제 3 장　무한집합

2002년 1학기

집합과 수리논리
강의록 제 3 장

서울대학교 수학과
계승혁

2002년 4월 23일 게시
2002년 7월 8일 수정
전체 79쪽∼121쪽

이 장에서는 다시 집합론으로 돌아와서 집합론의 핵심이라 할 수 있는 무한집합을 공부하는데, 이 때 피할 수 없는 것이 선택공리이다. 수학에서 어떤 성질을 만족하는 대상의 존재성을 논할 때, 반드시 그 대상을 어떻게 구성하는지 밝힐 필요 없이도 존재성을 주장할 수 있다는 것이 선택공리이다. 이 선택공리는 무한집합을 다룰 때 뿐 아니라 수학의 여러 분야에서 필수불가결한 도구인데, 실제 이용될 때에는 여러 가지 동치 명제로 나타난다. 이 장에서는 먼저 이러한 동치 명제들에 어떤 것들이 있는지 알아 본다. 무한집합의 특성은 자기자신의 진부분집합과 그 '개수'가 같을 수 있다는 점인데, 이를 증명하는 데에 선택공리를 이용한다. 우리가 일상생활에서 사용하는 자연수는 두 가지 기능을 가지고 있다. 그 하나는 첫째, 둘째, 세째 등과 같이 순서 혹은 위치를 표시하여 준다. 또 다른 기능은 하나, 둘, 셋 등 개수를 표시하여 준다. 그런데 자연수가 표시할 수 있는 것은 유한번째 혹은 유한개뿐이다. 따라서, 무한번째 혹은 무한개를 표시하는 '수자'를 도입하려 하는데, 이것이 이 장에서 공부하려는 서수와 기수이다. 무한 서수와 무한 기수끼리도 자연수처럼 셈을 하는데, 보통 자연수의 연산과 달라지므로 유의하여야 한다.

3.1.　선택공리

지난 1.2 절의 정리 1.2.3 에서 (가) $\Longrightarrow$ (나) 의 증명을 다시 살펴보자. 그 핵심은 집합 X 의 분할 $\mathcal{P}$ 가 있을 때, 각 $A \in \mathcal{P}$ 의 원소를 하나씩 선택할 수 있는가 하는 문제이다. 먼저 다음 명제

(선1) 함수 $f : X \to Y$ 가 전사이면 $f \circ g = 1_Y$ 를 만족하는 함수 $g : Y \to X$ 가 존재한다

를 가정하고, 이로부터 얻을 수 있는 명제가 어떤 것들인가 살펴보기로 하자. 집합 X 의 분할 $\mathcal{P}$ 가 주어져 있을 때, 각 $x \in X$ 가 속하는 $A \in \mathcal{P}$ 가 유일하게 결정되는데 이를 $f(x)$ 라 두자. 그러면 $f : X \to \mathcal{P}$ 는 전사함수이다. 이제 (선1) 을 가정하면 $f \circ g = 1_{\mathcal{P}}$ 를 만족하는 함수 $g : \mathcal{P} \to X$ 가 존재한다. 그러면 $f(g(A)) = A$ 이므로 $g(A) \in A$ 임을 알 수 있다. 따라서, 다음 명제

(선2) 집합 X 의 분할 $\mathcal{P}$ 에 대하여, 각 $A \in \mathcal{P}$ 에 대하여 $g(A) \in A$ 를 만족하는 함수 $g : \mathcal{P} \to X$ 가 존재한다

가 성립하게 된다. 이 명제에서 $g(A)$ 는 X 의 원소 가운데 A 에 들어가는 것을 하나 고른 것이다.

역으로, (선2) 를 가정하고 (선1) 을 증명하여 보자. 함수 $f : X \to Y$ 가 전사이면 $\mathcal{P} = \{f^{-1}(\{y\}) : y \in Y\}$ 는 X 의 분할이 됨을 쉽게 알 수 있다. 따라서, 임의의 $y \in Y$ 에 대하여 $g[f^{-1}(\{y\})] \in f^{-1}(\{y\})$ 를 만족하는 함수 $g : \mathcal{P} \to X$ 가 존재한다. 만일 각 $y \in Y$ 에 대하여 $h(y) = g[f^{-1}(\{y\})]$ 라 정의하면 $h : Y \to X$ 는 함수이고, $h(y) \in f^{-1}(\{y\})$ 이므로 $f(h(y)) = y$ 가 성립한다.

만일 (선2) 를 가정하면 조금 강해 보이는 다음 명제

(선3) 집합 X 가 주어지면, 각 $A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 에 대하여 $h(A) \in A$ 를 만족하는 함수 $h : 2^X \setminus \{\emptyset\} \to X$ 가 존재한다

를 얻을 수 있다. 이를 보이기 위하여, 각 $A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 에 대하여

$$\widetilde{A} = \{(A, a) : a \in A\} \subset (2^X \setminus \{\emptyset\}) \times X$$

라 두면 $\mathcal{P} = \{\widetilde{A} : A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}\}$ 는 집합 $Y = \bigcup\{\widetilde{A} : A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}\}$ 의 분할이다. 실제로, $A, B \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 이고 $(C, c) \in \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ 이면 $C = A = B$ 이

므로 $\widetilde{A} = \widetilde{B}$ 이다. 따라서, 임의의 $A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 에 대하여 $g(\widetilde{A}) \in \widetilde{A}$ 를 만족하는 함수 $g : \mathcal{P} \to Y$ 가 존재한다. 이 때, $\pi_2 : (2^X \setminus \{\emptyset\}) \times X \to X$ 를 사영이라 두고,

$$h : A \mapsto \pi_2(g(\widetilde{A})), \qquad A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$$

라 정의하면, $h : 2^X \setminus \{\emptyset\} \to X$ 가 원하는 함수이다. 집합 X 의 분할 $\mathcal{P}$ 는 $2^X \setminus \{\emptyset\}$ 의 부분집합이므로 (선3) 을 가정하면 (선2) 는 바로 나온다. 명제 (선3) 에 언급된 바와 같이, 각 $A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 에 대하여 $h(A) \in A$ 를 만족하는 함수 $h : 2^X \setminus \{\emptyset\} \to X$ 를 집합 X 의 **선택함수**라 하고 명제 (선3) 을 **선택공리**라 부른다.

이제 선택공리와 동치인 명제 한 가지를 더 생각하자. 비어 있지 않은 집합 X 와 Y 의 곱집합 $X \times Y$ 가 비어 있지 않음은 자명하다. 예를 들어서 $x \in X$ 와 $y \in Y$ 를 택하면 $(x, y) \in X \times Y$ 이다. 임의의 집합족 $\{X_i : i \in I\}$ 의 곱집합에 대해서 다음 명제

(선4) 집합 I 가 비어 있지 않고, 임의의 $i \in I$ 에 대하여 X_i 가 비어 있지 않으면, $\prod_{i \in I} X_i$ 는 비어 있지 않다

를 생각해 보자. 먼저 (선3) 을 가정하여 집합 $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ 의 선택함수 $h : 2^X \setminus \{\emptyset\} \to X$ 를 잡고, $g : I \to X$ 를 $g(i) = h(X_i)$ 라 정의하자. 그러면 각 $i \in I$ 에 대하여 $g(i) = h(X_i) \in X_i$ 이므로 $g \in \prod_{i \in I} X_i$ 이고, (선4) 가 증명된다. 역으로, (선4) 를 가정하고 (선3) 을 증명해 보자. 가정 (선4) 로부터 $\prod\{A : A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}\}$ 은 비어 있지 않음을 알 수 있으므로 $h \in \prod\{A : A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}\}$ 를 하나 잡자. 그러면, 각 $A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 에 대하여 $h(A) \in A$ 이므로 h 는 X 의 선택함수이다. 따라서, (선1), (선2), (선3), (선4) 는 모두 논리적으로 동치인 명제들이다.

선택공리가 수학에서 실제 사용될 때에는 대부분 순서와 관련된다. 다음 두 명제는 순서와 관련하여 선택공리와 논리적으로 동치인 명제들인데, 수학의 여러 분야에서 폭넓게 쓰인다.

정리 3.1.1. (초른[1] 도움정리) 순서집합 X 의 모든 사슬이 상계를 가지면 X 는 극대원소를 가진다.

정리 3.1.2. (하우스도르프[2] 극대 원칙) 임의의 순서집합 X 는 극대 사슬을 가진다.

먼저 이 정리들에 나오는 용어들의 정의를 살펴보자. 순서집합 X 의 부분집합 A 가 다음 성질

$$a, b \in A \implies a \leq b \text{ 혹은 } a \geq b \text{ 이다}$$

을 만족하면 A 를 X 의 **사슬**이라 한다.

보기 1. 지난 1.4 절의 보기 4 에 나오는 순서집합 2^X 를 생각해 보자. 만일 $a, b, c \in X$ 이면

$$\{\{a\}, \{a, c\}\}, \qquad \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, X\}$$

등은 X 의 사슬이고, X 는 두 사슬의 상계이다. 실제로, 순서집합 2^X 에서 X 는 모든 부분집합의 상계이다. 지난 1.4 절의 보기 1 에서 두 원소 이상으로 구성된 사슬은 $\{a, b\}$ 와 $\{a, c\}$ 이고, 이 두 사슬은 상계를 가진다. 그러나, $\{b, c\}$ 는 사슬이 아니다. 또한 $\{b, c\}$ 는 상계를 가지지 않는다. □

이제 극대원소라는 개념을 정의하자. 순서집합 X 의 원소 $m \in X$ 이 다음 성질

$$x \in X,\ x \geq m \implies x = m$$

(1) Max Zorn (1906∼1993), 독일 태생의 미국 수학자. Hamburg 에서 공부하였으나 나치에 의하여 추방되어 미국으로 건너간 후, 이차대전 이후 Indiana 에서 활동하였다.

(2) Felix Hausdorff (1868∼1942), 독일 수학자. Leipzig 와 베를린에서 수학과 천문학을 공부한 뒤 다른 필명으로 저술활동을 하기도 하였다. 1902 년부터 Leipzig 와 Bonn 에서 활동하였는데, 유태인 수용소로 가게 되자 가족과 더불어 스스로 목숨을 끊었다.

을 만족할 때, m 을 X 의 **극대원소**라 한다. 마찬가지로, $n \in X$ 이 다음 성질

$$x \in X,\ x \leq n \implies x = n$$

을 만족하면 n 을 X 의 **극소원소**라 한다. 순서집합 2^X 에서 X 는 극대원소인데, 사실 2^X 의 극대원소는 X 뿐이다. 지난 1.4 절의 보기 1 에서 b 와 c 는 극대원소이다. 그러나, 이 경우 $X = \{a, b, c\}$ 는 최대원소를 가지지 않는다. 자연수집합 $\mathbb{N}$ 이나 정수집합 Z 는 그 자체가 사슬인데, 극대원소를 가지지 않는다.

문제 3.1.1. 순서집합 X 의 최대원소는 극대원소가 됨을 보여라. 극대원소가 하나 뿐이지만 이 원소가 최대원소가 아닌 순서집합의 예를 들어라.

순서집합 X 의 모든 사슬들을 모은 집합 $\mathcal{C}(X)$ 는 포함관계에 의하여 다시 순서집합이 된다. 정리 3.1.2 는 이 순서집합 $\mathcal{C}(X)$ 가 극대원소를 가짐을 말한다. 본격적인 증명에 앞서서, 두 정리가 논리적으로 동치임을 보인다. 먼저 정리 3.1.1 을 가정하고, 순서집합 $\mathcal{C}(X)$ 에 정리 3.1.1 을 적용하려 한다. 만일 $\mathcal{C}$ 가 $\mathcal{C}(X)$ 의 사슬이면 $C = \bigcup \mathcal{C} \subset X$ 는 X 의 사슬이다. 이를 보이기 위하여 $a, b \in C$ 라 하자. 그러면 $a \in C_1 \in \mathcal{C}$ 와 $b \in C_2 \in \mathcal{C}$ 인 C_1, C_2 가 존재한다. 그런데 $\mathcal{C}$ 가 사슬이므로 $C_1 \subset C_2$ 혹은 $C_2 \subset C_1$ 이다. 만일 $C_1 \subset C_2$ 이면 $a, b \in C_2$ 인데, C_2 가 X 의 사슬이므로 $a \leq b$ 혹은 $b \leq a$ 이다. 물론 $C_2 \subset C_1$ 인 경우에도 마찬가지로 $a \leq b$ 혹은 $b \leq a$ 이다. 따라서, C 는 X 의 사슬이다, 즉 $C \in \mathcal{C}(X)$ 이다. 이제 C 가 $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}(X)$ 의 상계임은 자명하므로, 순서집합 $\mathcal{C}(X)$ 는 정리 3.1.1 의 가정을 만족하고, $\mathcal{C}(X)$ 는 극대원소를 가진다. 따라서, 정리 3.1.1 을 가정하면 정리 3.1.2 가 성립한다.

이제, 역으로 정리 3.1.2 를 가정하고 정리 3.1.1 이 성립함을 보이자. 이를 위하여 순서집합 X 의 모든 사슬이 상계를 가진다고 가정하자. 정리 3.1.2 에 의하여 X 는 극대 사슬 C 를 가지므로 이 사슬의 상계 $m \in X$ 를 택할 수 있는데, m 이 X 의 극대원소임을 보이면 된다. 이를 위하여 $x \in X$ 이고, $x > m$ 이라 가정하자. 그러면 x 는 C 의 임의의 원

소와 비교할 수 있고, 따라서 $C \cup \{x\}$ 도 사슬이다. 그런데 $C \cup \{x\} \supsetneq C$ 이므로 C 가 극대사슬이라는 데에 모순이다. 따라서, $x > m$ 인 $x \in X$ 은 존재하지 않으며 m 이 X 의 극대원소임을 알 수 있다.

위에서 살펴보았듯이 사슬 전체의 집합 $\mathcal{C}(X)$ 는 다음 도움정리의 두 조건을 만족한다. 따라서, 정리 3.1.2 는 다음 도움정리에서 바로 나오는데, 이 도움정리의 증명 과정에서 선택공리를 사용한다.

도움정리 3.1.3. 순서집합 X 의 부분집합족 $\mathcal{X} \subset 2^X$ 가 다음 성질

(가) $A \in \mathcal{X}$, $B \subset A$ 이면 $B \in \mathcal{X}$ 이다,
(나) $\mathcal{C}$ 가 $\mathcal{X}$ 의 사슬이면 $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{X}$ 이다

을 만족하면 $\mathcal{X}$ 는 극대원소를 가진다.

증명: 두 조건을 만족하는 $\mathcal{X}$ 를 고정하고, 각 $A \in \mathcal{X}$ 에 대하여

$$\widetilde{A} = \{x \in X : A \cup \{x\} \in \mathcal{X}\}, \qquad A \in \mathcal{X}$$

라 정의하자. 그러면, 임의의 $A \in \mathcal{X}$ 에 대하여 $A \subset \widetilde{A}$ 이고, A 가 $\mathcal{X}$ 의 극대원소일 필요충분조건은 $A = \widetilde{A}$ 이다. 집합 X 의 선택함수 h 를 택하고, 함수 $g : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 를 다음

$$g(A) = \begin{cases} A \sqcup \{h(\widetilde{A} \setminus A)\}, & A \subsetneq \widetilde{A}, \\ A, & A = \widetilde{A} \end{cases}$$

과 같이 정의하자. 그러면 $g(A) = A$ 를 만족하는 $A \in \mathcal{X}$ 의 존재성을 밝힘으로써 증명이 끝난다. 물론 $g(A) \supset A$ 는 항상 성립한다.

이제, $\mathcal{X}$ 의 부분집합 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ 에 관한 다음 조건

$$\emptyset \in \mathcal{Y}, \qquad A \in \mathcal{Y} \Longrightarrow g(A) \in \mathcal{Y}, \qquad \mathcal{C} \in \mathcal{C}(\mathcal{Y}) \Longrightarrow \bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{Y} \tag{1}$$

을 생각해 보자. 이러한 조건을 만족하는 모든 $\mathcal{X}$ 의 부분집합들의 교집합을 $\mathcal{Y}_0$ 라 하자. 가정에 의하여 $\mathcal{X}$ 가 이 조건을 만족하고 $\emptyset \in \mathcal{Y}_0$ 이

므로, $\mathcal{Y}_0$ 는 비어 있지 않으며 조건 (1) 을 만족하는 최소의 집합족이 되는데, $\mathcal{X}$ 의 사슬임을 보이려 한다. 만일 $\mathcal{Y}_0$ 가 $\mathcal{X}$ 의 사슬임이 증명되면, $\mathcal{Y}_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{Y}_0)$ 이므로 $A = \bigcup \mathcal{Y}_0 \in \mathcal{Y}_0$ 이고 다시 $g(A) \in \mathcal{Y}_0$ 이므로

$$g(A) \subset \bigcup \mathcal{Y}_0 = A$$

가 되어, 도움정리의 증명이 끝나게 된다.

이제 $C \in \mathcal{Y}_0$ 가 다음 성질

$$D \in \mathcal{Y}_0 \implies C \subset D \text{ 혹은 } D \subset C$$

을 만족할 때, C 를 비교가능 원소라 부르자. 예를 들어, $\emptyset$ 은 비교가능 원소이다. 우리의 목표는 다음

$$C \text{ 가 비교가능 원소이다} \implies g(C) \text{ 가 비교가능 원소이다} \tag{2}$$

을 증명하는 것이다. 이를 증명하고 나면, $\mathcal{Y}_0$ 의 모든 비교가능 원소들의 모임 $\mathcal{C}_0$ 가 조건 (1) 을 만족하게 됨을 알게 된다. 그런데, $\mathcal{Y}_0$ 는 (1) 을 만족하는 최소의 집합족이었으므로 $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{C}_0$, 즉 $\mathcal{Y}_0$ 의 모든 원소는 비교가능임을 알게 되고, 따라서 $\mathcal{Y}_0$ 가 사슬이므로 증명이 끝난다. 이제부터 (2) 를 증명하기 위하여 비교가능 원소 $C \in \mathcal{Y}_0$ 를 고정하고 다음 집합족

$$\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{Y}_0 : A \subset C \text{ 혹은 } g(C) \subset A\}$$

에 대하여 (1) 을 보이려 하는데, 첫째 및 세째 조건은 자명하다.

이제 둘째 조건을 보이기 위하여, 임의의 $A \in \mathcal{Y}_0$ 에 대하여

$$A \subset C \text{ 혹은 } g(C) \subset A \implies g(A) \subset C \text{ 혹은 } g(C) \subset g(A) \tag{3}$$

을 보이면 된다. 먼저 $A = C$ 이면 $g(C) = g(A)$ 이므로 되었고, $g(C) \subset A$ 인 경우에는 $g(C) \subset A \subset g(A)$ 이므로 되었다. 이제 $A \subsetneq C$ 라 하자. 그러면 C 가 비교가능 원소이므로 $g(A) \subset C$ 이거나 $C \subsetneq g(A)$ 이다. 만

일 $C \subsetneq g(A)$ 이면 $A \subsetneq C \subsetneq g(A)$ 이므로 $g(A) \setminus A$ 는 두 개 이상의 원소를 가지게 되는데, 이는 g 의 정의에 의하여 불가능하다. 따라서, 조건 (3) 이 증명되었고, 집합족 $\mathcal{U}$ 는 조건 (1) 을 만족한다.

집합족 $\mathcal{Y}_0$ 는 조건 (1) 을 만족하는 최소의 집합족인데 $\mathcal{U} \subset \mathcal{Y}_0$ 이므로 $\mathcal{U} = \mathcal{Y}_0$ 이다. 따라서, 임의의 $A \in \mathcal{Y}_0$ 에 대하여 $A \subset C \subset g(C)$ 이거나 $g(C) \subset A$ 이다. 다시 말하여 $g(C)$ 는 비교가능 원소이다. 집합 $C \in \mathcal{Y}_0$ 가 임의의 비교가능 원소였으므로 (2) 가 증명되었고, 모든 증명이 끝났다. □

문제 3.1.2. 도움정리 3.1.3 을 이용하여 정리 3.1.2 를 증명하여라.

순서집합 X 에서 임의의 비어 있지 않은 부분집합이 최소 원소를 가지면 X 를 **정렬집합**이라 한고, 이러한 순서관계를 **정렬순서**라 한다. 정리 2.1.4 는 자연수집합 $\mathbb{N}$ 이 정렬집합임을 말해 준다. 정렬집합은 이미 그 자체로서 사슬이 된다.

이제 방금 증명한 초른 도움정리를 적용하여 임의의 집합 X 에 정렬순서를 부여할 수 있음을 보이려고 하는데, 초른 도움정리가 적용되는 대표적인 사례이다. 먼저, X 의 부분집합 A 와 $G \subset A \times A$ 로서 A 의 정렬순서를 부여해 주는 관계들의 순서쌍 (A, G) 들을 생각하고, 이러한 순서쌍 전체의 집합을 $\mathcal{X}$ 라 두자. 이제, 집합 $\mathcal{X}$ 에 순서관계를 부여하기 위하여, $(A, G), (B, H) \in \mathcal{X}$ 가 다음 조건

$$A \subset B, \qquad G \subset H, \qquad x \in A,\ y \in B \setminus A \Longrightarrow (x, y) \in H \tag{4}$$

를 만족할 때, $(A, G) \leq (B, H)$ 라 정의하면 순서관계가 됨을 바로 확인할 수 있다. 순서집합 $\mathcal{X}$ 에 초른 도움정리를 적용하기 위하여 $\mathcal{C}$ 가 $\mathcal{X}$ 의 사슬이라 하고

$$A_0 = \bigcup \{A \subset X : (A, G) \in \mathcal{C}\},$$
$$G_0 = \bigcup \{G \subset X \times X : (A, G) \in \mathcal{C}\}$$

라 두자. 이제, $(A_0, G_0) \in \mathcal{X}$ 임을 보이려 하는데, 먼저 G_0 가 A_0 의 순서관계임을 보이자.

문제 3.1.3. (4) 가 $\mathcal{X}$ 의 순서관계를 정의함을 보여라.

만일 $x \in A_0$ 이면 $x \in A$ 인 $(A, G) \in \mathcal{C}$ 가 있다. 따라서, 임의의 $x \in A_0$ 에 대하여 $(x, x) \in G \subset G_0$ 이고, (순1) 이 증명된다. 다음으로 (순2) 를 보이기 위하여 $x, y \in A_0$, $(x, y) \in G_0$, $(y, x) \in G_0$ 라 가정하자. 그러면 $(x, y) \in G$ 이고 $(y, x) \in H$ 인 $(A, G), (B, H) \in \mathcal{C}$ 가 있다. 그런데, $\mathcal{C}$ 가 사슬이므로 $(A, G) \leq (B, H)$ 이거나 $(A, G) \geq (B, H)$ 이다. 어느 경우이거나, (x, y) 및 (y, x) 는 모두 $G \cup H \subset (A \cup B) \times (A \cup B)$ 에 속하게 되는데, $G \cup H$ 는 $A \cup B$ 의 순서관계이다. 따라서, $x = y$ 이다. 끝으로, $(x, y), (y, z) \in G_0$ 라 가정하자. 이번에도 $(x, y) \in G$ 이고 $(y, z) \in H$ 인 $(A, G), (B, H) \in \mathcal{C}$ 가 있는데, 방금 증명한 경우와 마찬가지로 $(x, z) \in G_0$ 임이 증명된다.

이제, G_0 가 A_0 의 정렬순서임을 보여야 한다. 이를 위하여 $\emptyset \neq B \subset A_0$ 라 하자. 그러면 적절한 $(A, G) \in \mathcal{C}$ 에 대하여 $B \cap A \neq \emptyset$ 이다. 이제 $\emptyset \neq B \cap A \subset A$ 이고, G 가 A 의 정렬순서이므로 $B \cap A$ 는 최소 원소 b 를 가진다. 즉,

$$b \in B \cap A, \qquad a \in B \cap A \implies (b, a) \in G$$

가 성립한다. 이제 $b \in B$ 가 $B \subset A_0$ 의 최소 원소임을 보이자. 즉,

$$x \in B \implies (b, x) \in G_0$$

임을 보이려 한다. 이를 위하여 $x \in B$ 라 하자. 먼저 $x \in A$ 이면 $x \in B \cap A$ 이므로 $(b, x) \in G \subset G_0$ 가 된다. 이제 $x \notin A$ 라 하자. 그러면 적절한 $(C, K) \in \mathcal{C}$ 에 대하여 $x \in C$ 인데, $x \in C \setminus A$ 이므로 $C \nsubseteq A$ 이다. 따라서 $(C, K) \nleq (A, G)$ 인데, $\mathcal{C}$ 가 사슬이므로 $(A, G) \leq (C, K)$ 가 된다. 그런데, $b \in A$ 이고 $x \in C \setminus A$ 이므로 $(A, G) \leq (C, K)$ 의 정의에 의

하여 $(b,x) \in K \subset G_0$ 임을 알 수 있다. 이제, $(A_0, G_0) \in \mathcal{X}$ 가 $\mathcal{C}$ 의 상계임을 보이는 과정은 방금 증명한 방법과 비슷하므로 생략한다.

문제 3.1.4. $(A_0, G_0) \in \mathcal{X}$ 가 $\mathcal{C}$ 의 상계임을 보여라.

지금까지, 순서집합 $\mathcal{X}$ 가 정리 3.1.1 의 가정을 만족한다는 것을 보였다. 따라서, $\mathcal{X}$ 는 극대원소 $(D,L) \in \mathcal{X}$ 를 가진다. 이제, $D = X$ 임을 보이자. 만일 $D \subsetneq X$ 이면 $x \in X \setminus D$ 를 잡고,

$$E = D \cup \{x\}, \qquad M = L \cup \{(a,x) : a \in D\} \cup \{(x,x)\}$$

라 두자. 그러면 M 은 E 의 순서관계가 되는데 x 는 임의의 $a \in D$ 보다 큰 원소이다. 따라서, (E,M) 은 정렬집합이고 $(E,M) \in \mathcal{X}$ 인데 $(E,M) > (D,L)$ 이다. 이는 (D,L) 이 극대원소라는 데에 모순이다. 결국 $D = X$ 이고, L 은 X 에 정의된 정렬순서이다. 따라서, 다음 정리를 얻는다.

정리 3.1.4. (체르멜로[3] 정렬정리) 임의의 집합에는 정렬순서가 존재한다.

이제, 정리 3.1.4 를 가정하면 선택공리를 쉽게 얻을 수 있다. 실제로, 집합 X 가 정렬집합일 때, 임의의 $A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 에 대하여 A 의 최소 원소를 $h(A)$ 라 하면 $h : 2^X \setminus \{\emptyset\} \to X$ 는 선택함수이다. 따라서, 선택공리, 정리 3.1.1, 정리 3.1.2, 정리 3.1.4 가 모두 논리적으로 동치임을 알 수 있다.

3.2. 선택공리의 응용

이 절에서는 선택공리, 특히 정리 3.1.1 이나 정리 3.1.2 가 수학의 여러 분야에 어떻게 적용되는지 살펴보려 한다. 선택공리를 사용하는 정

(3) Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871∼1953), 독일 수학자. 베를린에서 공부하고, Göttingen 과 취리히 등에서 활동하였다.

리들은 각 해당 분야에서 매우 중요한 역할을 하는 경우가 많다. 이러한 정리들의 예를 살펴보고 선택공리를 이용하여 어떻게 증명되는지 살펴보는 것이 목적이기 때문에, 정리에 나오는 용어를 모두 정의하고 해당 정리를 끝까지 증명하는 것은 피하고 선택공리가 쓰이는 부분을 집중적으로 살펴보려 한다.

벡터공간 V 의 부분집합 B 가 다음 두 가지 성질

(가) $v_1, v_2, \ldots, v_n \in B$ 와 스칼라 $a_1, a_2, \ldots a_n$ 이 다음

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0 \tag{5}$$

을 만족하면 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ 이다,

(나) 임의의 $v \in V$ 에 대하여 $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ 을 만족하는 $v_1, v_2, \ldots, v_n \in B$ 와 스칼라 $a_1, a_2, \ldots a_n$ 이 존재한다

을 만족하면 B 를 벡터공간 V 의 **기저**라 부른다.

이제 정리 3.1.1 을 이용하여 임의의 벡터공간에 기저가 존재함을 보이는데, 이는 수학의 여러 분야에서 쓰이는 전형적인 방법이다. 먼저 성질 (가) 를 만족하는 V 의 부분집합 전체의 집합을 $\mathcal{X}$ 라 하자. 우선 0 아닌 벡터 하나로 이루어진 집합은 (가) 를 만족하므로 $\mathcal{X}$ 는 비어 있지 않다. 이 집합은 포함관계에 의하여 순서집합이 되는데 모든 사슬이 상계를 가진다는 것을 보이자. 이를 위하여 $\mathcal{X}$ 의 사슬 $\mathcal{C}$ 를 하나 잡자. 이제 $C = \bigcup \mathcal{C}$ 가 다시 $\mathcal{X}$ 의 원소가 된다는 것을 보이면 $\bigcup \mathcal{C}$ 는 $\mathcal{C}$ 의 상계가 될 것이다. 만일 $v_1, v_2, \ldots, v_n \in C$ 이면 각 $i = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $v_i \in C_i$ 인 $C_i \in \mathcal{C}$ 를 찾을 수 있다. 그런데 $\mathcal{C}$ 가 사슬이므로 $\{C_1, C_2, \ldots C_n\}$ 의 최대 원소를 잡을 수 있다. 그 최대 원소를 C_0 라 두면 (물론, C_0 는 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 중의 하나이다) 각 v_i 는 $C_0 \in \mathcal{C}$ 의 원소가 된다. 따라서, 스칼라 $a_1, a_2, \ldots a_n$ 이 (5) 를 만족하면 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ 이 된다. 결국, C 는 성질 (가) 를 만족하고, 순서집합 $\mathcal{X}$ 가 정리 3.1.1 의 가정을 만족함을 보였으므로, $\mathcal{X}$ 에는 극대

원소 B 가 존재한다. 이제, B 가 성질 (나) 를 만족함을 보이면 증명이 끝난다.

이를 위하여 B 가 성질 (나) 를 만족하지 않는다고 가정하자. 그러면 (나) 에 나오는 형태로 표시되지 않는 원소 $v \in V$ 가 존재한다. 이제 $B \sqcup \{v\}$ 가 성질 (가) 를 만족함을 보이면 B 가 $\mathcal{X}$ 의 극대 원소라는 데에 모순이 되어 증명이 끝난다. 이제, 우리가 증명해야 할 내용을 정확하게 기술하여 보자. 집합 $B \subset V$ 가 있을 때, 유한개의 $v_1, v_2, \ldots, v_n \in B$ 와 스칼라 $a_1, a_2, \ldots a_n$ 에 대하여 $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ 으로 표시되는 벡터 전체의 집합을 $\operatorname{span} B$ 라 표시하자. 성질 (나) 는 $V = \operatorname{span} B$ 임을 말하고 있다. 우리가 증명해야 하는 내용을 서술하면 다음

- 만일 벡터공간 V 의 부분집합 $B \subset V$ 가 성질 (가) 를 만족하고 $v \notin \operatorname{span} B$ 이면 $B \sqcup \{v\}$ 도 성질 (가) 를 만족한다

과 같이 된다. 이 명제는 초보적인 선형대수의 지식을 이용하면 바로 증명할 수 있으므로 생략하고, 결론을 써 보자.

정리 3.2.1. 임의의 벡터공간에는 기저가 존재한다.

지금까지의 논증은 다음과 같이 보다 단순화할 수 있다. 먼저, V 의 원소 v_1 을 잡는다. 만일 $\operatorname{span}\{v_1\} = V$ 이면 $\{v_1\}$ 이 기저이므로 증명이 끝난다. 만일 $\operatorname{span}\{v_1\} \subsetneq V$ 이면 $v_2 \in V \setminus \operatorname{span}\{v_1\}$ 를 선택한다. 만일 $\operatorname{span}\{v_1, v_2\} = V$ 이면 $\{v_1, v_2\}$ 가 기저이므로 역시 증명이 끝난다. 만일 $\operatorname{span}\{v_1, v_2\} \subsetneq V$ 이면 다시 $v_3 \in V \setminus \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ 를 잡는다. 이러한 과정을 되풀이하여 $V = \operatorname{span} B$ 가 될 때까지 B 의 원소를 계속 선택하면 되는데, 유한 번의 단계에서 끝나는 경우에는 별 문제가 없지만 어느 경우나 그 선택이 존재한다는 것이 바로 선택공리가 말하는 것이다. 물론 유한차원 벡터공간에서는 선택공리를 사용하지 않고 증명을 마칠 수 있다.

이와 유사한 논증 방법은 여러 가지 확장정리에서 볼 수 있다. 집합 $A \subset X$ 와 함수 $f : A \to Y$ 가 주어져 있을 때, $\widetilde{f}|_A = f$ 를 만족하는 $\widetilde{f} : X \to Y$ 를 f 의 **확장**이라고 한다. 이러한 확장이 존재하는가 하는 문제는 수학의 모든 분야에서 대단히 중요한 문제이다.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & \\ A \arrow[u, hook, "\iota_A"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

물론 임의의 함수 $f : A \to Y$ 는 임의의 $X \supset A$ 에 대하여 확장을 가진다. 예를 들면 $y_0 \in Y$ 를 고정하고 각 $x \in X \setminus A$ 에 대하여 $\widetilde{f}(x) = y_0$ 라 정의하면 된다. 그러나, 많은 경우 어떤 조건을 만족하는 확장을 요구하게 된다. 예를 들어, V, W 가 벡터공간, V_0 는 V 의 부분공간, $f : V_0 \to W$ 가 선형사상일 때, 그 확장 $\widetilde{f} : V \to W$ 도 선형사상임을 요구할 수 있다. 이 경우, 다음과 같이 논리를 전개할 수 있다. 우선 $v_1 \in V \setminus V_0$, $w_1 \in W$ 를 잡고 $V_1 = \operatorname{span} V_0 \cup \{v_1\}$ 이라 두자. 임의의 $v \in V_1$ 은 $v = v_0 + a_1 v_1$ (단, $v_0 \in V,\ a_1$ 은 스칼라) 로 표시되므로

$$\widetilde{f}_1 : v_0 + a_1 v_1 \mapsto f(v_0) + a_1 w_1 : V_1 \to W$$

라 정의하면 $\widetilde{f}_1$ 은 선형사상이고 $\widetilde{f}_1|_{V_0} = f$ 이다. 만일 $V = V_1$ 이면 증명이 끝난다. 만일 $V_1 \subsetneq V$ 이면 $v_2 \in V \setminus V_1$ 와 $w_2 \in W$ 를 잡아서 $V_2 = \operatorname{span} V_1 \sqcup \{v_2\}$ 이라 두고, 같은 과정을 반복하면 $\widetilde{f}_2|_{V_1} = \widetilde{f}_1$ 인 선형사상 $\widetilde{f}_2 : V_2 \to W$ 을 얻는다. 물론 $V_2 = V$ 이면 증명이 끝나고, 그렇지 않으면 $v_3 \in V \setminus V_2$ 를 택하여 같은 작업을 계속하면 원하는 선형사상 $\widetilde{f} : V \to W$ 를 얻을 수 있다. 물론 이러한 선택이 존재한다는 것이 바로 선택공리인데, 선택공리를 이용한 보다 엄밀한 증명은 정리 3.1.4 의 증명과 비슷한 과정을 거치는 데, 이러한 논증 방법은 선택공리를 적용하는 전형적인 방법이다. 이번에는 정리 3.1.2 를 이용하여 다음 정리를 증명하여 보자.

정리 3.2.2. 벡터공간 V 의 부분공간 V_0 에서 정의된 임의의 선형사상 $f : V_0 \to W$ 에 대하여 $\widetilde{f}|_{V_0} = f$ 를 만족하는 선형사상 $\widetilde{f} : V \to W$ 가 존재한다.

증명: 먼저 순서집합을 만드는데, V_0 를 품는 V 의 부분공간 V_ι 와 $\widetilde{f}_\iota|_{V_0} = f$ 를 만족하는 선형사상 $\widetilde{f}_\iota : V_\iota \to W$ 의 순서쌍 $(V_\iota, \widetilde{f}_\iota)$ 를 생각하자. 이제, 이러한 순서쌍 전체의 집합 $\mathcal{X} = \{(V_\iota, \widetilde{f}_\iota) : \iota \in I\}$ 에 순서관계를 주는데, 다음 조건

$$V_1 \subset V_2, \qquad \widetilde{f}_2|_{V_1} = \widetilde{f}_1$$

을 만족할 때, $(V_1, \widetilde{f}_1) \leq (V_2, \widetilde{f}_2)$ 라 정의하자. 그러면 순서관계가 됨을 바로 확인할 수 있고, $(V_0, f) \in \mathcal{X}$ 이므로 $\mathcal{X}$ 는 비어 있지 않다. 이제, 정리 3.1.2 에 의하여 극대 사슬 $\mathcal{C} = \{(V_\iota, \widetilde{f}_\iota) : i \in J\}$ 가 존재하는데, $Z = \bigcup\{V_\iota : \iota \in J\}$ 는 벡터공간임을 바로 확인할 수 있다. 또한, $v \in Z$ 가 V_ι 에 들어가면 $\widetilde{f}_Z(v) = \widetilde{f}_\iota(v)$ 라 정의함으로써 선형사상 $\widetilde{f}_Z : Z \to W$ 를 얻는데, $\widetilde{f}_Z|_{V_0} = f$ 임은 자명하고, $\widetilde{f}_Z$ 가 잘 정의되어 있음은 쉽게 보일 수 있다. 이제 $Z = V$ 임을 보이면 증명이 끝난다. 이를 보이기 위하여, $Z \subsetneq V$ 라 가정하고, $v \in V \setminus Z$ 를 잡자. 그러면 앞에서 한 방법에 의하여 함수 $\widetilde{f}_Z : Z \to W$ 를 $Z_1 = \operatorname{span}(Z \sqcup \{v\})$ 에 확장하여 선형사상 $\widetilde{f}_{Z_1}$ 을 얻는다. 그러면 $(Z_1, \widetilde{f}_{Z_1})$ 은 $\mathcal{C}$ 에 들어가지 않으므로 $\mathcal{C} \sqcup \{(Z_1, \widetilde{f}_{Z_1})\}$ 은 $\mathcal{C}$ 보다 큰 사슬이 된다. 이는 $\mathcal{C}$ 가 극대 사슬이라는 데에 모순이고, 따라서 $Z = V$ 가 되어 증명이 끝난다. □

여러 가지 함수공간을 비롯한 무한차원 벡터공간을 다루기 위해서는 무한합을 정의할 수 있어야 하는데, 이를 위해서는 벡터 사이에 거리 혹은 노음이 정의되어 있어야 한다. 이렇게 노음이 부여된 벡터공간을 노음공간이라 부른다. 이 경우, 노음공간 사이의 의미있는 선형사상은 노음이 유계인 유계사상이다. 위 정리와 마찬가지로 차원이 하나 높은 공간으로 노음이 보존되는 확장이 가능하다는 것을 보이면 임

의의 부분공간에서 정의된 유계사상을 노음이 보존되도록 전체공간에 확장할 수 있다. 특히, 그 공역이 스칼라인 경우 이것이 가능한데, 이를 말해 주는 것이 함수해석의 기본 도구인 한(4)–바나하(5) 정리이다. 선택공리가 이용되는 과정이 정리 3.2.2 의 증명과 같으므로 그 증명은 하지 않는다.(6)

정리 3.2.3. 노음공간 X 와 그 부분공간 Y 가 주어져 있다. 그러면 임의의 유계 선형사상 $\phi : Y \to \mathbb{C}$ 에 대하여 다음 성질

$$\widetilde{\phi}|_Y = \phi, \qquad \|\widetilde{\phi}\| = \|\phi\|$$

을 만족하는 유계 선형사상 $\widetilde{\phi} : X \to \mathbb{C}$ 가 존재한다.

이 외에도, 옹골공간들의 곱집합에 곱위상을 부여하면 다시 옹골공간의 된다는 위상수학의 티코노프(7) 정리, 자유군의 부분군이 다시 자유군이 된다는 대수학의 쉬라이어(8) 정리 등도 그 증명에서 선택공리가 사용되는 대표적인 예이다.

3.3. 정렬집합과 서수

정렬집합의 대표적인 예는 물론 자연수 전체의 순서집합 $\mathbb{N}$ 이다. 앞으로 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$ 을 정렬집합으로 이해할 때에는 ω 라 쓴다.

(4) Hans Hahn (1879∼1934), 오스트리아 수학자. Strassburg 와 Munich 에서 공부하고 비엔나에서 활동하였다.

(5) Stefan Banach (1892∼1945), 폴란드 수학자. 정식으로 수학교육을 받은 바 없지만, 1922 년부터 Lwów (Lviv, 이차대전 이후 우크라이나에 편입됨) 에서 활동하였으며 폴란드 수학회장을 역임하였다. 그에 관한 전기로 [21] 이 있다.

(6) 노음공간과 유계사상, 그리고 한–바나하 정리에 관한 자세한 내용은 참고문헌 [2], 6 장을 참조하라.

(7) Andreĭ Nikolaevich Tikhonov (1906∼1993), 러시아 수학자. 모스크바에서 활동하였다.

(8) Otto Schreier (1901∼1929), 오스트리아 수학자. 비엔나에서 공부하고 Hamburg 에서 잠시 활동하다 요절하였다.

각 자연수 $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 은 그 자체로서 이미 정렬집합이다. 기존의 정렬집합들로부터 새로운 정렬집합을 만들어내는 방법에는 여러 가지가 있다.

정렬집합 A 와 $x \in A$ 에 대하여 다음

$$S_x = \{a \in A : a < x\} \tag{6}$$

과 같이 정의된 집합 S_x 를 x 에 의한 A 의 **절편**이라 부른다. 정렬집합의 절편은 당연히 정렬집합이다.

보기 1. 임의의 $n \in \omega$ 에 대하여 $S_n = n$ 이다. 또한, 임의의 $m \in n$ 에 대하여 $S_m = m$ 이다. □

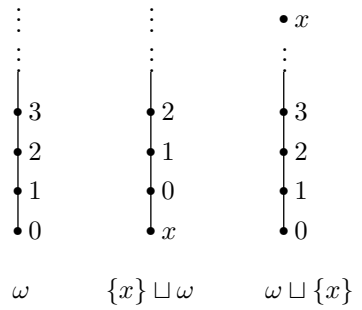
이제 두 정렬집합 A, B 가 서로소일 때, 그 합집합 $A \sqcup B$ 에 순서를 정의하여 보자. 각 $x, y \in A \sqcup B$ 에 대하여 다음

$$x, y \in A,\ x \le y \quad \text{혹은} \quad x, y \in B,\ x \le y \quad \text{혹은} \quad x \in A,\ y \in B \tag{7}$$

이 성립할 때, $x \le y$ 라 정의하자. 여기서 $x, y \in A$ 인 경우 $x \le y$ 라 함은 물론 A 에서 정의된 순서를 따르는 것이고 $x, y \in B$ 의 경우도 마찬가지이다. 이렇게 $A \sqcup B$ 에 새로이 정의된 관계가 정렬순서가 됨은 자명하다.

문제 3.3.1. 서로소인 정렬집합 A, B 의 합집합 $A \sqcup B$ 에 (7) 과 같이 순서를 정의하면 정렬순서가 됨을 보여라.

보기 2. 한 가지 주의할 점으로 $A \sqcup B$ 와 $B \sqcup A$ 는 집합으로서는 같은 집합이지만 순서집합으로서는 다르다. 예를 들어서 $\omega \sqcup \{x\}$ 에서는 맨 뒤에 나오는 $x \in \{x\}$ 가 최대 원소이다. 그러나, $\{x\} \sqcup \omega$ 에는 최대 원소가 없다. 실제로 $\{x\} \sqcup \omega$ 는 ω 와 '같은' 순서집합이다. □



순서집합 A, B 사이에 정의된 함수 $f : A \to B$ 가 다음 조건

$$x, y \in A,\ x \le y \Longrightarrow\ f(x) \le f(y)$$

를 만족하면, 이를 **증가함수**라 한다. 만일 자기 자신 f 와 그 역함수 f^{-1} 가 모두 증가함수인 전단사함수 $f : A \to B$ 가 존재하면 A 와 B 는 **순서동형**이라 부르고, $A \approx B$ 라 쓴다. 예를 들어 $f(x) = 0$, $f(n) = n + 1$ 이라 정의된 함수 $f : \{x\} \sqcup \omega \to \omega$ 는 순서동형을 정의하여 준다.

문제 3.3.2. 만일 정렬집합 A, B 사이에 정의된 함수 $f : A \to B$ 가 증가하는 전단사함수이면 $x \le y \Longleftrightarrow f(x) \le f(y)$ 이 성립함을 보여라.

이제 순서집합 A, B 의 곱집합 $A \times B$ 에 순서를 정의하여 보자. 두 원소 $(a_1, b_1) \in A \times B$ 과 $(a_2, b_2) \in A \times B$ 에 대하여 다음

$$a_1 < a_2 \quad \text{혹은} \quad a_1 = a_2,\ b_1 \le b_2$$

가 성립할 때, $(a_1, b_1) \le (a_2, b_2)$ 라 정의하자. 이와같이 $A \times B$ 에 정의된 순서를 **사전순서**라 부른다. 마찬가지로 다음

$$b_1 < b_2 \quad \text{혹은} \quad b_1 = b_2,\ a_1 \le a_2 \tag{8}$$

가 성립할 때, $(a_1, b_1) \le (a_2, b_2)$ 라 정의된 순서를 **반사전순서**라 부른다. 만일 A, B 가 정렬집합이면 $A \times B$ 에 정의된 사전순서나 반사전순

서는 모두 정렬순서가 된다. 앞으로, 정렬집합의 곱집합에는 반사전순서가 부여된 것으로 간주한다.

보기 3. 정렬집합의 곱하기도 교환이 되지 않는다. 예를 들어서 $X = \{x, y\}$ (단, $x < y$) 일 때 $\omega \times X$ 의 순서는 작은 것부터 나열할 때 다음

$$(0, x),\ (1, x),\ (2, x), \ldots, (0, y),\ (1, y),\ (2, y), \ldots$$

과 같이 주어진다. 그러나, $X \times \omega$ 에서는 다음

$$(x, 0),\ (y, 0),\ (x, 1),\ (y, 1),\ (x, 2),\ (y, 2), \ldots$$

과 같이 순서가 주어진다. 따라서, $X \times \omega \approx \omega$ 이다. □

정렬집합을 그림으로 나타낼 때에는 지면을 절약하기 위하여 큰 원소를 위에 넣는 대신 오른쪽에 넣기로 한다. 그리고, 원소와 원소 사이에 순서가 있음을 표시하는 직선도 의미가 없으므로 생략하기로 한다.

$\omega \times X$ • • • $\cdots$ • • • $\cdots$

$X \times \omega$ • • • • • • $\cdots$

ω • • • • • • $\cdots$

이제부터 두 정렬집합을 비교하려 한다. 결론부터 말하면 두 정렬집합은 서로 같거나, 어느 한 쪽이 다른 쪽의 절편이 된다. 이를 명확하게 기술하자.

정리 3.3.1. 두 정렬집합 A, B 가 주어지면 다음

(가) A 와 B 는 순서동형이다,
(나) A 는 B 의 절편과 순서동형이다,
(다) B 는 A 의 절편과 순서동형이다

중 한 가지가 성립한다.

증명: 먼저, 다음

$$p, q \in B,\ f : S_q \to S_p \text{ 가 증가 단사함수} \implies q \le p \tag{9}$$

이 성립함을 보이자. 이를 위하여 $f : S_q \to S_p$ 가 증가 단사함수이고, $p < q$ 라 가정하자. 이 때,

$$P = \{x \in S_q : f(x) < x\}$$

라 정의하자. 만일 $P \neq \emptyset$ 이면 P 는 최소 원소 m 을 가진다. 특히, $f(m) < m$ 이므로 $f(f(m)) < f(m)$ 이 성립하고, 따라서 $f(m) \in P$ 이다. 그런데 $f(m) < m$ 이므로, 이는 m 이 P 의 최소 원소라는 데에 모순이고, 따라서 $P = \emptyset$ 임을 알 수 있다. 특히, $p \in S_q \setminus P$ 이므로 $f(p) \ge p$ 이고, 따라서 $f(p) \notin S_p$ 인데, 이는 f 의 정의에 의하여 불가능하므로 (9) 가 증명되었다. 이에 의하여 다음

$$p, q \in B,\ S_p \approx S_q \implies p = q \tag{10}$$

이 성립함은 자명하다.

이제, 정렬집합 A 의 부분집합 C 를 다음

$$C = \{x \in A : S_x \approx S_p \text{ 인 } p \in B \text{ 가 존재한다}\}$$

과 같이 정의한다. 또한 새로운 함수 $\phi : C \to B$ 를 정의하는데, (10) 에 의하여 $x \in C$ 이고 $S_x \approx S_p$ 이면 $\phi(x) = p$ 라 정의할 수 있다. 만일 $\phi(x) = \phi(y) = p$ 이면 $S_x \approx S_p \approx S_y$ 인데, 다시 (10) 에 의하여 $x = y$ 이므로 $\phi : C \to B$ 는 단사함수이다. 이제,

$$x, y \in C,\ x \le y \implies \phi(x) \le \phi(y) \tag{11}$$

이 성립함을 보이자. 만일 $f : S_x \to S_{\phi(x)}$, $g : S_y \to S_{\phi(y)}$ 가 순서동형을 정의한다 하자. 그러면 $x \le y$ 이므로 포함함수 $\iota : S_x \hookrightarrow S_y$ 를 생각할 수 있고, 합성함수

$$g \circ \iota \circ f^{-1} : S_{\phi(x)} \to S_{\phi(y)}$$

는 증가 단사함수이다. 따라서, (9) 에 의하여 $\phi(x) \le \phi(y)$ 임을 알 수 있고, 함수 $\phi : C \to \phi(C)$ 는 순서동형을 정의한다.

이제 $C = A$ 이거나 C 는 A 의 절편임을 보이자. 이를 위하여 다음

$$x \in A,\ y \in C,\ x < y \implies x \in C \tag{12}$$

이 성립함을 보이자. 먼저, $y \in C$ 이므로 순서동형 $g : S_y \to S_{\phi(y)}$ 를 잡을 수 있다. 한편 $x < y$ 이므로 $S_x \subset S_y$ 인데 $g(S_x) = S_{g(x)}$ 임을 보이자. 만일 $z \in S_y$ 이면,

$$z \in S_x \iff z < x \iff g(z) < g(x) \iff g(z) \in S_{g(x)}$$

이므로 $g|_{S_x} : S_x \to S_{g(x)}$ 역시 순서동형을 정의한다. 따라서, $x \in C$ 임을 알 수 있다.

일반적으로, 정렬집합 A 의 부분집합 $C \subset A$ 가 성질 (12) 를 만족하면 자동적으로 $C = A$ 이거나 C 는 A 의 절편이 된다. 이를 보이기 위하여 $C \subsetneq A$ 라 하면, $A \setminus C$ 는 최소 원소 ℓ 을 가지는데, 이 경우 $C = S_\ell$ 이다. 만일 $x \in S_\ell$ 이면 $x < \ell$ 이므로 $x \in C$ 이다. 왜냐 하면, 만일 $x \in A \setminus C$ 이면 ℓ 이 $A \setminus C$ 의 최소 원소라는 데에 모순이기 때문이다. 역으로, $x \in C$ 라 하자. 만일 $\ell \le x$ 이면 (12) 에 의하여 $\ell \in C$ 인데, 이 역시 ℓ 이 $A \setminus C$ 의 최소 원소라는 데에 모순이다. 따라서, $x \in C$ 이면 $x < \ell$, 즉 $x \in S_\ell$ 임을 알 수 있다. 따라서, $C = A$ 이거나 C 는 A 의 절편이다. 마찬가지로 $\phi(C) = B$ 이거나 $\phi(C)$ 는 B 의 절편이다.

그러므로, 다음 네 가지 경우가 생긴다.

(1) $C = A$, $\phi(C) = B$ 이다,
(2) $C = A$, $\phi(C)$ 는 B 의 절편이다,
(3) C 는 A 의 절편이고, $\phi(C) = B$ 이다,
(4) C 는 A 의 절편이고, $\phi(C)$ 는 B 의 절편이다.

이미 $\phi : C \to \phi(C)$ 가 순서동형을 정의하는 것을 보였으므로, 네번째 경우가 일어나지 않음을 보이면 전체 증명이 끝난다. 이를 보이기 위하여 $C = S_x$, $\phi(C) = S_p$ 라 가정하자. 그러면 $C \approx \phi(C)$ 이므로 $S_x \approx S_p$ 이고, 이는 $x \in C = S_x$ 임을 뜻한다. 즉, $x < x$ 임을 뜻하는데, 이는 모순이다. 그러므로, 네번째 경우는 일어날 수 없고, 증명이 끝난다. □

문제 3.3.3. 정렬집합 A 의 부분집합 C 는 A 혹은 A 의 절편과 순서동형임을 보여라.

임의의 유한 정렬집합 X 는 딱 하나의 자연수 n 과 순서동형임이 분명한데, 이 때, $\mathrm{ord}\,(X) = n$ 이라 쓴다. 임의의 정렬집합 A 에 다음 성질

$$A_1 \approx A_2 \iff \mathrm{ord}\,(A_1) = \mathrm{ord}\,(A_2) \tag{13}$$

이 만족하도록 $\mathrm{ord}\,(A)$ 를 대응시킬 때 $\mathrm{ord}\,(X)$ 를 X 의 **서수**라 부른다.(9) 앞으로, $\mathrm{ord}\,(\mathbb{N}) = \omega$ 로 표시한다.

이제, 서수들 사이의 연산을 정의하자. 먼저 더하기를 정의하는데, $\mathrm{ord}\,(A) = \alpha$, $\mathrm{ord}\,(B) = \beta$ 가 되도록 서로소인 정렬집합 A, B 를 잡아

$$\alpha + \beta = \mathrm{ord}\,(A \sqcup B)$$

로 정의한다. 여기서, $A \sqcup B$ 의 정렬순서는 (7) 에 의하여 결정된다. 따라서, 보기 2 에서 보듯이

$$\omega + 1 \neq 1 + \omega = \omega$$

이므로, 더하기에 관한 교환법칙이 성립하지 않음을 유념하여야 한다. 곱하기는 $A \times B$ 에 (8) 에서 정의된 반사전순서를 부여한 후,

$$\alpha\beta = \mathrm{ord}\,(A \times B)$$

(9) 서수가 '무엇'인가 하는 정의는 3.6 절에서 한다.

라 정의한다. 마찬가지로, 보기 3 에서 보듯이

$$\omega 2 \neq 2\omega = \omega$$

이므로, 곱하기에 관한 교환법칙도 성립하지 않는다. 만일 $g : A \to C$, $h : B \to D$ 가 순서동형을 정의한다면 $f : A \sqcup B \to C \sqcup D$ 를

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in A, \\ h(x), & x \in B \end{cases} \tag{14}$$

라 정의하면 f 도 순서동형을 정의하므로, $a+b$ 가 잘 정의되어 있음을 알 수 있다. 이렇게 정의된 함수 f 를 $g \sqcup h$ 라 쓴다.

문제 3.3.4. 서수의 곱하기가 잘 정의되어 있음을 보여라. 서수의 더하기와 곱하기에 관하여 결합법칙이 성립함을 보여라.

서수의 연산에 관한 배분법칙도 조심해야 한다. 예를 들어서

$$(1+1)\omega = 2\omega \neq \omega 2 = \omega + \omega = 1\omega + 1\omega$$

이다. 그러나, 왼쪽 배분법칙

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \tag{15}$$

은 성립한다.

문제 3.3.5. 서수에 관한 등식 (15) 를 증명하여라.

이제, 서수들 사이에 순서를 정의하려 한다. 서수 α 와 β 에 대하여 $\operatorname{ord}(A) = \alpha$, $\operatorname{ord}(B) = \beta$ 인 정렬집합 A, B 를 잡자. 만일 A 가 B 의 절편과 순서동형이면 $\alpha < \beta$ 라 정의하고, $\alpha < \beta$ 이거나 $\alpha = \beta$ 인 경우 $\alpha \leq \beta$ 라 정의한다. 정리 3.3.1 은 임의의 서수 α, β 에 대하여

$$\alpha < \beta, \qquad \alpha = \beta, \qquad \alpha > \beta$$

중 하나가 반드시 성립함을 말해 준다. 물론, 정렬집합의 절편이 자기 자신과 순서동형일 수 없으므로 위 세 가지 중 두 가지가 동시에 성립

할 수는 없다. 여기에서 $\mathrm{ord}\,(A') = \alpha$, $\mathrm{ord}\,(B') = \beta$ 인 정렬집합을 잡아도 순서의 정의에는 변함이 없음을 쉽게 확인할 수 있다.

문제 3.3.6. 서수들 사이의 순서가 잘 정의되어 있음을 보여라.

다음 두 정리는 정렬집합 ω 에 관한 귀납법이 임의의 정렬집합에 대하여 어떻게 확장되는지 보여준다.

정리 3.3.2. 정렬집합 A 의 부분집합 B 가 다음 성질

$$x \in A,\ S_x \subset B \implies x \in B$$

을 만족하면 $B = A$ 이다.

증명: 만일 $A \setminus B$ 가 비어 있지 않으면 최소 원소 $a \in A \setminus B$ 를 가진다. 그러면 $S_a \subset B$ 이고 가정에 의하여 $a \in B$ 가 되어 모순이다. □

정리 3.3.3. 정렬집합에 관한 성질 P 가 주어져 있다. 만일 임의의 정렬집합 X 가 다음

만일 X 의 모든 절편이 P 를 만족하면 X 도 P 를 만족한다

을 만족하면, 임의의 정렬집합이 성질 P 를 만족한다.

증명: 어떤 정렬집합 X 가 성질 P 를 만족하지 않는다고 가정하자. 그러면

$$Y = \{x \in X : S_x \text{ 가 } P \text{ 를 만족하지 않는다}\}$$

는 비어 있지 않고, 따라서 최소 원소 $a \in X$ 를 가진다. 그러면 S_a 의 모든 절편은 성질 P 를 만족하는데, 가정에 의하여 S_a 도 성질 P 를 만족하게 되므로 모순이다. □

3.4. 무한집합과 선택공리

이제부터, 두 집합 X 와 Y 사이에 전단사함수가 존재하면 X 와 Y 가 **대등**하다고 말하고, $X \approx Y$ 라 쓴다. 앞에서 공부한 1.2 절의 보기 1 과 보기 2 는 자연수집합 $\mathbb{N}$, 정수집합 $\mathbb{Z}$, 유리수집합 $\mathbb{Q}$ 가 모두 대등함을 말한다. 또한, 같은 절의 보기 4 는 두 선분 위에 있는 점들의 집합은 선분의 길이에 관계없이 항상 대등함을 말한다. 반면, 1.2 절의 보기 6 은 자연수집합 $\mathbb{N}$ 과 실직선 위의 구간 $[0,1]$ 이 대등하지 않음을 말한다. 이상에서 살펴본 집합들은 모두 다음 성질

$$\text{자기자신과 대등한 진부분집합이 존재한다} \tag{16}$$

을 만족한다. 예를 들어 자연수집합 $\mathbb{N}$ 은 짝수 전체의 집합과 대등하며, 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 은 구간 $(0,1)$ 과 대등하다. 이 절의 목적은 이러한 성질이 '무한집합'의 특성임을 보이는 것이다.

도움정리 3.4.1. 집합 X 가 성질 (16) 을 만족하고 X 와 Y 가 대등하면, 집합 Y 도 성질 (16) 을 만족한다.

증명: 집합 X 의 진부분집합 A 및 두 전단사함수 $f : X \to A$ 와 $g : X \to Y$ 를 잡자. 그러면 $g|_A : A \to g(A)$ 도 전단사함수이고, 따라서 $(g|_A) \circ f \circ g^{-1} : Y \to g(A)$ 도 전단사함수이다. 만일 $x \in X \setminus A$ 이면 $g(x) \in Y \setminus g(A)$ 이므로 $g(A)$ 는 Y 의 진부분집합이다. 따라서, Y 의 진부분집합 $g(A)$ 는 Y 와 대등하다. □

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[r, hook] \arrow[d, "g|_A"] & X \arrow[d, "g"] \\
Y \arrow[r, "(g|_A) \circ f \circ g^{-1}"] & g(A) \arrow[r, hook] & Y
\end{tikzcd}$$

도움정리 3.4.2. 집합 X 가 성질 (16) 을 만족하고 $X \subset Y$ 이면, 집합 Y 도 성질 (16) 을 만족한다.

증명: 집합 X 의 진부분집합 A 와 전단사함수 $f : X \to A$ 를 잡고, 함수 $g : Y \to Y$ 를

$$g(y) = \begin{cases} y, & y \in Y \setminus X, \\ f(y), & y \in X \end{cases}$$

라 정의하자. 그러면 g 는 단사함수이고 그 상이 $A \sqcup (Y \setminus X)$ 이다. 그런데 A 가 X 의 진부분집합이므로 $A \sqcup (Y \setminus X)$ 는 $Y = X \sqcup (Y \setminus X)$ 의 진부분집합이다. 따라서, Y 는 진부분집합 $A \sqcup (Y \setminus X)$ 와 대등하다. □

정리 3.4.3. 자연수 $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ 의 부분집합 A 가 n 과 대등하면 $A = n$ 이다.

증명: 이를 증명하기 위하여 다음 명제[10]

임의의 단사함수 $f : n \to n$ 가 전사이다

를 보이면 된다. 먼저, $n = 0$ 이면 자명하다. 이제, 수학적 귀납법을 이용하기 위하여 위 명제가 자연수 n 에 대하여 성립한다고 가정하고, $f : n^+ \to n^+$ 가 단사함수라 하자. 먼저 함수 f 를 $n^+ = n \sqcup \{n\}$ 의 부분집합 n 에 제한하면 단사함수 $f|_n : n \to n^+$ 를 얻는다. 우선 $f(n) \subset n$ 인 경우를 생각하자. 그러면 귀납법 가정에 의하여 $f(n) = n$ 이다. 따라서, $f(\{n\}) = \{n\}$ 이고 f 는 전사함수이다.

이제 $f(n) \not\subseteq n$ 인 경우를 생각하자. 그러면 $f(k) \notin n$ 인 $k \in n$ 이 존재한다. 그러면 $f(k) \in n^+ \setminus n$ 이므로 $f(k) = \{n\}$ 이다. 이제 새로운 함수 $g : n^+ \to n^+$ 를 다음

$$g(k) = \{n\}, \qquad g(\{n\}) = k, \qquad g(x) = x, \quad x \in n \setminus \{k\}$$

(10) 이를 보통 비둘기 집 원리라 하는데, 수학의 여러 분야에서 널리 쓰인다.

과 같이 정의하자. 그러면 g 는 $n^+ = \{\{n\}\} \sqcup \{k\} \sqcup (n \setminus \{k\})$ 에서 $\{n\}$ 과 k 를 바꾸는 함수이므로 전단사함수이다. 이제 합성함수 $f \circ g : n^+ \to n^+$ 를 생각하면 $(f \circ g)(n) \subset n$ 이고 $(f \circ g)(\{n\}) = \{n\}$ 이다. 따라서, $(f \circ g)|_n : n \to n$ 에 귀납법 가정을 적용하면 $(f \circ g)|n$ 이 전단사함수임을 알 수 있다. 따라서, $f \circ g$ 는 전단사함수이고, $f = (f \circ g) \circ g^{-1}$ 도 전단사함수이다. □

위 증명에 나오는 함수 $f \circ g : n^+ \to n^+$ 의 개념을 그림으로 그려 보면 다음

$$\begin{array}{ccccc} k & \mapsto & \{n\} & \mapsto & f(\{n\}) \in n \subset n^+ \\ n \setminus \{k\} & \hookrightarrow & n \setminus \{k\} & \to & n \setminus f(\{n\}) \subset n \subset n^+ \\ \{n\} & \mapsto & k & \mapsto & \{n\} \in n^+ \end{array}$$

과 같다.

집합 X 와 대등한 자연수 n 이 존재하면 X 를 **유한집합**이라 한다. 정리 3.4.3 은 어떤 자연수 n 도 성질 (16) 을 만족하지 않음을 말한다. 따라서 도움정리 3.4.1 을 적용하면 임의의 유한집합은 성질 (16) 을 만족하지 않는다. 이제 그 역을 증명하려 한다. 즉, 유한집합이 아니면 성질 (16) 이 만족됨을 보이려 한다. 도움정리 3.4.2 를 염두에 두면, 이미 자연수집합 $\mathbb{N}$ 이 성질 (16) 을 만족한다는 것을 알고 있으므로, 다음을 증명하면 된다.

도움정리 3.4.4. 집합 X 가 유한집합이 아니면, 자연수집합 $\mathbb{N}$ 과 대등한 X 의 부분집합이 존재한다.

도움정리 3.4.4 의 증명은 선택공리를 사용하여 증명하는데 잠시 뒤로 미루고, 이 절의 결론을 적어 보자. 다음 정리의 동치조건을 만족하는 집합을 **무한집합**이라 한다.

정리 3.4.5. 집합 X 에 대하여 다음은 동치이다.

(무1) 집합 X 가 유한집합이 아니다. 즉, 임의의 자연수 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 X 는 n 과 대등하지 않다.

(무2) 집합 X 와 대등한 X 의 진부분집합 A 가 존재한다.

이제 도움정리 3.4.4 를 증명하는데, 선택공리를 사용하기 위하여 집합 X 의 선택함수 $h : 2^X \setminus \{\emptyset\} \to X$ 를 택하고, X 의 모든 유한 부분집합들의 모임 $\mathcal{F}(X)$ 에 대하여 정리 2.1.2 를 적용한다. 이제 X 는 유한집합이 아니므로 임의의 $A \in \mathcal{F}(X)$ 에 대하여 $X \setminus A \neq \emptyset$ 이고, 따라서 $h(X \setminus A) \in X$ 이다. 이제, 함수 $F : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$ 를 다음

$$F(A) = A \sqcup \{h(X \setminus A)\}, \qquad A \in \mathcal{F}(X)$$

과 같이 정의한다. 그러면 정리 2.1.2 에 의하여 다음

$$\gamma(0) = \emptyset, \qquad \gamma(n^+) = F(\gamma(n)), \quad n \in \mathbb{N}$$

을 만족하는 함수 $\gamma : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(X)$ 가 존재한다. 이제, 임의의 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $\gamma(n)$ 은 X 의 유한부분집합이므로 $X \setminus \gamma(n) \neq \emptyset$ 이고, 따라서 함수 $\delta : \mathbb{N} \to X$ 를 다음

$$\delta(n) = h(X \setminus \gamma(n)), \qquad n \in \mathbb{N}$$

과 같이 정의할 수 있다. 이제, 각 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$\gamma(n^+) = F(\gamma(n)) = \gamma(n) \sqcup \{h(X \setminus \gamma(n))\} = \gamma(n) \sqcup \{\delta(n)\}$$

이므로, $\gamma(n^+)$ 는 $\gamma(n) \subset X$ 에 $\delta(n)$ 이라는 X 의 원소를 하나 더 첨가한 것이다. 이제 $\delta : \mathbb{N} \to X$ 가 단사함수임을 보이기 위하여 $n < m$ 이라 두자. 그러면 $n^+ \leq m$ 이므로 $\delta(n) \in \gamma(n^+) \subset \gamma(m)$ 인데

$$\delta(m) = h(X \setminus \gamma(m)) \in X \setminus \gamma(m)$$

이 되어 $\delta(n) \neq \delta(m)$ 임을 알 수 있다. 따라서, 함수 $\delta : \mathbb{N} \to X$ 의 상 $\delta(\mathbb{N})$ 은 X 의 부분집합이고 $\mathbb{N}$ 과 대등하다.

지금까지의 논증은 다음과 같이 말로 쉽게 풀어서 쓸 수 있다. 먼저, 임의의 원소 $x_1 \in X$ 를 잡는다. 그러면 X 의 원소가 한 개보다는 많으므로 $X \setminus \{x_1\} \neq \emptyset$ 이고, 따라서 $x_2 \in X \setminus \{x_1\}$ 를 택할 수 있다. 다시 $X = \{x_1, x_2\}$ 이면 X 가 유한집합이 아니므로 $X \setminus \{x_1, x_2\} \neq \emptyset$ 이고 $x_3 \in X \setminus \{x_1, x_2\}$ 를 택할 수 있다. 이제, 귀납적으로 $x_1, x_2, \dots$ 를 택하여 보자. 만일 $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ 를 택했다면

$$X \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \neq \emptyset$$

이다. 왜냐 하면, 만일 $X \setminus \{x_1, \dots, x_n\} = \emptyset$ 이면 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 은 유한집합이 되기 때문이다. 따라서,

$$x_{n+1} \in X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$$

을 택할 수 있다. 이와 같은 방법으로 계속하여 $x_1, x_2, \dots$ 를 택하면

$$A = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}$$

는 X 의 부분집합이고 $\mathbb{N}$ 과 대등하다. 실제로, 원래 증명에서 $\delta(n)$ 은 $X \setminus \gamma(n)$ 에서 하나를 선택한 것인데, 이렇게 계속되는 선택이 존재한다는 것이 바로 선택공리가 주장하는 것이다.

무한집합에서는 유한집합과 다른 현상이 많이 나타나는데, 그 대표적인 예가

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N} \tag{17}$$

이다. 먼저 자연수들을 다음

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 2 & 5 & 9 & 14 & \cdots & \rightarrow & m \\
1 & 4 & 8 & 13 & & & & \\
3 & 7 & 12 & & & & & \\
6 & 11 & & & & & & \\
10 & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & \\
n & & & & & & &
\end{array}$$

과 같이 늘어 놓으면 (17) 임이 자명하다. 보다 구체적으로 쓰자면, 함수 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 을 다음

$$\begin{aligned} f(m,n) &= [1+2+\cdots+n] + [(n+2)+(n+3)+\cdots+(n+m+1)] \\ &= [1+2+3+\cdots+(m+n)] + m \\ &= \frac{1}{2}[(m+n)^2 + 3m + n] \end{aligned}$$

과 같이 정의하면 이는 전단사 함수가 된다. 역함수를 정의하기 위하여 각 $k \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$\frac{1}{2}\ell(\ell+1) \le k < \frac{1}{2}(\ell+1)(\ell+2)$$

인 유일한 자연수 $\ell \in \mathbb{N}$ 을 잡고

$$g(k) = \left(k - \frac{1}{2}\ell(\ell+1), \ell - \left[k - \frac{1}{2}\ell(\ell+1)\right]\right)$$

라 정의한다.

문제 3.4.1. 위에서 정의한 함수 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 와 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 이 서로 역함수관계임을 보여라.

3.5. 기수의 연산과 순서

지난 3.4 절에서 임의의 유한집합 X 는 딱 하나의 자연수 n 과 대등함을 알았다. 이 때, $\mathrm{card}\,(X) = n$ 이라 쓴다. 임의의 집합 A 에 다음 성질

$$A_1 \approx A_2 \iff \mathrm{card}\,(A_1) = \mathrm{card}\,(A_2) \tag{18}$$

이 성립하도록 $\mathrm{card}\,(A)$ 를 대응시킬 때 $\mathrm{card}\,(X)$ 를 X 의 **기수**라 부른다.(11)

(11) 기수가 '무엇'인가 하는 정의는 3.6 절에서 한다.

먼저 기수들 사이의 연산을 정의하자. 먼저, 기수 a, b 에 대하여 $\mathrm{card}\,(A) = a$, $\mathrm{card}\,(B) = b$ 이고 서로소인 집합 A, B 를 잡고

$$a + b = \mathrm{card}\,(A \sqcup B)$$

라 정의한다. 우선 이 연산이 잘 정의되어 있음을 보이자. 이를 보이기 위하여

$$A \approx C,\ B \approx D \implies A \sqcup B \approx C \sqcup D$$

를 보여야 한다. 만일 $g : A \to C$, $h : B \to D$ 가 전단사함수라면 (14) 에 의하여 정의된 $g \sqcup h : A \sqcup B \to C \sqcup D$ 도 전단사함수이므로, $a+b$ 가 잘 정의되어 있음을 알 수 있다. 그러면 $A \sqcup B = B \sqcup A$ 이므로 $a+b = b+a$ 이다. 또한 합집합의 결합법칙으로부터 $(a+b)+c = a+(b+c)$ 가 성립한다. 두 기수 a, b 의 곱하기 ab 도 $\mathrm{card}\,(A) = a$, $\mathrm{card}\,(B) = b$ 인 집합 A, B 를 잡은 후,

$$ab = \mathrm{card}\,(A \times B)$$

라 정의한다.

문제 3.5.1. 기수의 곱하기가 잘 정의되어 있음을 보여라. 또한, 곱하기에 관한 교환법칙, 결합법칙 및 배분법칙이 성립함을 보여라.

끝으로 두 기수 a, b 에 대하여 a^b 를 정의하자. 위와 마찬가지로 $\mathrm{card}\,(A) = a$, $\mathrm{card}\,(B) = b$ 인 집합 A, B 를 잡은 후,

$$a^b = \mathrm{card}\,(A^B)$$

로 정의한다. 잘 정의되어 있음을 보이기 위하여 $g : A \to C$, $h : B \to D$ 가 전단사함수라 하자. 이제, 함수 $f_1 : A^B \to C^D$ 및 $f_2 : C^D \to A^B$ 를 다음

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= g \circ \alpha \circ h^{-1}, \qquad \alpha \in A^B, \\ f_2(\beta) &= g^{-1} \circ \beta \circ h, \qquad \beta \in C^D \end{aligned}$$

과 같이 정의한다. 그러면 $f_1(f_2(\beta)) = g \circ (g^{-1} \circ \beta \circ h) \circ h^{-1} = \beta$ 이다. 마찬가지로 $f_2(f_1(\alpha)) = \alpha$ 이므로 f_1 과 f_2 는 서로 역함수관계가 되어 $A^B \approx C^D$ 임을 알 수 있다.

이제 다음에 열거하는 공식

$$a^{b+c} = a^b a^c, \qquad (ab)^c = a^c b^c, \qquad (a^b)^c = a^{bc}$$

들을 증명하여 보자. 이를 위하여 $a = \mathrm{card}\,(A)$, $b = \mathrm{card}\,(B)$, $c = \mathrm{card}\,(C)$ 인 집합 A, B, C (단, $B \cap C = \emptyset$) 를 잡고

$$A^{B \sqcup C} \approx A^B \times A^C, \qquad (A \times B)^C \approx A^C \times B^C, \qquad (A^B)^C \approx A^{B \times C}$$

를 보이자. 먼저, 첫째 식은 $f \mapsto (f|_B, f|_C)$ 및 $(g, h) \mapsto g \sqcup h$ 가 서로 역함수관계이므로 증명된다. 두번째 식을 보이기 위하여 $\pi_A : A \times B \to A$ 와 $\pi_B : A \times B \to B$ 를 각각 사영이라 하면

$$f \mapsto (\pi_A \circ f,\ \pi_B \circ f) : (A \times B)^C \to A^C \times B^C \tag{19}$$

는 전단사함수가 된다. 마지막으로, 두 함수 $\Phi : (A^B)^C \to A^{B \times C}$ 와 $\Psi : A^{B \times C} \to (A^B)^C$ 를 다음

$$\Phi(f)(b, c) = (f(c))(b), \quad [\Psi(g)(c)](b) = g(b, c), \qquad b \in B,\ c \in C$$

과 같이 정의하면 서로 역함수관계가 된다.

문제 3.5.2. (19) 에서 정의된 함수의 역함수를 찾아라. 또한, Φ 과 Ψ 가 서로 역함수관계임을 보여라.

이제, 기수들 사이에 순서를 정의할 차례이다. 집합 A 와 B 사이에 단사함수 $f : A \to B$ 가 존재하면 $A \preccurlyeq B$ 라 정의하자. 따름정리 1.2.5 에 의하면, 이는 전사함수 $g : B \to A$ 가 존재한다는 것과 마찬가지이다. 먼저 임의의 집합 A 에 대하여 $A \preccurlyeq A$ 임은 당연하다. 그리고, 단사함수의 합성이 단사함수이므로 $A \preccurlyeq B$, $B \preccurlyeq C$ 이면 $A \preccurlyeq C$ 임도 자명하다. 임의의 집합 A, B 가 주어졌을 때, 이 두 집합에 정리 3.1.4 를

적용하여 정렬순서를 부여하자. 그러면 정리 3.3.1 에 의하여 $A \approx B$ 이거나, 아니면 적절한 $a \in A$, $b \in B$ 에 대하여 $A \approx S_b \subset B$ 혹은 $B \approx S_a \subset A$ 가 성립함을 알 수 있다.

정리 3.5.1. 임의의 집합 A, B 에 대하여 $A \preccurlyeq B$ 혹은 $B \preccurlyeq A$ 가 성립한다.

다음 정리는 기수의 연산에서 핵심적인 역할을 한다.

정리 3.5.2. (베른쉬타인[12]) 만일 $A \preccurlyeq B$ 이고 $B \preccurlyeq A$ 이면 $A \approx B$ 이다.

증명: 먼저 $f : A \to B$ 와 $g : B \to A$ 가 단사함수라 하고, 각 $C \in 2^A$ 에 대하여

$$\Gamma(C) = A \setminus g(B \setminus f(C)) \in 2^A, \qquad C \in 2^A$$

라 정의하자. 만일 $C \subset D$ 이면 $f(C) \subset f(D)$ 이므로

$$C \subset D \implies \Gamma(C) \subset \Gamma(D) \tag{20}$$

임은 바로 확인된다. 이제,

$$E = \bigcup \{C \in 2^A : C \subset \Gamma(C)\} \in 2^A$$

라 두자. 그러면 $E = \Gamma(E)$ 가 성립한다. 실제로, $a \in E$ 이면 $a \in C \subset \Gamma(C)$ 인데 (20) 에 의하여 $\Gamma(C) \subset \Gamma(E)$ 이므로 $a \in \Gamma(E)$ 이다. 따라서, $E \subset \Gamma(E)$ 가 성립하고 다시 (20) 에 의하여 $\Gamma(E) \subset \Gamma(\Gamma(E))$ 인데, 집합 E 의 정의에 의하면 $\Gamma(E) \subset E$ 를 얻는다. 따라서, $E = \Gamma(E)$ 인데,

(12) Felix Bernstein (1878∼1956), 독일 수학자. Göttingen 에서 공부하고 활동하였는데, 이차대전 중에는 미국에서 활동하였다.

이를 다시 쓰면 $A \setminus E = g(B \setminus f(E))$ 이다. 그런데 f, g 가 모두 단사함수이므로

$$A = E \sqcup (A \setminus E) \ \approx \ f(E) \sqcup (B \setminus f(E)) = B$$

를 얻는다. □

정리 3.5.2 는 다른 방법으로 증명할 수도 있는데, 이를 위하여 다음

$$A_1 \subset B \subset A, \ \mathrm{card}\,(A_1) = \mathrm{card}\,(A) \implies \mathrm{card}\,(B) = \mathrm{card}\,(A) \qquad (21)$$

을 먼저 보이자. 전단사함수 $f : A \to A_1$ 이 주어지면 정리 2.1.2 를 이용하여

$$A_0 = A, \ A_{n+1} = f(A_n), \ B_0 = B, \ B_{n+1} = f(B_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

가 성립하도록 집합열 $\langle A_n \rangle$ 과 $\langle B_n \rangle$ 를 잡을 수 있다. 이 때, 각 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $C_n = A_n \setminus B_n$ 라 정의하고, $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$ 이라 정의한다. 이제,

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in C, \\ x, & x \in A \setminus C \end{cases}$$

라 정의하면 $g : A \to B$ 가 전단사함수임을 쉽게 알 수 있다.

문제 3.5.3. 명제 (21) 의 증명을 마무리하여라. 또한, (21) 을 이용하여 정리 3.5.2 를 증명하여라.

이제 두 기수 a, b 에 대하여 $a = \mathrm{card}\,(A)$ 와 $b = \mathrm{card}\,(B)$ 인 집합 A, B 를 잡고 $A \preccurlyeq B$ 이면 $a \le b$ 라 정의하자. 이제, 이 정의가 잘 정의되어 있고, 순서관계가 됨은 분명하다. 기수들의 순서관계는 자연수의 순서관계와 유사한 성질을 가진다. 예를 들어,

$$a \le b \iff b = a + c \text{ 인 기수 } c \text{ 가 존재한다}$$

등이 성립한다. 먼저 $a = \mathrm{card}\,(A)$, $b = \mathrm{card}\,(B)$ 인 집합 A, B 를 잡자. 만일 $a \le b$ 이면 단사함수 $f : A \to B$ 가 존재한다. 이 때 $c =$

$\mathrm{card}\,[B \setminus f(A)]$ 라 두면 $b = a + c$ 가 성립한다. 역으로 $c = \mathrm{card}\,(C)$ 인 집합 C 가 존재하고 $f : A \sqcup C \to B$ 가 전단사함수이면 $f|_A : A \to B$ 는 단사함수이고, 따라서 $a \le b$ 이다.

문제 3.5.4. 기수 a, b, c, d 에 대하여 $a \le c$ 이고 $b \le d$ 이면 다음

$$a + b \le c + d, \qquad ab \le cd, \qquad a^b \le c^d$$

이 성립함을 보여라.

이제 무한집합들의 기수에 대하여 알아보자. 만일 X 가 무한집합이면, 도움정리 3.4.4 에 의하여 단사함수 $f : \mathbb{N} \to X$ 가 존재한다. 따라서 임의의 무한집합 X 에 대하여 $\mathrm{card}\,(\mathbb{N}) \le \mathrm{card}\,(X)$ 이다. 앞으로 $\mathrm{card}\,(\mathbb{N})$ 을 $\aleph_0$ 라 쓴다. 이미 $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$ 임을 알고 있으므로

$$\mathrm{card}\,(\mathbb{N}) = \mathrm{card}\,(\mathbb{Z}) = \mathrm{card}\,(\mathbb{Q}) = \aleph_0$$

이다. 그러나, 1.2 절의 보기 6 에서 보듯이 단사함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 은 존재하지만 $\mathbb{R}$ 에서 $\mathbb{N}$ 으로 가는 단사함수는 존재하지 않으므로

$$\mathrm{card}\,(\mathbb{R}) \gneqq \aleph_0$$

이다. 새로운 무한기수 $\mathrm{card}\,(\mathbb{R})$ 은 $\mathfrak{c}$ 로 표기한다. 집합 X 의 기수가 $\aleph_0$ 보다 작거나 같을 때, 즉 $\mathrm{card}\,(X) \le \aleph_0$ 일 때 X 를 **셀수있는** 집합이라 부르고, 그렇지 않으면 **셀수없는** 집합이라 부른다.

또 다른 무한 기수의 예를 들기 앞서, 무한 기수의 독특한 연산법칙을 알아 보자. 우선 (17) 에 의하여

$$\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$$

인데, 이는 무한 기수의 특성이다.

정리 3.5.3. 임의의 무한 기수 a 에 대하여 $aa = a$ 이다.

증명: 먼저 $\mathrm{card}\,(A) = a$ 인 무한집합 A 를 잡으면, 도움정리 3.4.4 에 의하여 $D \approx \mathbb{N}$ 인 부분집합 $D \subset A$ 가 존재한다. 그런데 (17) 에 의하여 $D \approx D \times D$ 가 되어 전단사함수 $f : D \to D \times D$ 가 존재한다. 이제, 다음 조건

$$D \subset B \subset A, \qquad g|_D = f, \qquad g : B \to B \times B \text{ 는 전단사함수}$$

을 만족하는 순서쌍 (B, g) 들 전체의 모임 $\mathcal{B}$ 를 생각하자. 이제,

$$(B_1, g_1) \le (B_2, g_2) \iff B_1 \subset B_2,\ g_2|_{B_1} = g_1$$

와 같이 정의하면, $\mathcal{B}$ 는 이에 의하여 순서집합이 되고, 정리 3.1.1 의 전제 조건이 성립함을 바로 확인할 수 있다. 따라서, 극대 원소 (C, h) 가 존재한다. 이제 $\mathrm{card}\,(C) = c$ 라 두고 $c = a$ 임을 보이면 증명이 끝난다.

이를 위하여, $c < a$ 라 가정하고, $b = \mathrm{card}\,(A \setminus C)$ 라 하자. 그러면,

$$c = 0 + c \le c + c = 1c + 1c = 2c \le cc = c$$

이므로 $c + c = c$ 이다. 만일 $b \le c$ 이면 $a = b + c \le c + c = c$ 가 가정에 어긋나므로, 정리 3.5.1 에 의하여 $c < b$ 가 성립해야 한다. 따라서, $C \approx E$ 인 $E \subset A \setminus C$ 가 존재한다. 이제

$$(C \sqcup E) \times (C \sqcup E) = (C \times C) \sqcup (C \times E) \sqcup (E \times C) \sqcup (E \times E)$$

인데, 오른쪽에 나오는 집합의 기수는 모두 c 이므로,

$$\mathrm{card}\,[(C \times E) \sqcup (E \times C) \sqcup (E \times E)] = (c + c) + c = c + c = c$$

이다. 따라서, 전단사함수

$$k : E \to (C \times E) \sqcup (E \times C) \sqcup (E \times E)$$

를 잡을 수 있다. 한편 전단사함수 $h : C \to C \times C$ 와 같이 생각하면

$$h \sqcup k : C \sqcup E \to (C \sqcup E) \times (C \sqcup E)$$

가 전단사함수임을 알 수 있다. 그러면 $(C \sqcup E, h \sqcup k) > (C, h)$ 인데, 이는 (C, h) 가 극대 원소라는 데에 모순이다. □

문제 3.5.5. 정리 3.5.3 의 증명과정에 나오는 순서집합 $\mathcal{B}$ 가 정리 3.1.1 의 전제 조건을 만족함을 보여라.

이 정리를 이용하여 여러 가지 공식을 얻을 수 있다. 예들 들면 무한 기수 a, b 에 대하여

$$a \leq b \implies a + b = ab = b,\ a^b = 2^b$$

등이 성립한다. 먼저, $1 \leq a$ 에서 $b = 1b \leq ab \leq bb = b$ 이므로 $ab = b$ 가 성립하는데, $a \geq 1$ 이기만 하면 마찬가지이다. 또한,

$$b = 0 + b \leq a + b \leq b + b = 2b \leq bb = b$$

이므로 $a + b = b$ 인데 a 는 어떤 기수라도 상관없다. 끝으로, $a \leq 2^a$ 이므로 $a^b \leq (2^a)^b = 2^{ab} = 2^b$ 이고, $2 \leq a$ 이므로 $2^b \leq a^b$ 이다. 이 논증 과정에서 $a \leq 2^a$ 를 사용하였는데, 이는 1.2 절의 보기 5 를 적용하면 $x \mapsto \{x\} : X \mapsto 2^X$ 를 사용하면 된다.

이제 임의의 기수 a 에 대하여

$$a \lneqq 2^a \tag{22}$$

임을 보이자. 이는 임의의 집합 X 에 대하여 임의의 함수 $f : X \to 2^X$ 는 전사함수가 될 수 없다는 것인데, 그 증명은 1.2 절의 보기 6 과 그 증명이 비슷하다. 함수 $f : X \to 2^X$ 에 대하여

$$A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$$

라 두자. 만일 함수 $f : X \to 2^X$ 가 전사라면 $f(x_0) = A$ 인 $x_0 \in X$ 가 존재한다. 이제, $x_0 \in A$ 인가 아닌가 살펴보자. 만일 $x_0 \in A$ 이면 A 의 정의에 의하여 $x_0 \notin f(x_0)$ 인데, $f(x_0) = A$ 이므로 $x_0 \notin A$ 이다. 또한,

만일 $x_0 \notin A$ 이면 마찬가지로 $x_0 \in f(x_0) = A$ 이다. 어느 경우나 모순이므로 $f(x_0) = A$ 를 만족하는 $x_0 \in X$ 는 존재하지 않음을 알 수 있고, 따라서 어떤 함수 $f : X \to 2^X$ 도 전사함수가 될 수 없다. 부등식 (22) 는 계속 더 큰 기수를 찾아 나갈 수 있는 근거가 된다.

문제 3.5.6. $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ 임을 보여라.

문제 3.5.7. 다음 집합들의 기수를 구하여라.
(가) 집합 $\mathbb{N}$ 의 유한부분집합 전체의 집합
(나) 집합 $\mathbb{N}$ 의 무한부분집합 전체의 집합
(다) 집합 $\mathbb{N}$ 사이에 정의된 순증가함수 전제의 집합
(라) 집합 $\mathbb{N}$ 사이에 정의된 전단사함수 전제의 집합
(마) 집합 $\mathbb{N}$ 사이에 정의된 함수 전제의 집합

문제 3.5.8. 다음 집합들의 기수를 구하여라.
(가) 집합 $\mathbb{R}$ 사이에 정의된 일차함수 전제의 집합
(나) 집합 $\mathbb{R}$ 사이에 정의된 다항식함수 전제의 집합
(다) 집합 $\mathbb{R}$ 사이에 정의된 해석함수 전제의 집합
(라) 집합 $\mathbb{R}$ 사이에 정의된 연속함수 전제의 집합
(마) 집합 $\mathbb{R}$ 사이에 정의된 함수 전제의 집합

3.6. 서수와 기수의 정의

절편 S_x 의 정의 (6) 을 기억하자. 지난 3.3 절의 보기 1 에서 살펴본 바와 같이, 각 자연수 $m \in \omega$ 에 대하여

$$S_m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\} = m$$

이 성립한다. 이와 같이 정렬집합 α 가 다음 성질

$$\xi \in \alpha \implies S_\xi = \xi \tag{23}$$

을 만족할 때, 이를 **서수**라 부른다. 예를 들어, 자연수 전체의 정렬집합 ω 는 서수이다. 물론 각 자연수 $n \in \omega$ 역시 서수이다. 먼저, 서수 α 의

원소는 α 의 부분집합이다. 실제로, $\beta \in \alpha$ 이면 $\beta = S_\beta \subset \alpha$ 이다. 정렬집합 A 에 대하여

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

에 자연스레 순서가 정의된다. 즉 임의의 $a \in A$ 에 대하여 $a \leq A$ 로 정의한다.

문제 3.6.1. 서수 α 에 대하여 다음을 증명하여라.
(가) α^+ 도 서수이고, $\alpha^+ = \alpha + 1$ 이다.
(나) 만일 $\beta \in \alpha$ 이면 β 와 S_β 도 서수이다.

도움정리 3.6.1. 서수 α, β 가 $\alpha \approx \beta$ 를 만족하면 $\alpha = \beta$ 이다.

증명: 함수 $f : \alpha \to \beta$ 가 순서동형을 정의한다 하고, 임의의 $\xi \in \alpha$ 에 대하여 $f(\xi) = \xi$ 임을 보이면 된다. 이를 위하여

$$X = \{\xi \in \alpha : f(\xi) = \xi\}$$

라 두고, $S_\xi \subset X$ 를 가정하자. 즉,

$$\eta < \xi \implies f(\eta) = \eta$$

임을 가정하자. 만일 $\eta \in \xi = S_\xi$ 이면 $\eta < \xi$ 이고 $f(\eta) < f(\xi)$ 인데, 가정에 의하여 $\eta = f(\eta) < f(\xi)$, 즉 $\eta \in S_{f(\xi)} = f(\xi)$ 이다. 역으로, $f(\eta) \in f(\xi)$ 이면 $f(\eta) \in \xi$ 역시 마찬가지로 증명되므로 $\xi = f(\xi)$, 즉 $\xi \in X$ 이다. 따라서, 정리 3.3.2 에 의하여 $X = \alpha$ 임을 알 수 있다. □

지난 3.3 절에서, 서수 α 가 서수 β 의 절편과 순서동형이면 $\alpha < \beta$ 라 정의하고, $\alpha < \beta$ 이거나 $\alpha = \beta$ 인 경우 $\alpha \leq \beta$ 라 정의하였음을 기억하자.

도움정리 3.6.2. 서수 α, β 에 대하여 다음

$$\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta \iff \alpha \subsetneq \beta$$

이 성립한다.

증명: 만일 $\alpha < \beta$ 이면 적절한 $\gamma \in \beta$ 에 대하여 $\alpha \approx S_\gamma$ 이다. 그런데, α 와 S_γ 가 서수이므로 도움정리 3.6.1 에 의하여 $\alpha = S_\gamma = \gamma \in \beta$ 이다. 만일 $\alpha \in \beta$ 이면, 이미 살펴본 바와 같이 $\alpha = S_\alpha \subsetneq \beta$ 이다. 이제, $\alpha \subsetneq \beta$ 라 가정하자. 만일 적절한 $\gamma \in \alpha$ 에 대하여 $\beta \approx S_\gamma$ 이면 방금 논증한 바와 같이 $\beta = S_\gamma = \gamma \subset \alpha$ 가 되므로 모순이다. 따라서, 정리 3.3.1 에 의하여 α 는 β 의 절편과 순서 동형이고, 따라서 $\alpha < \beta$ 이다. □

이 절의 첫째 목표는 임의의 정렬집합 A 에 대하여 $A \approx \alpha$ 인 서수 α 가 유일하게 존재함을 보이는 것이다.

정리 3.6.3. 임의의 정렬집합 A 에 대하여 $A \approx \alpha$ 인 서수 α 가 유일하게 존재한다.

증명: 유일성은 도움정리 3.6.1 에서 나온다. 먼저 임의의 $a \in A$ 에 대하여 S_a 는 어떤 서수와 순서동형이라 가정하자. 이 서수를 $\alpha(a)$ 라 쓰고

$$S = \{\alpha(a) : a \in A\}$$

라 두자. 만일 S 가 서수이고 $S \approx A$ 임을 보이면 정리 3.3.3 에 의하여 증명이 끝난다. 먼저, $\alpha(a) \leq \alpha(b) \iff a \leq b$ 라 정의하면 S 가 정렬집합임은 당연하다. 다음으로, 임의의 $b \in A$ 에 대하여

$$\alpha(b) \in \alpha(a) \iff \alpha(b) < \alpha(a) \iff \alpha(b) \in S_{\alpha(a)}$$

이므로 $\alpha(a) = S_{\alpha(a)}$ 이고, S 는 서수임을 알 수 있다. 끝으로, $a \mapsto \alpha(a)$ 가 A 에서 S 로 가는 순서동형임은 자명하다. □

문제 3.6.2. 성질 (13) 을 증명하여라.

이제, 기수를 정의하려 하는데, 임의의 집합을 정렬집합으로 간주할 수 있으므로 서로 대등한 서수들 중에서 어느 하나를 기수라 정하면 조건 (18) 을 만족하게 될 것이다. 이를 위하여 다음을 먼저 보이자.

정리 3.6.4. 비어 있지 않은 임의의 서수들의 집합 E 는 최소원소를 가진다.

증명: 집합 E 의 원소 α 를 잡자. 만일 임의의 $\beta \in E$ 에 대하여 $\alpha \leq \beta$ 이면 더 이상 증명할 것이 없다. 만일 그렇지 않다면, $\beta < \alpha$ 인 $\beta \in E$ 를 잡을 수 있다. 그러면 $\beta \in \alpha$ 이므로 $\alpha \cap E \neq \emptyset$ 이고, 이는 정렬집합 α 의 부분집합이므로 최소 원소 γ 를 가진다. 이제 $\delta \in E$ 라 하자. 만일 $\alpha \leq \delta$ 이면 $\gamma < \alpha \leq \delta$ 이고, 만일 $\alpha > \delta$ 이면 $\delta \in \alpha \cap E$ 이므로 $\gamma \leq \delta$ 이다. 어느 경우라도 $\gamma \leq \delta$ 가 성립하고, 따라서 γ 가 E 의 최소 원소이다. □

이제, 임의의 집합 X 가 주어지면 X 와 동등한 서수 전체의 집합

$$\{\xi : \xi \approx X,\ \xi \preccurlyeq 2^X\}$$

을 생각하고, 이 집합의 최소 원소를 $\mathrm{card}\,(X)$, 즉 X 의 **기수**라 정의한다. 따라서, 서수 α 가 적절한 집합 X 에 대하여 $\alpha = \mathrm{card}\,(X)$ 이면 다음

$$\beta \leq \alpha,\ \beta \approx \alpha \implies \beta = \alpha \tag{24}$$

이 성립한다. 즉, 기수 α 는 다음 성질

α 보다 작은 서수는 α 와 동등하지 않다

을 만족하는데, 이러한 서수를 **시작기수**라 부른다. 즉, 임의의 기수는 시작서수이다. 역으로, α 가 시작서수이면 $\alpha = \mathrm{card}\,(\alpha)$ 가 되므로, 임의의 시작서수는 기수이다.

문제 3.6.3. 성질 (18) 이 성립함을 보여라.

문제 3.6.4. 임의의 서수 α, β 에 대하여 다음

$$\mathrm{card}\,(\alpha + \beta) = \mathrm{card}\,\alpha + \mathrm{card}\,\beta, \qquad \mathrm{card}\,(\alpha\beta) = (\mathrm{card}\,\alpha)(\mathrm{card}\,\beta)$$

이 성립함을 보여라. 물론, 좌변의 연산은 서수 연산이고, 우변의 연산은 기수의 연산이다.

문제 3.6.5. 만일 $\mathrm{card}\,(\alpha) < \mathrm{card}\,(\beta)$ 이면, 즉 $\alpha \preccurlyeq \beta$ 이면 $\alpha < \beta$ 임을 보여라.

이제, 서수들을 나열하여 보자. 이를 위하여 다음을 먼저 보인다.

정리 3.6.5. 임의의 서수들의 집합 C 는 최소상계 $\sup C$ 를 가진다.

증명: 먼저 정리 3.6.4 에 의하여 집합

$$\alpha = \bigcup\{\xi : \xi \in C\}$$

는 정렬집합이다. 또한 $\xi \in \alpha$ 의 절편을 α 안에서 취하나 ξ 자신 안에서 취하나 마찬가지이므로 α 는 서수이다. 이제 $\alpha = \sup C$ 임을 보이자. 우선, 임의의 $\xi \in C$ 에 대하여 $\xi \in \alpha$ 이므로 $\xi \leq \alpha$ 이다. 만일 β 가 또다른 C 의 상계이면 임의의 $\xi \in C$ 에 대하여 $\xi \subset \beta$ 이고, 따라서 $\alpha \subset \beta$, 즉 $\alpha \leq \beta$ 이다. □

먼저, 자연수

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

는 서수이다. 이들을 **유한 서수**라 부르고, 그렇지 않은 서수들을 **초유한 서수**라 부른다. 초유한 서수 중 최소의 서수는 ω 이다. 특히, ω 는 $\omega = \alpha^+$ 인 서수 α 를 가지지 않는데, 이러한 서수를 **극한 서수**라 부른다. 임의의 서수 α, β 에 대하여 α^β 를 정의하는데, β 가 극한서수이면

$$\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma : \gamma < \beta\}$$

라 정의한다. 만일 $\beta = \gamma + 1$ 이면 물론 $\alpha^\beta = \alpha^\gamma \alpha$ 로 정의한다. 초유한 서수들은 다음과 같이 열거할 수 있다;

$$\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega 2, \omega 2+1, \omega 2+2, \ldots, \omega 3, \omega 3+1, \ldots$$

이와 같은 방법으로

$$\omega, \omega 2, \omega 3, \omega 4, \ldots, \omega^2$$

를 얻는다. 이를 계속하면

$$\omega^2+1, \omega^2+2, \ldots, \omega^2+\omega, \omega^2+\omega+1, \omega^2+\omega+2, \ldots, \omega^2+\omega 2,$$
$$\omega^2+\omega 2+1, \ldots, \omega^2+\omega 3, \ldots, \omega^2+\omega 4, \ldots, \omega^2 2, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^4, \ldots,$$
$$\omega^\omega, \ldots, \omega^{(\omega^\omega)}, \ldots, \omega^{(\omega^{(\omega^\omega)})}, \ldots, \varepsilon_0, \varepsilon_0+1, \varepsilon_0+2, \ldots, \varepsilon_0+\omega, \ldots,$$
$$\varepsilon_0+\omega 2, \ldots, \varepsilon_0+\omega^2, \ldots, \varepsilon_0+\omega^\omega, \ldots, \varepsilon_0 2, \ldots, \varepsilon_0\omega, \varepsilon_0\omega^\omega, \ldots, \varepsilon_0^2 \ldots$$

와 같이 계속된다.

문제 3.6.6. 위에 열거한 서수들이 $\mathbb{N}$ 과 대등한지 살펴보아라.

문제 3.6.7. 임의의 기수, 즉 시작서수는 극한 서수임을 보여라. 또한, 그 역은 성립하지 않음을 보여라.

이제

$$\aleph_1 = \min\{\xi : \aleph_0 < \operatorname{card}(\xi) \le 2^{\aleph_0}\}$$

라 정의하자. 그러면 $\aleph_1$ 은 기수가 되고, 다음

$$\aleph_1 > \aleph_0, \qquad \xi \in \aleph_1 \implies \operatorname{card}(S_\xi) = \aleph_0$$

이 성립한다. 이 성질은 수학의 여러 분야에서 반례를 만드는 데에 폭넓게 쓰인다. 유명한 **연속체 가설**은 $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ 인가 하는 것을 묻는 것이다.

문제 3.6.8. $\aleph_1 = \sup\{\xi : \xi \approx \aleph_0\}$ 임을 보여라.

정리 2.1.2 를 사용하면, 임의의 자연수 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여

$$\aleph_n = \min\{\xi : \aleph_{n-1} < \operatorname{card}(\xi) \le 2^{\aleph_{n-1}}\}$$

이라 정의할 수 있다. 또한,

$$\aleph_\omega = \sup\{\aleph_n : n < \omega\}$$

라 정의하면 새로운 기수를 계속 얻어 나갈 수 있다. 정리 2.1.2 를 서수들에 대하여 확장하면 임의의 서수 α 에 대하여 기수 $\aleph_\alpha$ 를 계속 정

의할 수 있고, 임의의 기수는 이러한 꼴로 표시할 수 있으나 여기서 그치기로 한다. 임의의 기수 α 에 대하여 $\aleph_{\alpha^+} = 2^{\aleph_\alpha}$ 인가 물어보는 것이 일반 연속체 가설이다.