) 에 의하여 $0 \in X$ 이다. 만일 $n \in X$ 이면

$$\gamma_1(n^+) = f(\gamma_1(n)) = f(\gamma_2(n)) = \gamma_2(n^+)$$

이므로 $n^+ \in X$ 이다. 따라서, 수학적 귀납법에 의하여 $X = \mathbb{N}$ 이고, 임의의 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $\gamma_1(n) = \gamma_2(n)$ 임을 알 수 있다.

이제, 존재성을 보이기 위하여 다음 성질

$$(0, a) \in A, \qquad (n, x) \in A \Longrightarrow (n^+, f(x)) \in A \tag{5}$$

을 만족하는 $A \subset \mathbb{N} \times X$ 전체의 집합을 $\mathcal{A}$ 라 두면 $\mathbb{N} \times X \in \mathcal{A}$ 이므로 $\mathcal{A}$ 는 비어 있지 않다. 이제, $\gamma = \bigcap \mathcal{A}$ 라 두자. 만일 $\gamma \subset \mathbb{N} \times X$ 가 함수이면 다음

$$\begin{aligned} \gamma(n) = x \implies & (n, x) \in \gamma \\ \implies & (n^+, f(x)) \in \gamma \\ \implies & \gamma(n^+) = f(x) = f(\gamma(n)) \end{aligned}$$

이 성립하므로, $\gamma \subset \mathbb{N} \times X$ 가 함수임을 보이면 증명이 끝난다.

이를 위하여 다시

$$\mathcal{X} = \{n \in \mathbb{N} : (n, x) \in \gamma \text{ 를 만족하는 } x \in X \text{ 가 유일하게 존재한다}\}$$

라 두고 귀납법을 사용한다. 만일 $0 \notin \mathcal{X}$ 라면 $(0,b) \in \gamma$, $b \neq a$ 인 $b \in X$ 가 존재한다. 그런데 $b \neq a$ 이므로, 정리 2.1.1 (다) 에 의하여 $\gamma \setminus \{(0,b)\} \subset \mathbb{N} \times X$ 역시 성질 (5) 를 만족한다. 이는 $\gamma = \bigcap \mathcal{A}$ 에 모순이다. 따라서, $0 \in \mathcal{X}$ 이다. 이제 $n \in \mathcal{X}$ 이지만 $n^+ \notin \mathcal{X}$ 라 가정하자. 그러면 $(n^+, f(x)) \in \gamma$ 이므로 $(n^+, y) \in \gamma$, $y \neq f(x)$ 인 $y \in X$ 가 존재한다. 이번에도 역시 $\gamma \setminus \{(n^+, y)\} \in \mathcal{A}$ 임을 보이면 $n \in \mathcal{X} \Longrightarrow n^+ \in \mathcal{X}$ 가 증명되고, 따라서 모든 증명이 끝난다.

우선 $n^+ \neq 0$ 이므로 $(0,a) \in \gamma \setminus \{(n^+, y)\}$ 이다. 이제 $(m,z) \in \gamma \setminus \{(n^+, y)\}$ 라 가정하자. 만일 $m = n$ 이면 $z = x$ 이고 또한 $y \neq f(x)$ 이므로 $(m^+, f(z)) = (n^+, f(x)) \in \gamma \setminus \{(n^+, y)\}$ 임을 알 수 있다. 만일 $m \neq n$ 이면 정리 2.1.1 (마) 에 의하여 $m^+ \neq n^+$ 이고, 따라서 $(m^+, f(z)) \in \gamma \setminus \{(n^+, y)\}$ 이다. □

정리 2.1.2 를 적용하면, 각 자연수 $m \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$\gamma_m(0) = m, \qquad n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \gamma_m(n^+) = [\gamma_m(n)]^+$$

를 만족하는 함수 $\gamma_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 이 유일하게 존재함을 알 수 있다. 이제, 두 자연수의 더하기를

$$m + n = \gamma_m(n), \qquad m, n \in \mathbb{N}$$

이라 정의하면

$$m + 0 = m, \qquad m + n^+ = (m+n)^+, \qquad m, n \in \mathbb{N}$$

이 성립한다. 결합법칙, 교환법칙, 항등원에 관한 것들을 증명하기 앞서

$$n^+ = 1 + n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

임을 먼저 보이자. 먼저 $0^+ = 1 = 1 + 0$ 이다. 이 등식이 자연수 n 에 대하여 성립한다 가정하면 $(n^+)^+ = (1+n)^+ = 1 + n^+$ 이 성립하므로, 수

학적 귀납법을 적용할 수 있다. 곱하기를 정의하는 것도 정리 2.1.2 를 이용한다. 먼저, 각 자연수 $m \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$\delta_m(0) = 0, \qquad n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \delta_m(n^+) = \delta_m(n) + m$$

이 성립하는 함수 $\delta_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 을 잡은 후에,

$$mn = \delta_m(n), \qquad m, n \in \mathbb{N}$$

이라 정의한다. 그러면

$$m0 = 0, \qquad mn^+ = mn + m, \qquad m, n \in \mathbb{N}$$

이 성립한다.

정리 2.1.3. 임의의 $m, n, k \in \mathbb{N}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(가) $0 + n = n$, $(m + n) + k = m + (n + k)$ 및 $m + n = n + m$ 이다.
(나) $0n = 0$, $1n = n$, $(mn)k = m(nk)$ 및 $mn = nm$ 이다.
(다) $m(n + k) = mn + mk$ 및 $(n + k)m = nm + km$ 이다.

모든 증명은 귀납법을 사용한다. 먼저 $0 + 0 = 0$ 은 이미 알고 있고, $0 + n = n$ 이면 $0 + n^+ = (0 + n)^+ = n^+$ 이므로, (가) 의 첫째 명제가 증명된다. 둘째 명제는 m, n 을 고정하고 k 에 관한 귀납법을 사용하면 된다. 세째 명제 역시 m 을 고정하고 n 에 관한 귀납법을 사용하면 된다. 명제 (나), (다) 역시 수학적 귀납법을 사용하여 증명한다.

문제 2.1.1. 정리 2.1.3 을 증명하여라.

문제 2.1.2. 정리 2.1.2 를 이용하여 m^n 을 정의하고, 다음 연산 법칙들

$$m^{n+k} = m^n m^k, \qquad (mn)^k = m^k n^k \qquad (m^n)^k = m^{nk}$$

을 증명하여라.

이제 집합 $\mathbb{N}$ 에 순서를 정의하고 이 절을 맺기로 한다. 두 자연수 $m, n \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$m \leq n \iff m \in n \text{ 혹은 } m = n$$

이라 정의한다. 먼저 $m \leq m$ 임은 당연하다. 또한 $m \leq n$ 과 $n \leq m$ 이 동시에 성립한다 가정하자. 만일 $m \neq n$ 이면 $m \in n$ 과 $n \in m$ 이고, (4)에 의하여 $m \subset n$, $n \subset m$ 이 성립므로 $m = n$ 이 된다. 이제, $m \leq n$, $n \leq k$ 라 가정하자. 그러면 다음

$$m \in n,\ n \in k \qquad m \in n,\ n = k \qquad m = n,\ n \in k \qquad m = n,\ n = k$$

네 가지 경우가 생긴다. 처음 세 경우에는 $m \in k$ 가 성립하고, 나머지 경우에는 $m = k$ 가 성립하므로 $m \leq k$ 임을 알 수 있다. 따라서, $\leq$ 는 순서관계가 된다. 다음 정리는 자연수집합에 정의된 순서관계의 핵심적인 성질이다. 두 자연수 $m, n \in \mathbb{N}$ 이 $m \leq n$ 이면서 $m \neq n$ 일 때, $m < n$ 이라 쓴다. 따라서, $m < n \iff m \in n$ 이다. 특히, $m \in m^+$ 이므로 $m < m^+$ 이다.

정리 2.1.4. 비어 있지 않은 자연수들의 집합은 최소 원소를 가진다.

증명: 비어 있지 않은 자연수들의 집합 $A \subset \mathbb{N}$ 가 최소 원소를 가지지 않는다고 가정하고,

$$X = \{n \in \mathbb{N} : m \in A \Longrightarrow n \leq m\}$$

이라 두자. 만일 $k \in X \cap A$ 이면 k 는 A 의 최소 원소가 되므로 $X \cap A = \emptyset$ 이어야 한다. 이제 귀납법을 이용하여 $X = \mathbb{N}$ 임을 보이면 $A = \emptyset$ 이 되어서 모순을 얻는다.

이를 위하여 먼저 $0 \in X$, 즉 임의의 $m \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $0 \leq m$ 임을 보이는데, 이 또한 귀납법을 사용한다. 먼저 $0 \leq 0$ 은 자명하다. 만일

$0 \leq m$ 이면, $m \in m^+$ 에서 $m \leq m^+$ 이므로 $0 \leq m^+$ 를 얻는다. 다음으로 $n \in X \Longrightarrow n^+ \in X$ 을 보이기 위하여 $n \in X$ 를 가정하자. 즉,

$$m \in A \implies n \leq m$$

을 가정하자. 만일 $n \in A$ 이면 n 은 A 의 최소 원소이고, 이는 가정에 어긋난다. 따라서 $n \notin A$ 이고, 다음

$$m \in A \implies n < m$$

이 성립한다. 이제 다음

$$n < m \implies n^+ \leq m \tag{6}$$

을 보이면 모든 증명이 끝난다. 이 역시 n 을 고정하고 m 에 대한 귀납법을 사용하기 위하여

$$Y = \{m \in \mathbb{N} : n < m \implies n^+ \leq m\}$$

이라 두자. 먼저 $n < 0$ 이면 $n \in \emptyset$ 인데 이러한 원소 n 이 없으므로 $0 \in Y$ 임은 자명하다. 이제, $m \in Y$ 라 가정하자. 만일 $n < m^+$ 이면 $n \in m^+ = m \cup \{m\}$ 이고, 따라서 $n \in m$ 이거나 $n = m$ 이다. 먼저 $n \in m$ 이면 $n < m$ 이므로 귀납법 가정에 의하여 $n^+ \leq m < m^+$ 이고, $n = m$ 이면 $n^+ = m^+$ 이므로, 어느 경우나 $n^+ \leq m^+$ 이다. 따라서, $n < m^+ \Longrightarrow n^+ \leq m^+$ 가 성립하고 $m^+ \in Y$ 임을 알 수 있다. □

문제 2.1.3. $m \leq n \iff m^+ \leq n^+$ 임을 보여라.

두 자연수 $m, n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$ 는 최소 원소를 가지는데, 최소 원소가 m 이면 $m \leq n$ 이고, 최소 원소가 n 이면 $n \leq m$ 이다.

따름정리 2.1.5. 임의의 두 자연수 $m, n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $m \leq n$ 혹은 $n \leq m$ 이 성립한다.

다음 성질

$$n \in \mathbb{N} \implies n = 0 \text{ 혹은 } n = m^+ \text{ 인 } m \in \mathbb{N} \text{ 이 존재한다} \tag{7}$$

은 따름정리 2.1.6 과 정리 2.1.7 의 증명과정에서 유용하게 쓰인다.

문제 2.1.4. 귀납법을 이용하여 명제 (7) 을 증명하여라.

따름정리 2.1.6. 위로 유계이며 비어 있지 않은 자연수들의 집합 $A \subset \mathbb{N}$ 는 최대 원소를 가진다.

증명: 집합 A 의 상계 전체의 집합을 B 라 두면, 가정에 의하여 $B \neq \emptyset$ 이고 정리 2.1.4 에 의하여 최소 원소 $k \in \mathbb{N}$ 를 가진다. 임의의 $n \in A$ 에 대하여 $n \leq k$ 이므로 $k \in A$ 임을 보이면 k 가 A 의 최대 원소임이 증명된다. 이제, $k \notin A$ 이라 가정하자. 그러면, $n \in A$ 을 하나 잡았을 때 $k > n \geq 0$ 이고, 따라서 (7) 에 의하여 $k = s^+$ 이다. 만일 $s \notin B$ 이면 $s < t$ 인 $t \in A$ 가 존재하고, $s^+ \leq t \leq k = s^+$ 이므로 $k = t \in A$ 가 되어서 모순이다. 따라서 $s \in B$ 인데, $s < k$ 이므로 이는 k 가 B 의 최소 원소라는 데에 모순이다. 그러므로, $k \in A$ 임을 알 수 있다. □

다음 정리는 정수를 정의하는 데에 중요한 역할을 하는데, 큰 수에서 작은 수를 뺄 수 있음을 말해 준다.

정리 2.1.7. 만일 $n = m + k$ 이면 $n \geq m$ 이다. 역으로, 두 자연수 $m, n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $n \geq m$ 이면, $n = m + k$ 을 만족하는 자연수 $k \in \mathbb{N}$ 이 유일하게 존재한다.

정리의 유일성을 명확하게 쓰면 다음

$$m + k = m + \ell \implies k = \ell \tag{8}$$

과 같이 된다.

증명: 첫째 명제는 $m+k \geq m$ 을 보이면 되는데, k 에 관한 귀납법을 사용한다. 먼저, $k=0$ 이면 당연하고, $m+k \geq m$ 이라 가정하면, $m+k^+ = (m+k)^+ > m+k \geq m$ 이 된다.

둘째 명제의 존재성을 보이기 위하여

$$X = \{\ell \in \mathbb{N} : m+\ell \geq n\}$$

라 두면, $n \in X$ 이므로 $X \neq \emptyset$ 이다. 따라서, 정리 2.1.4 에 의하여 X 는 최소 원소 $k \in X$ 를 가지는데, $n = m+k$ 임을 증명하면 된다. 이를 위하여 $m+k > n$ 라 가정하자. 만일 $k=0$ 이면 $m > n$ 이 가정에 어긋나므로 $k \neq 0$ 이고, (7) 에 의하여 $k = s^+$ (단, $s \in \mathbb{N}$) 으로 쓸 수 있다. 그러면 $(m+s)^+ = m+s^+ = m+k > n$ 에서 $m+s \geq n$ 이고, 따라서 $s \in X$ 인데 $s < s^+ = k$ 이므로 k 가 X 의 최소 원소라는 데에 모순이다.

이제 (8) 을 보이면 증명이 끝나는데, k 에 관한 귀납법을 사용한다. 먼저

$$m+0 = m+\ell \implies 0 = \ell$$

을 보이자. 만일 $m = m+\ell$ 인데 $\ell \neq 0$ 이면 $\ell = s^+$ 이고,

$$m = m+\ell = m+s^+ = (m+s)^+ \geq m^+ > m$$

이 되어서 모순이다. 이제 (8) 이 성립한다고 가정하고 $m+k^+ = m+\ell$ 이라 하자. 만일 $\ell = 0$ 이면 방금 증명한 바에 의하여 $k^+ = 0$ 이므로, $\ell \neq 0$ 이고 $\ell = t^+$ 이다. 그러면

$$(m+k)^+ = m+k^+ = m+\ell = m+t^+ = (m+t)^+$$

에서 $m+k = m+t$ 를 얻고, 귀납법 가정에 의하여 $k=t$ 및 $k^+ = t^+ = \ell$ 을 얻는다. □

문제 2.1.5. $m+k \leq m+\ell \iff k \leq \ell$ 를 증명하여라.

2.2. 정수

자연수 $m, n \in \mathbb{N}$ 이 $n \le m$ 이면 정리 2.1.7 에 의하여 $m = n + k$ 인 자연수 $k \in \mathbb{N}$ 이 유일하게 존재하는데, 이러한 k 를 $m - n$ 으로 쓰자. 이제, $m < n$ 인 경우에도 $m - n$ 이 뜻을 가지게끔 수의 범위를 넓히려고 한다. 이러한 표현 $m - n$ 은 두 자연수 m, n 의 순서에 의존하므로, $m - n$ 대신에 순서쌍 (m, n) 을 생각하되 $m \ge n$ 이란 제한을 없애고 집합

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{N}\}$$

에서 시작하기로 하자. 집합 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 에 다음

$$(m, n) \sim (m', n') \iff m + n' = n + m'$$

과 같이 관계를 정의하면, $\sim$ 은 1.3 절의 보기 2 에서 보는 바와 같이 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 의 동치관계이고

$$m \ge k,\ n \ge k \Longrightarrow (m, n) \sim (m - k, n - k) \tag{9}$$

가 성립함을 금방 알 수 있다.

문제 2.2.1. 명제 (9) 가 성립함을 보여라.

이제 $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 을 원소로 가지는 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 의 동치류 $[(m, n)]$ 을 간단히 $[m, n]$ 으로 표시한다. 집합 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ 을 $\mathbb{Z}$ 라 쓰고 $\mathbb{Z}$ 의 원소를 **정수**라 부른다. 위의 관계 (9) 를 적용하면, 집합 $\mathbb{Z}$ 의 모든 원소를 적당한 자연수 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 다음

$$[n, 0], \qquad [0, 0], \qquad [0, n] \tag{10}$$

중의 하나로 표현할 수 있음을 쉽게 알 수 있다. 이제 집합 $\mathbb{Z}$ 에 다음

$$[m, n] \ge [k, \ell] \iff m + \ell \ge n + k \tag{11}$$

과 같이 관계를 정의하자. 만일 $(m,n) \sim (m',n')$ 이고 $(k,\ell) \sim (k',\ell')$ 이면 정리 2.1.7 에 의하여

$$m+\ell \geq n+k \iff m'+\ell' \geq n'+k'$$

임을 알 수 있다. 따라서, 정의 (11) 이 잘 정의되어 있고 이는 순서관계가 된다.

문제 2.2.2. 임의의 정수는 (10) 에 열거된 것 중에 하나임을 보여라. 또한, 정의 (11) 이 잘 정의된 순서관계임을 보여라.

정리 2.2.1. 정수집합 $\mathbb{Z}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(가) 임의의 원소 $a, b \in \mathbb{Z}$ 에 대하여 $a \geq b$ 이거나 $b \geq a$ 이다.

(나) 비어 있지 않은 $\mathbb{Z}$ 의 부분집합 S 가 위로 유계이면 S 는 최대원소를 가진다. 마찬가지로, 비어 있지 않은 $\mathbb{Z}$ 의 부분집합 S 가 아래로 유계이면 S 는 최소원소를 가진다.

증명: 만일 $m \geq n$ 이면

$$[m,0] \geq [n,0] \geq [0,0] \geq [0,n] \geq [0,m]$$

이 성립하므로 (가) 가 증명된다.

이제, (나) 를 증명하기 위하여 집합 A 가 위로 유계라 가정하고, 모든 정수를 (10) 에 있는 형태로 표시하여

$$B = \{k \in \mathbb{N} : [k,0] \in A\}$$

라 두자. 만일 $B \neq \emptyset$ 이면 B 가 위로 유계이므로 따름정리 2.1.6 에 의하여 최대 원소 n 을 가지는데, $[n,0]$ 이 A 의 최대 원소임을 바로 확인할 수 있다. 만일 $B = \emptyset$ 이면 A 의 모든 원소들은 $[0,k]$ 의 꼴로 표시된다. 이 때, $C = \{k \in \mathbb{N} : [0,k] \in A\}$ 의 최소 원소를 m 이라 두면 $[0,m]$ 이 A 의 최대 원소임을 알 수 있다. 집합 A 가 아래로 유계인 경우도 마찬가지이다. □

문제 2.2.3. 정리 2.2.1 의 증명을 마무리하여라.

이제, 정수 사이의 더하기를 다음

$$[m,n]+[k,\ell]=[m+k,n+\ell] \tag{12}$$

과 같이 정의하자. 그러면 이 연산이 잘 정의되어 있고 교환법칙과 결합법칙을 만족한다. 특히 $\mathbb{Z}$ 의 원소 $[0,0]$ 은 항등원의 역할을 한다. 또한, 정수 $[n,m]$ 이 $[m,n]$ 의 역원이 됨을 알 수 있다.

문제 2.2.4. 집합 $\mathbb{Z}$ 에 정의된 연산 (12) 가 잘 정의되어 있고, 2.3 절에 나오는 (체1), (체2), (체3), (체4) 가 성립함을 보여라.

이제 정수의 곱하기를 정의하자. 집합 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 의 원소 $[m,n]$ 과 $[k,\ell]$ 에 대하여

$$[m,n]\cdot[k,\ell]=[mk+n\ell, m\ell+nk] \tag{13}$$

이라 정의하면, 더하기의 경우와 마찬가지로 제대로 정의되어 있고 결합법칙과 교환법칙이 만족됨을 알 수 있다. 특히, $[1,0]$ 은 곱하기의 항등원이다.

문제 2.2.5. 연산 (13) 이 잘 정의되어 있음을 보여라. 또한, 집합 $\mathbb{Z}$ 에 정의된 연산 (12) 와 (13) 에 대하여 2.3 절에 나오는 (체5), (체6), (체8), (체9) 가 성립함을 보여라.

문제 2.2.6. 만일 $[m,n]\cdot[k,\ell]=[0,0]$ 이면 $[m,n]=[0,0]$ 이거나 $[k,\ell]=[0,0]$ 이 성립함을 보여라.

문제 2.2.7. 정수 집합 $\mathbb{Z}$ 에 곱하기에 관한 역원이 존재하지 않음을 보여라.

문제 2.2.8. 만일 $P=\{[n,0]\in\mathbb{Z} : n\in\mathbb{N},\ n\neq 0\}$ 이라 두면 2.3 절에 나오는 (순1) 이 성립함을 보여라.

함수 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ 를

$$f : n \mapsto [n,0] \tag{14}$$

로 정의하면 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ 가 단사함수이고 각 자연수 $m, n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 다음

$$f(m+n) = f(n) + f(m)$$

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

$$m \geq n \Longleftrightarrow f(m) \geq f(n)$$

이 성립하므로, 더하기, 곱하기 및 순서에 관한 한 $\mathbb{N}$ 은 $\mathbb{Z}$ 의 부분집합으로 생각할 수 있다. 이제부터, (10) 에 의하여 표시되는 정수를 각각 n, 0, $-n$ 으로 쓰기로 한다.

2.3. 유리수

이제, 정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$ 을 가감승제가 자유롭게 되도록 하려고 하는데, 그 전에 가감승제의 의미를 분명하게 짚고 넘어가는 것이 편리하다. 집합 F 에 두 이항연산

$$(x, y) \mapsto x + y, \qquad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

이 주어져서 다음에 열거한 성질 (체1) ~ (체9) 를 만족하면 이를 체라고 한다. 앞으로 $x \cdot y$ 는 그냥 xy 로 쓰기도 한다.

(체1) 임의의 $a, b, c \in F$ 에 대하여 $a + (b + c) = (a + b) + c$ 이다.
(체2) 다음 성질

$$\text{임의의 } a \in F \text{ 에 대하여 } a + e = e + a = a$$

을 만족하는 원소 $e \in F$ 가 존재한다.

위 성질을 만족하는 원소 $e' \in F$ 가 또 하나 있다면 $e = e + e' = e'$ 이다. 따라서 이러한 성질을 만족하는 원소는 하나밖에 없는데, 이를 앞으로 0 이라 쓰고 더하기의 **항등원**이라 한다.

(체3) 각 $a \in F$ 에 대하여 다음 성질

$$a + x = x + a = 0$$

을 만족하는 원소 $x \in F$ 가 있다.

만일 위 성질을 가지는 원소 $y \in F$ 가 또 하나 있다면

$$x = x + 0 = x + (a + y) = (x + a) + y = 0 + y = y$$

가 되어서 이 성질을 가지는 원은 유일하다. 원소 $a \in F$ 에 의하여 결정되는 이 원소를 $-a$ 라 쓰고, 이를 더하기에 관한 a 의 **역원**이라 한다. 또한 $b + (-a)$ 는 간단히 $b - a$ 로 쓴다.

(체4) 임의의 $a, b \in F$ 에 대하여 $a + b = b + a$ 이다.
(체5) 임의의 $a, b, c \in F$ 에 대하여 $a(bc) = (ab)c$ 이다.
(체6) 다음 성질

$$\text{임의의 } a \in F \text{ 에 대하여 } a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

을 만족하는 0 아닌 원소 $1 \in F$ 이 존재한다.
(체7) 각 $a \in F \setminus \{0\}$ 에 대하여 다음 성질 $ax = xa = 1$ 을 만족하는 원소 $x \in F$ 가 존재한다.

물론 (체6) 의 원소 1 도 유일하며, 이 특정 원소를 1 로 쓰고 곱하기의 **항등원**이라 한다. (체7) 의 원소 x 도 (체3) 의 경우와 마찬가지로 a 에 의하여 결정되는데, 이를 a^{-1} 혹은 $\dfrac{1}{a}$ 이라 쓰고 곱하기에 관한 a 의 **역원**이라 한다.

(체8) 임의의 $a, b \in F$ 에 대하여 $ab = ba$ 이다.
(체9) 임의의 $a, b, c \in F$ 에 대하여 $a(b + c) = ab + ac$ 이다.

위 열거한 성질 가운데 (체1) 부터 (체4) 까지는 더하기에 관한 성질들이고, (체5) 부터 (체8) 까지는 곱하기에 관한 성질들임을 알 수 있

다. 공리 (체9) 는 물론 더하기와 곱하기가 어떻게 관련되어 있는가 하는 점을 나타낸다. 어떤 집합이 체라 함은 간단히 말하여 더하기와 곱하기가 정의되고 가감승제가 자유롭다는 뜻이다.

보기 1. 정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$ 에 다음

$$a \sim_n b \iff a - b \text{ 는 } n \text{ 의 배수이다}$$

과 같이 정의하면 이는 동치관계가 된다. 여기서, $n = 2, 3, 4, \ldots$ 이다. 몫집합 $\mathbb{Z}/\sim_n$ 을 $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$ 이라 쓰고, 다음

$$[i] + [j] = [i + j], \qquad [i][j] = [ij]$$

과 같이 연산을 정의한다. 예를 들어, $\mathbb{Z}_5$ 에서는

$$[1] + [3] = [4], \qquad [3] + [4] = [7] = [2], \qquad [2][4] = [8] = [3]$$

과 같이 된다. 이 연산은 (체7) 을 제외한 모든 체의 성질들을 만족한다. 이 연산이 언제 (체7) 을 만족하는지 각자 따져 보기 바란다. □

문제 2.3.1. 보기 1 에 나오는 관계가 동치관계임을 보이고, 두 가지 연산이 잘 정의되어 있으며, (체7) 을 제외한 모든 체의 성질들을 만족함을 보여라. 이 연산이 (체7) 을 만족할 n 의 필요충분조건을 찾아라.

이제 체 위에 순서를 생각하려 하는데, 이를 설명하기 위하여 다음과 같이 양수라는 개념을 도입한다. 체 F 의 부분집합 S 에 대하여 집합 $-S$ 를

$$-S = \{-a : a \in S\}$$

로 정의하자.

체 F 에 비어 있지 않은 부분집합 P 가 존재하여 다음

(순1) $a, b \in P \Longrightarrow a + b,\ ab \in P$,

(순2) $F = P \cup \{0\} \cup (-P)$,

(순3) 집합 P, $\{0\}$ 및 $-P$ 는 서로소이다

과 같은 성질을 가지면 이를 **순서체**라 하고 P 의 원소를 **양수**라 한다. 순서체 F 의 두 원소 $a, b \in F$ 에 대하여, $a - b \in P$ 이면 a 가 b 보다 **크다**고 말하고 이를 $a > b$ 또 는 $b < a$ 로 쓴다. 각 정수 $a, b, c \in \mathbb{Z}$ 에 대하여 (체1) – (체6) 과 (체8) – (체9) 가 성립하고, 0 을 제외한 자연수 전체의 집합을 $P_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z}$ 라 두면 (순1) – (순3) 이 성립한다.

문제 2.3.2. 유한집합[(2)]은 순서체가 될 수 없음을 보여라.

문제 2.3.3. 순서체에 정의된 양수 집합 P 로부터 다음

$$a \leq b \iff b - a \in P \text{ 혹은 } a = b \tag{15}$$

과 같이 정의하면, 이는 순서관계가 됨을 보여라.

문제 2.3.4. 순서체 F 의 임의의 원소 $a, b, c \in F$ 에 대하여 다음을 보여라.

(가) $a \geq b,\ a \leq b \Longrightarrow a = b.$
(나) $a \leq b,\ b \leq c \Longrightarrow a \leq c.$
(다) $a + b < a + c \iff b < c.$
(라) $a > 0,\ b < c \Longrightarrow ab < ac.$
(마) $a < 0,\ b < c \Longrightarrow ab > ac.$
(바) $a^2 \geq 0$, 특히 $1 > 0$.
(사) $0 < a < b \Longrightarrow 0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}.$
(아) $a, b > 0$ 이면 $a^2 < b^2 \iff a < b.$

순서체 F 의 원소 $a \in F$ 의 **절대값** $|a|$ 를 다음

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

과 같이 정의한다. 이는 코시수열을 이용하여 실수를 구성할 때에 중요한 역할을 한다.

정리 2.3.1. 순서체 F 의 임의의 원소 $a, b, c \in F$ 에 대하여 다음이 성립한다.

---

(2) 집합 X 와 적절한 자연수 $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ 사이에 전단사함수가 있으면 X 를 유한집합이라 한다. 유한집합과 무한집합에 대해서는 3.4 절에서 자세히 다룬다.

(가) $|a| \geq 0$ 이다. 또한, $|a| = 0 \iff a = 0$.
(나) $|ab| = |a|\,|b|$.
(다) $b \geq 0$ 이면 $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$.
(라) $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$.
(마) $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$.

증명: (가), (나) 및 (다) 는 가능한 모든 경우를 따로따로 따져 봄으로써 쉽게 밝힐 수 있다. 이제, (다) 의 특수한 경우로서 $-|a| \leq a \leq |a|$ 임을 알 수 있고 b 나 $-b$ 에 대하여도 마찬가지이므로

$$-(|a| + |b|) \leq a \pm b \leq |a| + |b|$$

를 얻고, (다) 를 다시 적용하면

$$|a \pm b| \leq |a| + |b| \tag{16}$$

임을 알 수 있다. 부등식 $||a| - |b|| \leq |a \pm b|$ 는 방금 증명한 (16) 으로부터 쉽게 유도되고, (마) 는 (라) 에서 바로 나온다. □

문제 2.3.5. 정리 2.3.1 의 (가), (나), (다) 및 (라) 의 첫째 부등식을 증명하여라.

이제, (체7) 까지 성립하도록 '수'의 범위를 넓히고자 하는데, 이는 빼기를 하기 위하여 자연수를 정수로 확장하는 과정과 비슷하다. 집합 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ 에 다음

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = cb \tag{17}$$

과 같이 관계를 정의하면, 이는 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ 의 동치관계가 된다. 집합 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})/\!\sim$ 을 $\mathbb{Q}$ 라 쓰고, $\mathbb{Q}$ 의 각 원소를 유리수라 부른다. 여기서도, 각 유리수를 나타내는 동치류 $[(a, b)]$ 를 그냥 $[a, b]$ 로 쓴다. 이제, 더하기와 곱하기를

$$[a, b] + [c, d] = [ad + cb, bd], \qquad [a, b] \cdot [c, d] = [ac, bd] \tag{18}$$

라 정의한다. 만일 각 $a \in \mathbb{Z}$ 에 대하여 $a^* = [a, 1]$ 이라 쓰면 0^* 과 1^* 은 각각 더하기와 곱하기에 대한 항등원이 된다.

문제 2.3.6. 관계 (17) 이 동치관계임을 보여라. 정의 (18) 이 잘 정의되어 있음을 보여라. 유리수 전체의 집합 $\mathbb{Q}$ 가 체임을 보여라.

집합 $P_{\mathbb{Z}}$ 가 (순2), (순3) 을 만족하므로, 집합 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ 의 모든 원소는

$$\{0\} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}), \quad P_{\mathbb{Z}} \times P_{\mathbb{Z}}, \quad P_{\mathbb{Z}} \times (-P_{\mathbb{Z}}), \quad (-P_{\mathbb{Z}}) \times P_{\mathbb{Z}}, \quad (-P_{\mathbb{Z}}) \times (-P_{\mathbb{Z}})$$

로 분할된다. 그런데, 임의의 $(a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ 에 대하여 $(a, b) \sim (-a, -b)$ 이므로, 임의의 유리수는 다음 세 집합

$$\{0\} \times P_{\mathbb{Z}}, \qquad P_{\mathbb{Z}} \times P_{\mathbb{Z}}, \qquad (-P_{\mathbb{Z}}) \times P_{\mathbb{Z}}$$

에 속하는 원소들을 대표원으로 하는 동치류에 의하여 결정된다. 이제

$$P_{\mathbb{Q}} = \{[a, b] : (a, b) \in P_{\mathbb{Z}} \times P_{\mathbb{Z}}\}$$

라 정의하면, (순2), (순3) 을 만족한다. 또한, $P_{\mathbb{Z}}$ 가 (순1) 을 만족하므로, 정의 (18) 에 의하여 당연히 $P_{\mathbb{Q}}$ 도 (순1) 을 만족한다. 따라서, $\mathbb{Q}$ 는 순서체임을 알 수 있고, (15) 에 의하여 순서관계가 주어진다.

문제 2.3.7. 임의의 $[a, b], [c, d] \in \mathbb{Q}$ 에 대하여

$$[a, b] \geq [c, d] \iff abd^2 \geq cdb^2$$

이 성립함을 보여라.

함수 $a \mapsto a^* = [a, 1] : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ 가 단사함수임은 자명하다. 또한, 다음 성질들

$$(a + b)^* = a^* + b^*$$

$$(ab)^* = a^* b^*$$

$$a \geq b \iff a^* \geq b^*$$

이 성립하므로, 더하기, 곱하기 및 순서에 관한 한 $\mathbb{Z}$ 은 $\mathbb{Q}$ 의 부분집합으로 생각할 수 있다. 이제부터, 유리수 $[a, b]$ 를 그냥 $\dfrac{a}{b}$ 라 쓴다.

임의의 순서체 F 는 더하기와 곱하기에 관한 항등원 0 과 1 을 가진다. 정리 2.1.2 를 적용하면 다음 성질

$$\gamma(0) = 0$$

$$\gamma(n+1) = \gamma(n^+) = \gamma(n) + 1, \qquad n \in \mathbb{N}$$

을 만족하는 함수 $\gamma : \mathbb{N} \to F$ 가 유일하게 존재한다. 여기서 좌변의 더하기는 $\mathbb{N}$ 에서 정의된 더하기이고, 우변의 더하기는 순서체 F 의 더하기이다. 특히, 우변의 0 과 1 은 순서체 F 의 더하기와 곱하기에 관한 항등원이다. 이제,

$$\gamma(n+m) = \gamma(n) + \gamma(m), \quad \gamma(nm) = \gamma(n)\gamma(m), \qquad m, n \in \mathbb{N} \quad (19)$$

이 성립함을 보이자. 먼저 $m = 0$ 이면 당연하다. 만일 $m \in \mathbb{N}$ 에 대하여 성립한다면

$$\begin{aligned}\gamma(n + m^+) &= \gamma((n+m)^+) = \gamma(n+m) + 1 \\ &= \gamma(n) + \gamma(m) + 1 = \gamma(n) + \gamma(m^+)\end{aligned}$$

이므로, 임의의 $m, n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 (19) 의 첫째 식이 성립한다. 둘째 식 역시 $m = 0$ 이면 당연하고, 귀납법 가정에 의하여

$$\begin{aligned}\gamma(nm^+) &= \gamma(nm + n) = \gamma(nm) + \gamma(n) \\ &= \gamma(n)\gamma(m) + \gamma(n) = \gamma(n)[\gamma(m) + 1] = \gamma(n)\gamma(m^+)\end{aligned}$$

가 되어 증명된다. 또한, 임의의 순서체에서 $0 < 1$ 이므로 $1 \in P_F$ 이다. 만일 $\gamma(n) \in P_F$ 이면 $\gamma(n^+) = \gamma(n) + 1 \in P_F$ 가 되어 다음

$$\gamma(n) \in P_F, \qquad n = 1, 2, \ldots \quad (20)$$

이 성립함을 알 수 있다. 끝으로 $\gamma : \mathbb{N} \to F$ 가 단사함수임을 보이자. 이를 위하여 $n > m$, $\gamma(n) = \gamma(m)$ 이라 가정하자. 그러면 $n = m + k$ 인 $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 를 잡을 수 있고,

$$\gamma(k) = [\gamma(m) + \gamma(k)] - \gamma(m) = \gamma(m+k) - \gamma(m) = \gamma(n) - \gamma(m) = 0$$

인데, 이는 (20) 에 모순이다. 따라서, $\gamma : \mathbb{N} \to F$ 는 (19) 와 (20) 을 만족하는 단사함수이다.

이제, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ 임을 염두에 두고, 함수 $\gamma : \mathbb{N} \to F$ 의 정의역을 $\mathbb{Q}$ 에 확장하자. 먼저, 함수 $\gamma : \mathbb{Z} \to F$ 를

$$\gamma(n) = \gamma(n), \qquad \gamma(-n) = -\gamma(n), \qquad n \in \mathbb{N}$$

이라 정의한다. 두 함수 $\gamma : \mathbb{N} \to F$ 와 $\gamma : \mathbb{Z} \to F$ 는 그 함수값이 $\mathbb{N}$ 위에서 일치하므로, 같은 기호를 사용해도 무방하다. 마찬가지로 $\gamma : \mathbb{Q} \to F$ 를 다음

$$\gamma\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\gamma(a)}{\gamma(b)}, \qquad (a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

과 같이 정의한다. 이렇게 정의된 함수 $\gamma : \mathbb{Q} \to F$ 가 잘 정의되어 있고, (19) 와 (20) 을 만족하는 단사함수가 됨은 각자 살펴 보기 바란다.

정리 2.3.2. 임의의 순서체 F 에 대하여 다음 성질

(가) 임의의 $r, s \in \mathbb{Q}$ 에 대하여

$$\gamma(r + s) = \gamma(r) + \gamma(s), \qquad \gamma(rs) = \gamma(r)\gamma(s)$$

가 성립한다,

(나) $\gamma(P_{\mathbb{Q}}) = \gamma(\mathbb{Q}) \cap P_F$ 이다

을 만족하는 단사함수 $\gamma : \mathbb{Q} \to F$ 가 유일하게 존재한다.

문제 2.3.8. 정리 2.3.2 의 증명을 마무리하여라. 또한 F 의 곱하기에 관한 항등원을 1_F 이라 두면, 임의의 $r \in Q$ 에 대하여 $\gamma(r) = r \cdot 1_F$ 임을 보여라.

정리 2.3.2 는 임의의 순서체 F 가 유리수체 $\mathbb{Q}$ 를 포함할 뿐 아니라 두 순서체의 연산과 순서를 구별할 필요가 없음을 말해 준다. 앞으로 순서체 F 에 대하여 논의하는 경우 그 안에 유리수체가 있는 것으로, 즉, $\mathbb{Q} \subset F$ 인 것으로 간주한다.

정리 2.3.3. 순서체 F 에 대하여 다음은 동치이다.

(가) $x > 0$ 이면 $x > \dfrac{1}{n}$ 인 자연수 $n = 1, 2, \ldots$ 이 존재한다.

(나) $y > 0$ 이면 $y < n$ 인 자연수 $n = 1, 2, \ldots$ 이 존재한다.

(다) 집합 $\mathbb{N}$ $(\subset F)$ 은 위로 유계가 아니다.

(라) 임의의 $x, y > 0$ 에 대하여 $y < nx$ 를 만족하는 자연수 $n \in \mathbb{N}$ 이 존재한다.

순서체 F 가 위 명제의 동치 조건들을 만족하면 아르키메데스[(3)] 성질을 만족한다고 말한다.

문제 2.3.9. 정리 2.3.3 을 증명하여라.

정리 2.3.4. 유리수체는 아르키메데스 성질을 만족한다.

증명: 만일 $m, n \in P_{\mathbb{Z}}$ 이면 $\dfrac{n}{m} < 2n$ 이다. □

2.4. 데데킨트절단과 실수

이제, 유리수로부터 실수를 구성하여 보자. 유리수들의 집합 $\alpha \subset \mathbb{Q}$ 가 다음 성질들

(절1) $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \neq \mathbb{Q}$ 이다,

(절2) 만일 $p \in \alpha$, $q \in \mathbb{Q}$, $q < p$ 이면 $q \in \alpha$ 이다,

(절3) 만일 $p \in \alpha$ 이면 $p < r$ 인 $r \in \alpha$ 가 존재한다

을 만족하면, 이를 데데킨트[(4)]절단 혹은 그냥 절단이라 한다. 데데킨트절단 전체의 집합을 $\mathbb{R}$ 이라 쓰고, 이 집합의 원소, 즉 데데킨트절단

(3) Archimedes (287∼212 B.C.). 아르키메데스 성질을 만족하지 않는 순서체의 예를 알고 싶은 이는 참고문헌 [27], 2.5 절의 연습문제 8∼10 번 혹은 [15], 1 장을 참조하라.

(4) Julius Wihelm Richard Dedekind (1831∼1916), 독일 수학자. Göttingen 에서 학위를 받은 후, 취리히 및 독일 중부의 Braunschweig 등에서 활동하였다.

을 **실수**라 부른다. 임의의 $r \in \mathbb{Q}$ 에 대하여

$$r^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < r\}$$

은 절단이다.

문제 2.4.1. 임의의 $r \in \mathbb{Q}$ 에 대하여 r^* 가 절단임을 보여라.

보기 1. 집합

$$\alpha = \{p \in \mathbb{Q} : p \le 0\} \cup \{p \in \mathbb{Q} : 0 < p,\ p^2 < 2\}$$

은 절단이다. 우선 $0 \in \alpha$, $2 \notin \alpha$ 임은 바로 확인할 수 있다. 다음으로 $q < p \in \alpha$ 일 때, $q \le 0$ 이면 당연히 $q \in \alpha$ 이고, $0 < q < p$ 이고 $p^2 < 2$ 이면 $q^2 < 2$ 임을 바로 확인할 수 있으므로 $q \in \alpha$ 이다. 이제 (절3) 을 보이기 위하여 $p \in \alpha$ 를 택하자. 만일 $p \le 0$ 이면 $p < 1 \in \alpha$ 이므로 $0 < p$, $p^2 < 2$ 라 가정하고, 정리 2.3.4 를 적용하여 $\frac{1}{n}(2p+1) < 2 - p^2$ 인 자연수 n 을 잡자. 그러면

$$\left(p + \frac{1}{n}\right)^2 \le p^2 + \frac{2}{n}p + \frac{1}{n} < 2$$

가 되어서 $p + \frac{1}{n} \in \alpha$ 이고, α 는 절단임을 알 수 있다.

이제, 어떤 $r \in \mathbb{Q}$ 에 대하서도 $\alpha \ne r^*$ 임을 보이자. 이를 위하여 $\alpha = r^*$ 인 유리수 $r \in \mathbb{Q}$ 가 있다고 가정하자. 만일 $r^2 < 2$ 이면 위에서 살펴본 바와 같이 $\left(r + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$ 인 자연수 $n \in \mathbb{M}$ 을 잡을 수 있다. 그러면 $r + \frac{1}{n} \in \alpha$ 이지만 $r + \frac{1}{n} \notin r^*$ 이어서 모순이다. 이번에는 $r^2 > 2$ 라 가정하자. 그러면 마찬가지 방법으로 $\left(r - \frac{1}{m}\right)^2 > 2$ 인 자연수 $m \in \mathbb{N}$ 을 잡을 수 있다. 그러면 $r - \frac{1}{m} \notin \alpha$ 이지만 $r - \frac{1}{m} \in r^*$ 가 되어서 다시 모순이다. 따라서 $r^2 = 2$ 인데, 이러한 유리수가 존재하지 않는다는 것을 알고 있다. $\square$

문제 2.4.2. 양의 유리수 $r \in P_{\mathbb{Q}}$ 가 $r^2 > 2$ 이면 $\left(r - \dfrac{1}{m}\right)^2 > 2$ 인 자연수 $m \in \mathbb{N}$ 이 존재함을 보여라.

절단 α 에 대하여 $\alpha^c = \mathbb{Q} \setminus \alpha$ 라 두면, 다음

$$p \in \alpha,\ q \in \alpha^c \Longrightarrow p < q, \qquad r \in \alpha^c,\ r < s \Longrightarrow s \in \alpha^c$$

이 성립한다. 따라서, 두 집합 α, α^c 는 $\mathbb{Q}$ 를 수직선 위의 점들로 생각하면 '왼쪽'과 '오른쪽'으로 분할한다. 이 때, 왼쪽 집합은 (절3) 에 의하여 최대값을 가지지 않는 것으로 간주한다.

이제, 두 절단 α, β 에 대하여

$$\alpha \le \beta \iff \alpha \subset \beta$$

으로 정의하면 순서관계를 얻는다. 물론, 여기서도 $\alpha \le \beta$ 이면서 $\alpha \neq \beta$ 이면 $\alpha < \beta$ 라 쓴다. 만일 $\alpha \subset \beta$ 이 아니면, $p \notin \beta$ 인 $p \in \alpha$ 가 존재한다. 만일 $q \in \beta$ 이면 $p \notin \beta$ 로부터 $q < p$ 임을 알 수 있고, 따라서 $q \in \alpha$ 이다. 즉, $\alpha \subset \beta$ 이 아니면 $\beta \subset \alpha$ 가 되므로, 두 절단 α, β 가 주어지면 $\alpha \le \beta$ 혹은 $\alpha \ge \beta$ 가 성립함을 알 수 있다. 따라서, 다음 명제가 증명되었다.

정리 2.4.1. 임의의 실수 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 에 대하여 다음

$$\alpha > \beta, \qquad \alpha = \beta, \qquad \alpha < \beta$$

중 한 명제가 성립하고, 또한 두 명제가 동시에 성립하지 않는다.

앞으로,

$$P_{\mathbb{R}} = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > 0^*\}$$

이라 둔다. 정리 2.4.1 은 (순2) 및 (순3) 이 성립함을 말해 준다.

정리 2.4.2. 비어 있지 않은 집합 $A \subset \mathbb{R}$ 가 위로 유계이면 A 는 상한을 가진다.

증명: 비어 있지 않은 집합 $A \subset \mathbb{R}$ 가 위로 유계일 때, $\alpha = \bigcup\{\beta \in A\}$ 가 A 의 상한임을 보이려 한다. 먼저, $\alpha \subset \mathbb{Q}$ 가 절단임을 보이자. 우선, $\beta \in A$ 를 하나 잡으면 $\alpha \supset \beta \neq \emptyset$ 이고, A 의 상계 $\gamma \in \mathbb{R}$ 을 하나 잡으면 $\alpha \subset \gamma \subsetneq \mathbb{Q}$ 이다. 만일 $p \in \alpha$ 이면 $p \in \beta$ 인 $\beta \in A$ 가 존재한다. 만일 $q < p$ 이면 $q \in \beta \subset \alpha$ 이므로 (절2) 가 증명된다. 만일 $p < q$ 인 $q \in \beta$ 를 잡으면 $q \in \alpha$ 이므로 (절3) 역시 증명되고, 따라서 $\alpha \in \mathbb{R}$ 이다.

이제 α 가 A 의 상계임은 자명하다. 만일 $\delta < \alpha$ 이면 $\delta \subsetneq \alpha$ 이므로 $r \in \alpha \setminus \delta$ 를 잡을 수 있는데, $r \in \alpha$ 로부터 $r \in \beta$ 인 $\beta \in A$ 가 존재한다. 그러면 $r \in \beta$ 이고 $r \notin \delta$ 이므로 $\beta \not\subset \delta$ 이고, 정리 2.4.1 에 의하여 $\delta < \beta$ 가 성립한다. 그런데 $\beta \in A$ 이므로, 이는 δ 가 A 의 상한이 아님을 뜻한다. 따라서 δ 가 A 의 상한이면 $\delta \geq \alpha$ 이어야 하고, 이는 α 가 A 의 최소 상계임을 말해 준다. □

이제, 순서집합 $\mathbb{R}$ 에 연산을 정의할 차례이다. 먼저 $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$\alpha + \beta = \{s + t \in \mathbb{Q} : s \in \alpha,\ t \in \beta\} \tag{21}$$

이라 정의한다. 먼저, $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$ 임을 보이는데, $\alpha + \beta \neq \emptyset$ 임은 자명하다. 만일 $u \notin \alpha$, $v \notin \beta$ 이면 임의의 $s \in \alpha$, $t \in \beta$ 에 대하여 $u + v > s + t$ 인데, 이는 임의의 $r \in \alpha + \beta$ 에 대하여 $u + v > r$ 란 말이다. 따라서 $u+v \notin \alpha+\beta$ 이고, $\alpha+\beta \subsetneq \mathbb{Q}$ 이다. 이제, (절2) 와 (절3) 을 보이기 위하여 $p \in \alpha+\beta$ 라 하자. 그러면 $p = s+t$ (단, $s \in \alpha$, $t \in \beta$) 이다. 만일 $q < p$ 이면 $q - t < s$, $s \in \alpha$ 에서 $q - t \in \alpha$ 가 성립하고, $q = (q-t)+t \in \alpha+\beta$ 이므로 (절2) 가 증명된다. 만일 $s < r$ 인 $r \in \alpha$ 을 잡으면 $p < r + t$ 이고, $r + t \in \alpha + \beta$ 이므로 (절3) 이 증명되었다.

문제 2.4.3. 연산 (21) 에 대하여 결합법칙 (체1) 과 교환법칙 (체4) 가 성립함을 보여라.

이제, $0^* \in \mathbb{R}$ 가 더하기에 관한 항등원이 됨을 보이자. 이를 위하여 임의의 $\alpha \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $\alpha + 0^* = \alpha$ 임을 보이면 된다. 먼저 $r \in \alpha$, $s \in 0^*$ 이면 $r + s < r$ 이므로 $r + s \in \alpha$ 이고, 따라서 $\alpha + 0^* \subset \alpha$ 임을 알 수 있다. 만일 $p \in \alpha$ 이면 $p < r$ 인 $r \in \alpha$ 를 택할 수 있다. 그러면 $p - r \in 0^*$ 이므로 $p = r + (p - r) \in \alpha + 0^*$ 이 되어, $\alpha \subset \alpha + 0^*$ 임을 알 수 있다.

만일 $\alpha > 0^*$ 이면 $p \in \alpha \setminus 0^*$ 을 택할 수 있다. 이는 $0 \le p$, $p \in \alpha$ 를 뜻하므로 $0 \in \alpha$ 임을 알 수 있다. 역으로, $0 \in \alpha$ 이면 $p < 0 \Longrightarrow p \in \alpha$ 인데, 이는 $0^* < \alpha$ 임을 뜻한다. 따라서, 다음

$$0^* < \alpha \iff 0 \in \alpha$$

을 얻는다. 이로부터, (순1) 의 첫째명제는 바로 나온다.

한편, 더하기에 관한 역원이 있음을 보이기 위하여, 각 $\alpha \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$\beta = \{p \in \mathbb{Q} : r > p,\ -r \notin \alpha \text{ 인 } r \in \mathbb{Q} \text{ 이 존재한다}\}$$

라 두고, $\beta \in \mathbb{R}$ 과 $\alpha + \beta = 0^*$ 임을 보이자. 먼저 $s \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ 를 택하고 $p < -s$ 인 $p \in \mathbb{Q}$ 를 택하면 $p \in \beta$ 이다. 또한, $q \in \alpha$ 를 택하면

$$r > -q \implies -r < q \implies -r \in \alpha$$

이므로 $-q \notin \beta$ 이다. 이제, $p \in \beta$ 라 하고 $r > p$, $-r \notin \alpha$ 인 $r \in \mathbb{Q}$ 를 잡자. 만일 $q < p$ 이면 $r > q$, $-r \notin \alpha$ 이므로 $q \in \beta$ 이다. 만일 $s = \dfrac{p+r}{2}$ 라 두면 $r > s$, $-r \notin \alpha$ 이므로 $s \in \beta$ 이고, $p < s$ 이므로 β 가 절단임이 증명되었다.

만일 $q \in \alpha$, $p \in \beta$ 이면 $r > p$, $-r \notin \alpha$ 인 $r \in \mathbb{Q}$ 를 잡을 수 있다. 그러면 $q \in \alpha, -r \notin \alpha$ 로부터 $q < -r$ 을 얻는다. 따라서, $-(q + p) = (r - p) + (-r - q) > 0$ 이고 $q + p < 0$ 을 얻어서, $\alpha + \beta \subset 0^*$ 임이 증명되었다. 끝으로 $0^* \subset \alpha + \beta$ 임을 보이자. 이를 위하여 $s \in 0^*$ 에 대하여

$t = \dfrac{-s}{2} > 0$ 이라 하고

$$A = \{n \in \mathbb{Z} : nt \in \alpha\}$$

라 두자. 만일 A 가 위로 유계가 아니라 가정하자. 그러면 정리 2.3.4 를 적용하여 임의의 $q \in \mathbb{Q}$ 에 대하여 $q < mt$ 인 $m \in \mathbb{N}$ 을 잡을 수 있다. 그런데 m 은 A 의 상계가 아니므로 $m < n$ 인 $n \in A$ 가 존재한다. 결국, $q < nt$ 이고, $nt \in \alpha$ 이므로 $q \in \alpha$ 이고, 따라서 $\alpha = \mathbb{Q}$ 가 되어서 모순이다. 그러므로 A 는 위로 유계이며, 정리 2.1.4 에 의하여 최대 원소 $n_0 \in A$ 를 가진다. 즉, $n_0t \in \alpha$ 이고 $(n_0+1)t \notin \alpha$ 이다. 이제 $r = s - n_0t = -(n_0+2)t$ 라 두자. 그러면 $-(n_0+1)t > r$ 과 $(n_0+1)t \notin \alpha$ 로부터 $r \in \beta$ 임을 알게 된다. 따라서, $s = n_0t + r \in \alpha + \beta$ 이다. 결국, $\alpha + \beta = 0^*$ 임이 증명되었으므로 β 는 α 의 역원이고, 앞으로는 $-\alpha$ 로 쓰기로 한다.

이제, 실수의 곱하기를 정의하는데, 먼저 양수 $\alpha, \beta \in P_{\mathbb{R}}$ 에 대하여 정의하자. 임의의 $\alpha, \beta \in P_{\mathbb{R}}$ 에 대하여

$$\alpha\beta = \{p \in \mathbb{Q} : p \le rs \text{ 인 } r \in \alpha \cap P_{\mathbb{Q}},\ s \in \beta \cap P_{\mathbb{Q}} \text{ 가 존재한다}\}$$

로 정의한다.

문제 2.4.4. 임의의 $\alpha, \beta \in P_{\mathbb{R}}$ 에 대하여

$$\alpha\beta = 0^* \cup \{rs : 0 \le r \in \alpha,\ 0 \le s \in \beta\}$$

임을 보여라.

먼저 $\alpha\beta$ 가 절단임을 보이자. 우선 $0 \in \alpha,\ 0 \in \beta$ 이므로 $0 \in \alpha\beta$ 이다. 또한, $u \notin \alpha$, $v \notin \beta$ 이면 $uv \notin \alpha\beta$ 이다. 실제로 임의의 $s \in \alpha$, $t \in \beta$ 에 대하여 $s < u$, $t < v$ 이므로 $st < uv$ 이고, 따라서 (절1) 이 증명된다. (절2) 와 (절3) 또한 정의에 의하여 자명하다. 따라서 $\alpha\beta \in \mathbb{R}$ 이고, 특히 (순1) 의 둘째 명제가 증명되었다. 이제, 각 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 에 대하여 다음

$$\alpha\beta = \begin{cases} 0^*, & \alpha = 0^* \text{ 혹은 } \beta = 0^* \\ -(-\alpha)\beta, & \alpha \in -P_{\mathbb{R}},\ \beta \in P_{\mathbb{R}} \\ -\alpha(-\beta), & \alpha \in P_{\mathbb{R}},\ \beta \in -P_{\mathbb{R}} \\ (-\alpha)(-\beta), & \alpha \in -P_{\mathbb{R}},\ \beta \in -P_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

과 같이 정의한다.

문제 2.4.5. 집합 $\mathbb{R}$ 에 정의된 더하기와 곱하기에 대하여 (체5), (체8), (체9) 가 성립함을 보여라. [도움말: 먼저 $P_{\mathbb{R}}$ 의 원소들에 대하여 증명한다.]

문제 2.4.6. 각 실수 $\alpha \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $\alpha 1^* = 1^*\alpha = \alpha$ 임을 보여라. 또한, $0^* < 1^*$ 임을 보여라.

이제, 곱하기에 관한 역원의 존재를 보이면 $\mathbb{R}$ 이 순서체임을 증명하는 과정이 모두 끝난다. 각 $\alpha \in P_{\mathbb{R}}$ 에 대하여

$$\gamma = 0^* \cup \{0\} \cup \{q \in P_{\mathbb{Q}} : r > q,\ \frac{1}{r} \notin \alpha \text{ 인 } r \in P_{\mathbb{Q}} \text{ 이 존재한다}\} \tag{22}$$

라 정의한다.

문제 2.4.7. (22) 에서 정의된 γ 가 절단임을 보이고, $\alpha\gamma = 1^*$ 임을 보여라.

이제, 각 $\alpha \in -P_{\mathbb{R}}$ 에 대하여

$$\alpha\left(-\frac{1}{-\alpha}\right) = -\alpha\left(\frac{1}{-\alpha}\right) = (-\alpha)\left(\frac{1}{-\alpha}\right) = 1$$

이므로, $\alpha \neq 0$ 인 $\alpha \in \mathbb{R}$ 는 곱하기에 관한 역원을 가진다.

결론적으로, 이 절에서 구성한 집합 $\mathbb{R}$ 은 정리 2.4.2 를 만족하는 순서체임을 증명하였다. 마지막으로, 임의의 $r, s \in \mathbb{Q}$ 에 대하여 다음 성질들

$$\begin{gathered} r = s \iff r^* = s^* \\ (r+s)^* = r^* + s^* \\ (rs)^* = r^* s^* \\ r \in P_{\mathbb{Q}} \iff r^* \in P_{\mathbb{R}} \end{gathered} \tag{23}$$

이 성립함을 보이는데, 이는

$$r \mapsto r^* : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$

이 연산과 순서를 보존하는 단사함수임을 말한다.

2.5. 코시수열과 실수

자연수집합 $\mathbb{N}$ 에서 집합 X 로 가는 함수 $x : \mathbb{N} \to X$ 를 X 의 **수열**이라 부른다. 순서체 F 의 수열 $x : \mathbb{N} \to F$ 와 $a \in F$ 가 주어져 있을 때, 임의의 $e \in P_F$ 에 대하여 다음 성질

$$i \geq N \implies |x(i) - a| < e$$

을 만족하는 자연수 $N \in \mathbb{N}$ 이 존재하면, x 가 $a \in F$ 로 **수렴**한다고 말한다. 또한, 임의의 $e \in P_F$ 에 대하여 다음 성질

$$i, j \geq N \implies |x(i) - x(j)| < e$$

을 만족하는 자연수 N 이 존재하면, x 를 **코시**(5)**수열**이라 부른다. 특히, 유리수의 코시수열을 **기본열**이라 부른다. 임의의 유리수 $r \in \mathbb{Q}$ 에 대하여

$$r^*(i) = r, \qquad i \in \mathbb{N}$$

이라 정의하면 r^* 는 당연히 기본열이다. 끝으로, 순서체 F 의 수열 x 에 대하여 다음 성질

$$|x(i)| \leq M, \qquad i \in \mathbb{N}$$

을 만족하는 $M \in F$ 가 있으면, 이는 **유계수열**이라 한다.

문제 2.5.1. 순서체 F 의 수열 $x : \mathbb{N} \to F$ 가 유계일 필요충분조건은 집합 $\{x(i) \in X : i \in \mathbb{N}\}$ 이 위로 유계이고 동시에 아래로 유계임을 보여라.

(5) Augustin Louis Cauchy (1789∼1857), 프랑스 수학자. 원래, 토목공학을 전공하려 하였으나, École Polytechnique 의 라플라스 등이 권하여 수학을 하게 되었다. 1816 년부터 École Polytechnique 의 교수로 있으면서 수많은 논문과 저작을 남겼으나, 1830 년 혁명 이후 정치적인 이유(왕당파)로 쫓겨 나기도 했다가 1848 년 복귀하였다. 그에 관한 전기로 [9] 등이 있다.

정리 2.5.1. 순서체 F 의 수열 $x : \mathbb{N} \to F$ 가 수렴하면 코시수열이다. 또한 임의의 코시수열은 유계이다.

증명: $x : \mathbb{N} \to F$ 가 $a \in F$ 로 수렴하고,

$$i \geq N \implies |x(i) - a| < \frac{e}{2}$$

인 자연수 N 을 잡자. 그러면, 임의의 $i, j \geq N$ 에 대하여

$$|x(i) - x(j)| \leq |x(i) - a| + |x(j) - a| < \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e$$

가 되어, x 는 코시수열이다. 이제 x 가 코시수열이라 가정하고,

$$i, j \geq N \implies |x(i) - x(j)| < 1$$

인 자연수 $N \in \mathbb{N}$ 을 잡자. 그러면, 임의의 자연수 $i \geq N$ 에 대하여 $|x(i) - x(N)| < 1$ 이므로, $|x(i)| \leq |x(N)| + 1$ 임을 알 수 있다. 이제,

$$M = \sup\{|x(0)|, |x(1)|, \ldots, |x(N-1)|, |x(N)| + 1\}$$

이라 두면, 임의의 $i \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $|x(i)| \leq M$ 이다. □

두 기본열 $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ 가 주어져 있다고 하자. 임의의 유리수 $e > 0$ 에 대하여

$$i \geq N \implies |\alpha(i) - \beta(i)| < e$$

이 성립하는 자연수 N 을 잡을 수 있을 때, $\alpha \sim \beta$ 라 정의하자. 먼저 $\alpha \sim \alpha$ 및 $\alpha \sim \beta \Longrightarrow \beta \sim \alpha$ 임은 당연하다. 만일 $\alpha \sim \beta$, $\beta \sim \gamma$ 이면

$$i \geq N_1 \Longrightarrow |\alpha(i) - \beta(i)| < \frac{e}{2}, \qquad i \geq N_2 \Longrightarrow |\beta(i) - \gamma(i)| < \frac{e}{2}$$

인 자연수 N_1, N_2 를 잡을 수 있다. 따라서 $N = \sup\{N_1, N_2\}$ 라 두면, 임의의 $i \geq N$ 에 대하여

$$|\alpha(i) - \gamma(i)| \leq |\alpha(i) - \beta(i)| + |\beta(i) - \gamma(i)| < \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e$$

이므로 $\alpha \sim \gamma$ 임을 알 수 있다. 따라서, 방금 정의한 관계 $\sim$ 는 기본열 전체의 집합 $\mathcal{F}$ 의 동치관계가 된다. 이제, $\mathcal{F}/\sim$ 을 $\mathbb{R}$ 로 표시하고, 이 몫집합의 원소들을 실수라 부른다.

두 실수 $[\alpha], [\beta] \in \mathbb{R}$ 에 대하여, 다음 성질

$$i \geq N \implies \alpha(i) - \beta(i) > d$$

을 만족하는 유리수 $d > 0$ 와 자연수 N 이 있을 때,

$$[\alpha] > [\beta] \tag{24}$$

이라 정의하자.

문제 2.5.2. 정의 (24) 가 잘 정의되어 있음을 보여라.

정리 2.5.2. 임의의 실수 $[\alpha], [\beta] \in \mathbb{R}$ 에 대하여 다음

$$[\alpha] > [\beta], \qquad [\alpha] = [\beta], \qquad [\alpha] < [\beta]$$

중 한 명제가 성립하고, 또한 두 명제가 동시에 성립하지 않는다.

증명: 임의의 유리수 $e > 0$ 에 대하여 다음 성질

$$i \geq N_e \implies |\alpha(i) - \alpha(N_e)| < e,\ |\beta(i) - \beta(N_e)| < e$$

이 성립하는 최소 자연수 N_e 를 잡자. 이 자연수 N_e 는 물론 유리수 $e > 0$ 에 의하여 주어진다. 그러면 각 $i \geq N_e$ 에 대하여

$$\alpha(N_e) - \beta(N_e) - 2e < \alpha(i) - \beta(i) < \alpha(N_e) - \beta(N_e) + 2e \tag{25}$$

가 성립한다. 이제,

$$d_e = \alpha(N_e) - \beta(N_e) - 2e, \qquad d'_e = \alpha(N_e) - \beta(N_e) + 2e$$

라 두자.

우선, 적당한 유리수 $e > 0$ 에 대하여 $d_e > 0$ 인 경우에

$$i \geq N_e \implies \alpha(i) - \beta(i) > d_e$$

이 되므로 $[\alpha] > [\beta]$ 이다. 또한, 적당한 유리수 $e > 0$ 에 대하여 $d'_e < 0$ 이면

$$i \geq N_e \implies \beta(i) - \alpha(i) > -d'_e$$

이므로 $[\beta] > [\alpha]$ 가 된다. 이제, 위의 두 가지 경우가 성립하지 않는다고 가정하자. 그러면 임의의 유리수 $e > 0$ 에 대하여 $d_e \leq 0$, $d'_e \geq 0$ 이 된다. 따라서

$$\alpha(N_e) - \beta(N_e) \leq 2e, \qquad \beta(N_e) - \alpha(N_e) \leq 2e$$

이므로, (25) 에 의하여

$$i \geq N_e \implies |\alpha(i) - \beta(i)| \leq |\alpha(N_e) - \beta(N_e)| + 2e \leq 4e < 5e$$

임을 알 수 있다. 따라서, $\alpha \sim \beta$ 이 되어 $[\alpha] = [\beta]$ 이다. □

문제 2.5.3. 정리 2.5.2 에서 세 가지 경우 중 두 가지가 동시에 성립할 수 없음을 보여라.

이제, 두 실수 $[\alpha], [\beta]$ 에 대하여

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta] \tag{26}$$

라 정의하자. 여기서 $\alpha + \beta$ 는 $i \mapsto \alpha(i) + \beta(i)$ 로 정의되는 유리수열이다. 우선 $\alpha + \beta$ 가 기본열임을 보이자. 이를 위하여

$$\begin{aligned} i, j \geq N_1 &\implies |\alpha(i) - \alpha(j)| < \frac{e}{2}, \\ i, j \geq N_2 &\implies |\beta(i) - \beta(j)| < \frac{e}{2} \end{aligned}$$

인 자연수 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 를 잡고, $N = \sup\{N_1, N_2\}$ 라 두자. 그러면 임의의 $i, j \geq N$ 에 대하여

$$\begin{aligned} |(\alpha + \beta)(i) - (\alpha + \beta)(j)| &= |[\alpha(i) - \alpha(j)] + [(\beta(i) - \beta(j)]| \\ &< \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e \end{aligned}$$

가 되어 $\alpha+\beta$ 는 기본열이다.

문제 2.5.4. 정의 (26) 이 잘 정의되어 있고, 결합법칙과 교환법칙을 만족함을 보여라. 또한, 0^* 이 이 연산에 관한 항등원임을 보여라. 기본열 $\alpha \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $(-\alpha)(i) = -\alpha(i)$ 로 정의된 유리수열 $-\alpha$ 가 기본열이고 α 의 더하기에 관한 역원임을 보여라.

이제 실수의 곱하기를 정의하기 위하여, 두 유리수열 $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ 에 대하여

$$\alpha\beta : i \mapsto \alpha(i)\beta(i)$$

라 정의하자. 이를 위하여 α, β 가 기본열이면 $\alpha\beta$ 도 기본열임을 보이자. 우선, 정리 2.5.1 에 의하여 다음 성질

$$|\alpha(i)| \le M_1,\ |\beta(i)| \le M_2, \qquad i \in \mathbb{N}$$

을 만족하는 $M_1, M_2 \in \mathbb{Q}$ 를 잡고, $M = \sup\{M_1, M_2\}$ 라 하자. 또한,

$$\begin{aligned} i, j \ge N_1 &\Longrightarrow |\alpha(i) - \alpha(j)| < \frac{e}{2M}, \\ i, j \ge N_2 &\Longrightarrow |\beta(i) - \beta(j)| < \frac{e}{2M} \end{aligned}$$

을 만족하는 자연수 N_1, N_2 를 잡고, $N = \sup\{N_1, N_2\}$ 라 하자. 그러면, 임의의 $i, j \ge N$ 에 대하여

$$\begin{aligned} |\alpha(i)\beta(i) - \alpha(j)\beta(j)| &\le |\alpha(i)\beta(i) - \alpha(i)\beta(j)| + |\alpha(i)\beta(j) - \alpha(j)\beta(j)| \\ &= |\alpha(i)||\beta(i) - \beta(j)| + |\beta(j)||\alpha(i) - \alpha(j)| \\ &< M\,\frac{e}{2M} + M\,\frac{e}{2M} = e \end{aligned}$$

가 되어, $\alpha\beta$ 가 기본열임이 증명된다. 이제, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$[\alpha][\beta] = [\alpha\beta] \tag{27}$$

로 정의한다.

문제 2.5.5. 정의 (27) 이 잘 정의되어 있으며, 결합법칙, 교환법칙, 배분법칙을 만족함을 보여라. 또한, 1^* 이 이 연산에 관한 항등원임을 보여라.

이제, $\mathbb{R}$ 이 체임을 보이기 위하여 곱하기에 관한 역원의 존재성을 증명할 차례이다. 만일 $[\alpha] \neq 0^*$ 이면 정리 2.5.2 에 의하여 $[\alpha] > 0^*$ 이거나 $[\alpha] < 0^*$ 이 성립한다. 따라서, 적당한 유리수 $d > 0$ 와 자연수 N_1 에 대하여

$$i \geq N_1 \Longrightarrow \alpha(i) > d \quad \text{이거나} \quad i \geq N_1 \Longrightarrow \alpha(i) < -d$$

임을 알 수 있다. 따라서, 기본열의 유한개 항을 바꾸어도 그 동치류는 변하지 않으므로, 임의의 $i \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $\alpha(i) \neq 0$ 이라 가정해도 무방하다. 이제,

$$\beta : i \mapsto \frac{1}{\alpha(i)} : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$$

와 같이 유리수열을 정의한다. 이제 β 가 기본열임을 보이면 $[\alpha][\beta] = 1^*$ 임은 자명하다. 먼저

$$i \geq N_2 \Longrightarrow |\alpha(i) - \alpha(j)| < d^2 e$$

가 성립하는 자연수 N_2 를 잡고, $N = \sup\{N_1, N_2\}$ 라 하자. 그러면, 임의의 $i \geq N_1$ 에 대하여 $|\alpha(i)| > d$ 이므로, 임의의 $i, j \geq N$ 에 대하여

$$\begin{aligned} |\beta(i) - \beta(j)| &= \left| \frac{1}{\alpha(i)} - \frac{1}{\alpha(j)} \right| \\ &= \frac{1}{|\alpha(i)\alpha(j)|} \, |\alpha(i) - \alpha(j)| < \frac{1}{d^2} \, d^2 e = e \end{aligned}$$

가 되어 β 가 기본열임을 알 수 있다.

끝으로,

$$P_{\mathbb{R}} = \{[\alpha] \in \mathbb{R} : [\alpha] > 0^*\}$$

이라 두면 순서공리 (순1) – (순3) 이 모두 성립한다. 따라서, 실수체 $\mathbb{R}$ 은 순서체가 된다.

문제 2.5.6. 만일 α 가 기본열이면 $|\alpha| : i \mapsto |\alpha(i)|$ 로 정의된 유리수열 $|\alpha|$ 도 기본열임을 보여라. 또한, 실수 $[\alpha] \in \mathbb{R}$ 의 절대값 $|[\alpha]|$ 은 기본열 $|\alpha|$ 에 의하여 주어짐을 보여라.

정리 2.5.3. 두 실수 $[\alpha], [\beta]$ 가 $[\alpha] > [\beta]$ 이면 $[\alpha] > r^* > [\beta]$ 를 만족하는 유리수 $r \in \mathbb{Q}$ 가 존재한다.

증명: 우선, 다음 관계

$$i \geq N_1 \implies \alpha(i) - \beta(i) > d$$

가 성립하도록 자연수 N_1 과 유리수 $d > 0$ 를 잡자. 또한 다음 성질

$$i, j \geq N_2 \quad \implies \quad |\alpha(i) - \alpha(j)| < \frac{1}{4}d, \quad |\beta(i) - \beta(j)| < \frac{1}{4}d$$

이 성립하는 자연수 N_2 를 잡은 후에, $N = \sup\{N_1, N_2\}$ 라 두자. 만일 $i \geq N$ 이면

$$\alpha(i) - \left(\alpha(N) - \frac{1}{2}d\right) = \frac{1}{2}d + (\alpha(i) - \alpha(N)) > \frac{1}{4}d$$

이므로, $[\alpha] > \left(\alpha(N) - \frac{1}{2}d\right)^*$ 를 얻는다. 또한 $i \geq N$ 에 대하여

$$\begin{aligned}\left(\alpha(N) - \frac{1}{2}d\right) - \beta(i) &= (\alpha(N) - \beta(N)) + (\beta(N) - \beta(i)) - \frac{1}{2}d \\ &> d - \frac{1}{4}d - \frac{1}{2}d = \frac{1}{4}d\end{aligned}$$

이므로, $\left(\alpha(N) - \frac{1}{2}d\right)^* > [\beta]$ 를 얻는다. 따라서, $\alpha(N) - \frac{1}{2}d \in \mathbb{Q}$ 가 원하는 유리수임을 알 수 있다. □

함수 $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 이 임의의 $k = 0, 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $i(k) < i(k+1)$ 이라 하자. 이 함수와 수열 $x : i \mapsto x(i)$ 의 합성 $x \circ i : k \mapsto x(i(k))$ 를 x 의 **부분수열**이라 한다. 순서체 F 의 수열 x 가 $a \in F$ 로 수렴하면, x 의 모든 부분수열이 a 로 수렴함은 자명하다.

도움정리 2.5.4. 순서체 F 의 코시수열 x 의 한 부분수열 $x \circ i$ 가 점 $a \in F$ 로 수렴하면 x 도 $a \in F$ 로 수렴한다.

증명: 임의의 $e \in P_F$ 가 주어졌을 때, 먼저 다음 성질

$$i, j \geq N \Longrightarrow |x(i) - x(j)| < \frac{e}{2}$$

이 성립하는 자연수 N 을 잡고

$$k \geq K \Longrightarrow |x(i(k)) - a| < \frac{e}{2}, \qquad i(K) \geq N$$

이 성립되도록 자연수 K 를 잡자. 이제 $i \geq i(K)$ 이면

$$|x(i) - a| \leq |x(i) - x(i(K))| + |x(i(K)) - a| < \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e$$

이 되어서 x 는 a 로 수렴한다. □

정리 2.5.5. 각 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $[\alpha_n]$ 이 실수이고, $n \mapsto [\alpha_n]$ 이 $\mathbb{R}$ 의 코시수열이라 하자. 그러면 이 수열은 $\mathbb{R}$ 안에서 수렴한다.

증명: 우선 다음 조건

$$[\alpha_n] \neq [\alpha_{n+1}], \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

이 성립한다고 가정하자. 그러면 정리 2.5.3 에 의하여 $[\alpha_n]$ 과 $[\alpha_{n+1}]$ 사이에 유리수 $r(n) \in \mathbb{Q}$ 를 잡을 수 있고, 다음 성질

$$|[\alpha_n] - r(n)^*| < |[\alpha_n] - [\alpha_{n+1}]|, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

이 성립한다. 따라서, 임의의 실수 $[\epsilon] > 0$ 이 주어지면 다음 성질

$$n \geq N \implies |[\alpha_n] - r(n)^*| < \frac{1}{3}[\epsilon] \tag{29}$$

이 성립하는 자연수 N 을 잡을 수 있다. 한편 $0 < [\epsilon]$ 이므로, 적당한 자연수 I_0 과 유리수 $d > 0$ 에 대하여 다음

$$i \geq I_0 \implies \frac{1}{3}\epsilon(i) > d \tag{30}$$

이 성립한다. 그런데 유리수열 $n \mapsto r(n)$ 이 기본열이 된다는 것을 바로 확인할 수 있으므로, 다음 성질

$$i, j \geq M \implies |r(i) - r(j)| < d \tag{31}$$

이 성립하도록 자연수 M 을 잡을 수 있다. 이제 (29) 에 의하면, 각 자연수 $n \geq N$ 에 대하여 다음 성질

$$i \geq I(n) \implies |\alpha_n(i) - r(n)| < \frac{1}{3}\epsilon(i) \tag{32}$$

이 성립하는 자연수 $I(n)$ 을 잡을 수 있다. 이제 $n \geq \sup\{N, M\}$ 인 자연수 n 을 잡으면, 각 $i \geq \sup\{I_0, I(n), M\}$ 에 대하여 (30), (31), (32) 를 적용하여

$$\begin{aligned} |\alpha_n(i) - r(i)| &\leq |\alpha_n(i) - r(n)| + |r(n) - r(i)| \\ &< \frac{1}{3}\epsilon(i) + d < \frac{1}{3}\epsilon(i) + \frac{1}{3}\epsilon(i) = \frac{2}{3}\epsilon(i) \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 따라서 각 $n \geq \sup\{N, M\}$ 에 대하여

$$|[\alpha_n] - [r]| \leq \frac{2}{3}[\epsilon] < [\epsilon]$$

이고, 수열 $\langle [\alpha_n] \rangle$ 은 실수 $[r]$ 로 수렴한다.

만일 충분히 큰 자연수에 대하여 $[\alpha_n]$ 이 일정한 값이면 증명할 것이 없다. 그렇지 않은 경우에 성질 (28) 이 성립하도록 $\langle [\alpha_n] \rangle$ 의 부분수열을 잡을 수 있는데, 도움정리 2.5.4 에 의하여 이 부분수열의 극한이 바로 수열 $n \mapsto [\alpha_n]$ 의 극한이 된다. □

문제 2.5.7. 이 절에서 정의한 $r^* \in \mathbb{R}$ 에 대해서도 (23) 에 열거한 성질들이 그대로 성립함을 보여라.

2.6. 완비순서체

앞에서 두 가지 방법으로 실수를 구성하였는데, 이 절에서는 이 두 가지 구성 방법의 결과가 사실상 같음을 보이려 한다. 순서체 F 가 다음 성질

(완1) 비어 있지 않은 집합 $A \subset F$ 가 위로 유계이면 A 는 상한을 가진다

을 가지면 이를 **완비순서체**라 한다. 정리 2.4.2 는 데데킨트절단으로 정의된 실수체 $\mathbb{R}$ 이 완비순서체임을 말해 준다. 다음 성질

(완2) 비어 있지 않은 집합 $A \subset F$ 가 아래로 유계이면 A 는 하한을 가진다

이 (완1) 과 동치임은 바로 확인할 수 있다.

문제 2.6.1. 두 명제 (완1) 과 (완2) 가 동치임을 보여라.

정리 2.5.5 는 코시수열에 의하여 만든 실수체가 다음 조건

(완3) 임의의 코시수열 $x : \mathbb{N} \to F$ 가 F 안에서 수렴한다

을 만족함을 말한다. 이 절에서는 완비순서체가 유일하다는 것과 (완1) 과 (완3) 이 동치임을 보인다. 먼저, 완비순서체의 간단한 성질을 살펴보자.

정리 2.6.1. 완비순서체 F 는 아르키메데스 성질을 만족한다.

증명: 집합 $\mathbb{N}$ $(\subset F)$ 이 위로 유계라 가정하자. 그러면 (완1) 에 의하여 $\mathbb{N}$ 의 최소상계 $\alpha \in F$ 가 존재한다. 그런데 $\alpha - 1 < \alpha$ 이므로 $\alpha - 1$ 은 $\mathbb{N}$ 의 상계가 아니고, 따라서 부등식 $\alpha - 1 < n \le \alpha$ 을 만족하는 자연수 $n \in \mathbb{N}$ 이 존재한다. 그러면 $n + 1 \in \mathbb{N}$ 임에도 불구하고 $n + 1 > \alpha$ 이기 때문에 α 가 $\mathbb{N}$ 의 상계라는 데 모순이다. □

정리 2.6.2. 완비순서체 F 의 두 원소 $x, y \in F$ 가 $x < y$ 이면 부등식 $x < r < y$ 를 만족하는 유리수 $r \in \mathbb{Q}$ $(\subset F)$ 이 존재한다.

증명: 우선 $x = 0$ 이면 정리 2.6.1 과 정리 2.3.3 (가) 를 적용하면 된다. 이제 $0 < x < y$ 라 하자. 다시 정리 2.6.1 에 의하여 $0 < \dfrac{1}{n} < y - x$ 인 $n \in \mathbb{N}$ 이 있다. 두 양수 $\dfrac{1}{n} \in F$ 과 $x \in F$ 에 대하여 정리 2.6.1 을 다시 적용하면

$$\{k \in \mathbb{N} : k \cdot \frac{1}{n} > x\} \neq \emptyset$$

이다. 정리 2.1.4 에 의하여 이 집합은 최소값을 가지는데, 이 최소값을 m 이라 두면 $\dfrac{m-1}{n} \le x < \dfrac{m}{n}$ 이고, 따라서

$$x < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} \le x + \frac{1}{n} < y$$

이므로 $\dfrac{m}{n}$ 이 바로 우리가 찾는 유리수이다. 끝으로 $x < 0$ 일 때에는, $-x < n$ 인 자연수 n 을 먼저 찾으면 $0 < x + n < y + n$ 이므로 방금 증명한 바에 의하여 $x + n < r < y + n$ 인 $r \in \mathbb{Q}$ 이 있고, 따라서 $r - n$ 이 우리가 찾는 유리수이다. □

완비순서체의 유일성을 증명하기 앞서서, (완3) 을 가정하고 (완1) 을 증명함으로써 2.5 절에서 코시수열을 이용하여 구성한 실수체가 완비순서체임을 보이자. 이를 위하여 순서체 F 의 비어 있지 않은 부분집합 $A \subset F$ 가 위로 유계라 가정하자. 먼저

$$\mathcal{I} = \{(a, b) \in F \times F : a < b\}$$

라 두고, 두 함수 $g, h : \mathcal{I} \to F$ 를 다음

$$g((a,b)) = \begin{cases} a, & \frac{a+b}{2} \text{ 가 } A \text{ 의 상계이다,} \\ \frac{a+b}{2}, & \frac{a+b}{2} \text{ 가 } A \text{ 의 상계가 아니다} \end{cases}$$

$$h((a,b)) = \begin{cases} \frac{a+b}{2}, & \frac{a+b}{2} \text{ 가 } A \text{ 의 상계이다,} \\ b, & \frac{a+b}{2} \text{ 가 } A \text{ 의 상계가 아니다} \end{cases}$$

과 같이 정의한다. 그러면 다음 성질

$$a \le g((a,b)) < h((a,b)) \le b, \qquad h((a,b)) - g((a,b)) = \frac{1}{2}(b - a)$$

이 바로 확인된다. 또한, a 가 A 의 상계가 아니고 b 가 A 의 상계이면, $g((a,b))$ 는 A 의 상계가 아니고 $h((a,b))$ 는 A 의 상계이다. 이제, 함수 $f:\mathcal{I}\to\mathcal{I}$ 를 다음

$$f:(a,b)\mapsto(g((a,b)),h((a,b))):\mathcal{I}\to\mathcal{I}$$

과 같이 정의하자. 만일 A 의 원소가 한 개이면 증명할 것이 없으므로, A 가 적어도 두 개의 원소를 가진다고 가정하자. 그러면 A 의 상계가 아닌 $a_0\in A$ 와 A 의 상계 b_0 를 택하자. 그러면 정리 2.1.2 를 적용하여, $\gamma(0)=(a_0,b_0)$ 이고, 임의의 $n\in\mathbb{N}$ 에 대하여 $\gamma(n^+)=f(\gamma(n))$ 을 만족하는 함수 $\gamma:\mathbb{N}\to\mathcal{I}$ 를 찾을 수 있다. 이제 두 함수 $\pi_1,\pi_2:\mathcal{I}\to F$ 를 다음

$$\pi_1:(a,b)\mapsto a,\quad \pi_2:(a,b)\mapsto b,\qquad (a,b)\in\mathcal{I}$$

와 같이 정의하자. 끝으로 $\alpha=\pi_1\circ\gamma$, $\beta=\pi_2\circ\gamma$ 라 두면, α,β 는 모두 F 의 수열이 되며,

$$\alpha(n^+)=(\pi_1\circ\gamma)(n^+)=(\pi_1\circ f)(\gamma(n))=g(\gamma(n))=g(\alpha(n),\beta(n))$$
$$\beta(n^+)=(\pi_2\circ\gamma)(n^+)=(\pi_2\circ f)(\gamma(n))=h(\gamma(n))=h(\alpha(n),\beta(n))$$

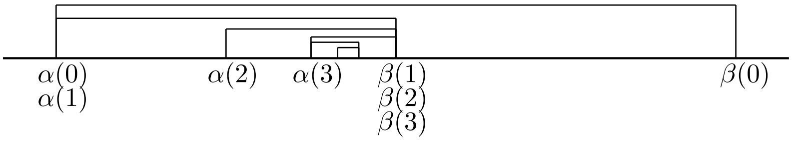
이 된다. 앞서 살펴본 g,h 의 성질 덕분에, 각 $n\in\mathbb{N}$ 에 대하여 다음

(가) $\alpha(n)$ 은 A 의 상계가 아니고 $\beta(n)$ 은 A 의 상계이다,
(나) $\alpha(n)\le\alpha(n^+)<\beta(n^+)\le\beta(n)$ 이다,
(다) $\beta(n^+)-\alpha(n^+)=\dfrac{1}{2}(\beta(n)-\alpha(n))$ 이다

이 성립한다. 임의의 $e\in P_F$ 에 대하여 $N\ge\dfrac{1}{e}[\beta(0)-\alpha(0)]$ 인 자연수 N 을 잡으면 각 $m>n\ge N$ 에 대하여

$$\begin{aligned}0\le\alpha(m)-\alpha(n)&<\beta(n)-\alpha(n)\\&=\frac{1}{2^n}[\beta(0)-\alpha(0)]\le\frac{1}{n}[\beta(0)-\alpha(0)]<e\end{aligned}$$

가 된다. 따라서, $\alpha:\mathbb{N}\to F$ 는 코시수열이고, 마찬가지로 β 도 코시수열이다.



이제 가정 (완3) 에 의하여 α, β 는 수렴하는데, 그 극한값을 각각 a, b 라 두자. 그러면 성질 (나), (다) 에 의하여 $a = b$ 임을 쉽게 확인할 수 있다. 한편, (가) 에 의하면, 임의의 $x \in A$ 와 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $x \leq \beta(n)$ 이므로 $x \leq b$ 임을 알 수 있고, 따라서 b 는 A 의 상계이다. 다른 한편으로, $e > 0$ 이면 $a - e < \alpha(n) \leq a = b$ 인 자연수 n 을 잡을 수 있는데, $\alpha(n)$ 이 A 의 상계가 아니므로 $\alpha(n) < y$ 인 $y \in A$ 를 잡을 수 있다. 그러면 $a - e < y$ 가 되어 $a - e$ 는 A 의 상계가 아님을 알 수 있다. 그런데 e 는 임의의 양수이므로 $a = b$ 는 A 의 최소상계임이 증명된다. 따라서, (완3) 을 만족하는 순서체는 자동적으로 완비순서체가 된다.

문제 2.6.2. (완3) $\Longrightarrow$ (완1) 의 증명과정에서 $a = b$ 임을 보여라. 또한, $x \leq b$ 임을 보여라.

이제, 완비순서체의 유일성을 보이려 하는데, 약간의 준비가 필요하다. 순서체 F 의 부분집합 $S, T \subset F$ 에 대하여

$$S + T = \{s + t \in F : s \in S,\ t \in T\}$$

라 정의한다. 그러면 다음 등식

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \tag{33}$$

이 성립한다. 이를 보이기 위하여 $\sup S = \alpha$, $\sup T = \beta$ 라 두자. 그러면, 임의의 $s \in S$, $t \in T$ 에 대하여 $s + t \leq \alpha + \beta$ 이므로 $\alpha + \beta$ 는 $S + T$ 의 상계이다. 한편 $\alpha + \beta$ 가 최소상계임을 보이기 위해서는, $\gamma < \alpha + \beta$ 이면 γ 가 $S + T$ 의 상계가 아님을 보여야 한다. 즉, $\gamma < \alpha + \beta$ 이면 $\gamma < s + t$ 인 $s \in S$ 와 $t \in T$ 가 존재함을 보이면 된다. 이를 위하여

$\epsilon = \alpha + \beta - \gamma$ 라 두면 $\frac{\epsilon}{2} > 0$ 이고, 따라서 $\alpha - \frac{\epsilon}{2} < \alpha$ 인데 α 가 S 의 최소상계이므로 $\alpha - \frac{\epsilon}{2}$ 는 S 의 상계가 아니다. 따라서, $\alpha - \frac{\epsilon}{2} < s$ 인 $s \in S$ 가 존재한다. 마찬가지로 $\beta - \frac{\epsilon}{2} < t$ 인 $t \in T$ 를 찾을 수 있다. 그러면

$$\gamma = \alpha + \beta - \epsilon = \left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right) + \left(\beta - \frac{\epsilon}{2}\right) < s + t$$

이므로 원하는 $s \in S$ 와 $t \in T$ 를 얻는다.

순서체의 부분집합 $S, T \subset P_F$ 에 대하여 마찬가지로

$$ST = \{st \in P_F : s \in S,\ t \in T\}$$

로 정의한다. 그러면, 등식 (33) 과 마찬가지로 다음 등식

$$\sup ST = \sup S \sup T, \qquad S, T \subset P_F \tag{34}$$

이 성립한다.

문제 2.6.3. (34) 를 증명하여라.

다음 정리는 완비순서체가 본질적으로 하나밖에 없음을 보여 준다. 바꾸어 말하여 완비순서체가 두 개 있으면 이 두 순서체 사이에는 순서체의 모든 구조를 그대로 보존하는 사상이 있다는 것이다.

정리 2.6.3. 임의의 두 완비순서체 F 와 G 가 주어지면, 전단사 함수 $f : F \to G$ 가 존재하여 다음 두 성질

(가) 임의의 $x, y \in F$ 에 대하여

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad f(xy) = f(x)f(y)$$

이 성립한다,

(나) $f(P_F) = P_G$ 이다

을 만족한다

증명: 먼저 정리 2.3.2 를 적용하면, 다음 성질들

$$\begin{aligned}\gamma(r+s)=\gamma(r)+\gamma(s),\quad \gamma(rs)=\gamma(r)\gamma(s),\quad \gamma(P_{\mathbb{Q}})=\gamma(\mathbb{Q})\cap P_F,\\ \delta(r+s)=\delta(r)+\delta(s),\quad \delta(rs)=\delta(r)\delta(s),\quad \delta(P_{\mathbb{Q}})=\delta(\mathbb{Q})\cap P_G\end{aligned}\tag{35}$$

을 만족하는 단사함수

$$\gamma:\mathbb{Q}\to F,\qquad \delta:\mathbb{Q}\to G$$

가 존재한다. 이제, 각 $x\in F$ 에 대하여

$$A_x=\{\delta(r)\in G: r\in\mathbb{Q},\ \gamma(r)<x\}$$

라 정의하자. 정리 2.6.1 에 의하여 F 는 아르키메데스 성질을 만족하므로, $n\cdot 1_F>-x$ 인 $n\in\mathbb{N}$ 이 있으며, 이는 $\gamma(-n)=(-n)\cdot 1_F<x$ 를 뜻하므로 $A_x\neq\emptyset$ 이다. 다시 아르키메데스 법칙에 의하여 $m\cdot 1_F>x$ 인 $m\in\mathbb{N}$ 을 잡으면 $\delta(m)=m\cdot 1_G$ 는 A_x 의 상계이다. 이제 G 가 완비순서체이므로 A_x 는 상한을 가지고, 이를 $f(x)$ 라 쓰면 f 는 F 에서 G 로 가는 함수이다. 즉, 다음

$$f(x)=\sup\{\delta(r)\in G: r\in\mathbb{Q},\ \gamma(r)<x\}\in G,\qquad x\in F$$

과 같이 정의된다. 두 완비순서체 F 와 G 의 역할을 바꾸어서 함수 $g:G\to F$ 도 다음

$$g(y)=\sup\{\gamma(r)\in F: r\in\mathbb{Q},\ \delta(r)<y\}\in F,\qquad y\in G$$

과 같이 정의한다.

먼저, (35) 에 의하여, 각 유리수 $r,s\in\mathbb{Q}$ 에 대하여

$$r<s\iff\gamma(r)<\gamma(s)\iff\delta(r)<\delta(s)$$

가 성립한다. 따라서,

$$\begin{aligned}f(\gamma(s))&=\sup\{\delta(r)\in G: r\in\mathbb{Q},\ \gamma(r)<\gamma(s)\}\\&=\sup\{\delta(r)\in G: r\in\mathbb{Q},\ \delta(r)<\delta(s)\}=\delta(s)\end{aligned}$$

이므로

$$f \circ \gamma = \delta, \qquad g \circ \delta = \gamma$$

가 성립함을 알 수 있다. 물론 $g(\delta(s)) = \gamma(s)$ 도 마찬가지로 증명된다.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dd, shift right, "f"'] \\ \mathbb{Q} \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[dr, "\delta"'] & \\ & G \arrow[uu, shift right, "g"'] \end{tikzcd}$$

이제, $f(x+y) = f(x)+f(y)$ 임을 보이는데, 함수 f 의 정의와 (33) 에 의하여 $A_{x+y} = A_x + A_y$ 임을 보이면 된다. 먼저 $\delta(r) \in A_x$, $\delta(s) \in A_y$ 이면 $\gamma(r) < x$, $\gamma(s) < y$ 이므로

$$\delta(r) + \delta(s) = \delta(r+s), \qquad \gamma(r+s) = \gamma(r) + \gamma(s) < x + y$$

로부터, $\delta(r) + \delta(s) \in A_{x+y}$ 임을 알 수 있다. 역으로 $\delta(t) \in A_{x+y}$ 이면 $\gamma(t) < x + y$ 이다. 정리 2.6.2 를 적용하여 $\gamma(t) - y < \gamma(s) < x$ 인 $s \in \mathbb{Q}$ 를 잡으면

$$\gamma(s) < x, \qquad \gamma(t-s) = \gamma(t) - \gamma(s) < y$$

로부터 $\delta(t) = \delta(s) + \delta(t-s) \in A_x + A_y$ 이다. 마찬가지로 $f(xy) = f(x)f(y)$ 임을 보이기 위하여 $x, y \in P_F$ 인 경우부터 생각하자. 이 경우, 다시 정리 2.6.2 에 의하여 $A_x \cap P_F \neq \emptyset$, $A_y \cap P_F \neq \emptyset$ 임을 알 수 있으므로, (34) 를 적용하면 되는데, 이 부분의 증명은 연습문제로 남긴다. 이제 (가) 의 증명을 마무리하기 위하여

$$x > 0 \iff f(x) > 0$$

임을 보이자. 먼저 $x > 0$ 이면 정리 2.6.2 에 의하여 $0 < \gamma(r) < x$ 인 유리수 $r \in \mathbb{Q}$ 이 존재한다. 그러면 $\delta(r) > 0$ 이고 $\delta(r) \in A_x$ 이므로

$f(x) > 0$ 이다. 역으로 $f(x) > 0$ 이면 0 은 집합 A_x 의 상계가 아니다. 따라서, $\delta(r) > 0$ 인 $\delta(r) \in A_x$ 가 존재한다. 그러면 $0 < \gamma(r) < x$ 가 되므로 (가) 의 증명이 끝난다.

이제 $g \circ f = 1_F$ 임을 보이려면, f 의 정의에 의하여

$$x = \sup\{\gamma(r) \in F : r \in \mathbb{Q},\ \delta(r) < f(x)\}, \qquad x \in F$$

임을 보여야 한다. 이는 다음 두 명제

(1) $r \in \mathbb{Q},\ \delta(r) < f(x)$ 이면 $\gamma(r) \le x$ 이다,
(2) $z < x$ 이면 $z < \gamma(r)$, $\delta(r) < f(x)$ 인 $r \in \mathbb{Q}$ 가 존재한다

를 보이는 것과 마찬가지이다. 실제로, (1) 은 x 가 집합

$$\{\gamma(r) \in F : r \in \mathbb{Q},\ \delta(r) < f(x)\}$$

상계임을 말한다. 한편, (2) 는 $z < x$ 이면 z 는 이 집합의 상계가 아님을, 즉, x 가 최소상계임을 말해 준다.

이제, (1) 을 보이자. 만일 $\delta(r) < f(x)$ 이면 $\delta(r)$ 은 집합

$$A_x = \{\delta(s) \in G : s \in \mathbb{Q},\ \gamma(s) < x\}$$

의 상계가 아니라는 뜻이므로, $\delta(r) < \delta(s)$, $\gamma(s) < x$ 인 $s \in \mathbb{Q}$ 가 존재한다. 그러면, $\gamma(r) < \gamma(s)$ 이므로 $\gamma(r) < x$ 가 성립한다. 또한, (2) 를 보이기 위하여 $z < x$ 라 하자. 그러면 정리 2.6.2 에 의하여 $z < \gamma(r) < x$ 인 유리수 $r \in \mathbb{Q}$ 가 존재한다. 그러면 $\delta(r) = f(\gamma(r)) < f(x)$ 이므로 (2) 의 증명이 끝난다. 마찬가지 방법으로 $f \circ g = 1_G$ 도 물론 성립하여 f 는 전단사함수임을 알 수 있다. □

문제 2.6.4. 정리 2.6.3 의 증명과정에서, 임의의 $x, y \in F$ 에 대하여 $f(xy) = f(x)f(y)$ 가 성립함을 보여라.

이제, 2.4 절과 2.5 절에서 구성한 실수체가 모두 완비순서체이고, 이들은 같은 순서체임을 알았다. 이제, 사족으로 (완1) $\Longrightarrow$ (완3) 의 증

명을 간단히 살펴보고 이 절을 맺는다.[6] 먼저 순서체 F 의 코시수열 $\alpha : \mathbb{N} \to F$ 가 주어졌다 하자. 도움정리 2.5.4 에 의하여 수열 α 가 수렴하는 부분수열을 가짐을 증명하면 된다. 집합 $A = \{\alpha(n) : n \in \mathbb{N}\}$ 이 유한집합이면 간단하다. 이 집합 A 가 무한집합인 경우라 하더라도 정리 2.5.1 에 의하여 A 는 위로 유계이고, 동시에 아래로 유계이다. 집합 A 의 하계 a_0 와 상계 b_0 를 택하고 (완3) $\Longrightarrow$ (완1) 의 증명 때와 비슷하게 '구간'를 반으로 계속 분할해 나가는데, 집합 A 의 원소가 무한개 속하는 쪽을 계속하여 선택한다. 그러면 이 구간들의 왼쪽 끝점들의 집합은 위로 유계이고, 가정 (완1) 에 의하여 상한 a 를 가진다. 또한, 이 구간들의 오른쪽 끝점들의 집합은 아래로 유계이므로 (완1) 동치인 (완2) 에 의하여 하한 b 를 가진다. 그러면 (완3) $\Longrightarrow$ (완1) 의 증명 때처럼 $a = b$ 가 되고, 이 원소의 근방에는 무한히 많은 A 의 원소들이 있으므로 A 의 원소들을 계속 택하여 수열을 만들어 a 로 수렴하게 할 수 있다. 이 수열이 바로 우리가 원하던 원래 α 의 수렴하는 부분수열이 된다.

(6) 상세한 증명은 참고문헌 [3], 2 장을 참조하라.