실수란 무엇인가[1]

계 승 혁
서울대학교 수학과

제 1 절 왜 문제가 되는가?

고등학교에서 배운 사이값정리를 생각하여 보자.

정리 1. 구간 $[a, b]$ 에서 정의된 연속함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 이 정의역의 양끝점에서 $f(a) < 0$ 이고 $f(b) > 0$ 이면, $f(c) = 0$ 을 만족하는 실수 $c \in (a, b)$ 가 존재한다.

기하적인 직관에 의존하면, 이 정리는 당연하게 보인다. 실제로, 사이값정리는 16 세기부터 수학자들에게 잘 알려져 있었으며, 아무도 그 진실성을 의심하지 않았다. 이러한 경향에 반기를 들고, 사이값정리를 '증명'하려고 시도한 사람은 보헤미아의 성직자였던 볼차노[2]인데, 그는 1817 년에 발표한 논문에서 다음과 같은 논증을 하였다. 그는 우선 다음 정리를 먼저 증명하였다.

정리 2. 어떤 성질 M 이 모든 실수에 대하여 성립하지는 않지만, 어떤 특정한 실수 u 보다 작은 모든 실수에 대하여 성립한다고 가정하자. 이제, 실수 x 보다 작은 모든 실수에 대하여 M 이 성립하는 실수 x 들을 생각하면, 이러한 수들 중에서 제일 큰 수가 존재한다.

내용이 좀 복잡하긴 하지만, 볼차노 시대에는 알려져 있지 않던 집합 개념을 사용하여 다시 써 보면, 무슨 뜻인지 분명하게 알 수 있다. 사이값정리를 증명하려면, $f(x) < 0$ 을 성질 M 이라 두고 정리 2 를 적용하면 된다. 볼차노는 위 정리 2 를 증명하기 위하여 적절한 급수의 극한을

---

[1]이 글은 1995년 3월 서울대학교 수학·통계학과군으로 입학한 신입생들을 상대로 강연할 때 배포한 것이다.

[2]Bernhard Bolzano (1781-1848), 보헤미아의 성직자. 참고문헌 [6] 16 장을 참조하라.

이용하였다. 이를 위하여, 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 의 수렴에 관한 일반원칙을 기술하였다.

정리 3. 작은 양수가 임의로 주어졌을 때, n 을 충분히 크게 하면 $\sum_{k=n}^{m} a_k$ 의 값이 주어진 양수보다 작게 할 수 있다고 가정하자. 그러면, 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 는 일정한 실수로 수렴한다.

볼차노는 이 정리를 증명하려고 무던히 애를 썼으나, 결국은 불완전한 논증에 그치고 말았다. 정리 3 은 1821 년에 프랑스 수학자 코시[3]도 독자적으로 언급하였으나, 그 역시 완전한 증명에는 실패하였다. 정리 3 은 코시의 판정법이라 불리운다. 위에서 언급한 세 가지 정리는 중요한 공통점을 가지고 있는데, 모두 특정한 성질을 가지고 있는 실수의 존재성을 주장하고 있다는 점이다. 따라서, '실수'가 무엇인지 규명되어 있지 않은 상태에서 이러한 정리들을 증명한다는 것은 불가능하다. 사실 이 세 가지 정리는 논리적으로 모두 동치이다. 다시 말하여, 한 정리를 가정하면 나머지 두 정리를 증명할 수 있다는 말이다. 이와 논리적으로 동치인 명제는 이 세 가지 외에도 얼마든지 있다. 예를 들어서, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 이 수렴한다는 것을 증명할 때 다음 정리를 사용하는데, 이 역시 마찬가지이다.

정리 4. 각 항 a_k 가 모두 양수이고 임의의 부분합 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 가 고정된 실수 u 보다 작다고 가정하자. 그러면, 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 는 일정한 실수로 수렴한다.

제 2 절 어떻게 대답해야 하는가?

이제, 실수가 무엇인지 대답하기에 앞서, 우리가 보통 '책상이 무엇인가' 혹은 '배추가 무엇인가' 물어 보았을 때 어떻게 대답해야 하는가 생각하여 보자. 책상이나 배추의 성질들을 늘어 놓는 것은 쉽지만, 책상이나 배추가 '무엇'인지 답하는 것은 쉬운 일이 아니다. 하물며, 그 개수

[3]Augustin Louis Cauchy (1789-1857), 프랑스의 수학자. 그에 관한 전기로 [3] 등이 있다.

가 무한히 많은 실수 하나하나가 무엇인지 규명하는 일은 간단한 문제가 아니다. 실수는 고사하고 개수를 세는 하나, 둘, 셋 등이 그 자체로서 무엇인지 규명하는 것부터 간단한 일이 아니다. 그러나, 실제로 중요한 것은 하나, 둘, 셋 그 자체가 무엇인가 하는 것이 아니고, 이러한 자연수 사이에 주어지는 덧셈, 곱셈 혹은 순서 등 그 상호관계이다. 따라서, 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$ 에 어떠한 내부 구조가 있는가 하는 점이 보다 중요하다. 다르게 말하면, $\mathbb{N}$ 의 성질이 보다 중요하다는 말이다. 실제로, 누가 배추란 무엇인가 하고 물으면 대부분의 경우 배추의 생김새나 그 쓰임새 등 배추의 성질을 이야기한다. 여러 가지 성질들을 늘어 놓았을 때 이러한 성질들을 공유하는 물건이 배추뿐이라면, '배추가 무엇인가' 하는 물음에 충분한 대답이 될 수 있을 것이다.

우리가 실수를 규명할 때에도 실수 하나하나에 신경을 쓰지 않고, 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 의 성질을 규명하려고 한다. 따라서, 실수들 사이의 여러가지 성질들을 열거하고, 이러한 성질들을 만족하는 집합을 $\mathbb{R}$ 이라 쓰려 한다. 물론 집합 $\mathbb{R}$ 의 원소 하나하나를 실수라 부른다. 위에서 언급한 배추의 경우처럼, 열거된 성질들을 모두 만족하는 것이 하나 밖에 없다는 것을 증명하여야 한다. 그런데, 배추의 경우와 중요한 차이점이 있다. 배추의 경우 이미 그러한 물건이 있다는 것을 알고 있다. 그러나, 우리가 실수의 성질이라고 늘어 놓은 것들을 모두 만족하는 집합이 과연 실제로 있는가 하는 것은 전혀 별개의 문제이다. 따라서, 우리는 열거된 성질들을 모두 만족하는 집합이 과연 존재한다는 것을 증명하여야 한다.

제 3 절 어떤 성질들이 실수를 규정하는가?

이제 실수집합 $\mathbb{R}$ 의 성질들을 늘어 놓아 보자. 우선 떠오르는 것은 어릴 때부터 배워 온 셈법이다. 집합 $\mathbb{R}$ 에는 두 가지 연산, 즉 더하기 $+$ 와 곱하기 $\cdot$ 가 있어서 다음의 성질들을 만족한다. 곱셈 $a \cdot b$ 는 ab 로도 쓴다.

(체1) 임의의 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $a + (b + c) = (a + b) + c$ 이다.

(체2) 다음 성질

$$\text{임의의} \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{에 대하여} \quad a + e = e + a = a$$

를 만족하는 원소 $e \in \mathbb{R}$ 이 존재한다.

위 성질을 만족하는 원소 $e' \in \mathbb{R}$ 이 또 하나 있다면 $e = e + e' = e'$ 이다. 따라서, 이러한 성질을 만족하는 원소는 하나 밖에 없는데, 이를 앞으로 0 이라 쓰고, 더하기의 **항등원**이라 한다.

(체3) 각 $a \in \mathbb{R}$ 에 대하여 다음 성질

$$a + x = x + a = 0$$

을 만족하는 원소 $x \in \mathbb{R}$ 이 있다.

만일 위 성질을 가지는 원소 $y \in \mathbb{R}$ 이 또 하나 있다면

$$x = x + 0 = x + (a + y) = (x + a) + y = 0 + y = y$$

가 되어서 이 성질을 가지는 원은 유일하다. 원소 $a \in \mathbb{R}$ 에 의하여 결정되는 이 원소를 $-a$ 라 쓰고, 이를 더하기에 관한 a 의 **역원**이라 한다. 또한, $b + (-a)$ 는 간단히 $b - a$ 로 쓴다.

(체4) 임의의 $a, b \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $a + b = b + a$ 이다.
(체5) 임의의 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $a(bc) = (ab)c$ 이다.
(체6) 다음 성질

$$\text{임의의} \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{에 대하여} \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

를 만족하는 0 아닌 원소 $1 \in \mathbb{R}$ 이 존재한다.

(체7) 각 $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 에 대하여 다음 성질 $ax = xa = 1$ 을 만족하는 원소 $x \in \mathbb{R}$ 가 있다.

물론 (체6) 의 원소 1 도 유일하며, 이 특정 원소를 1 로 쓴 것이다. (체7) 의 원소 x 도 (체3) 의 경우와 마찬가지로 a 에 의하여 결정되며 이를 a^{-1} 이라 쓴다.

(체8) 임의의 $a, b \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $ab = ba$ 이다.
(체9) 임의의 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $a(b + c) = ab + ac$ 이다.

위 성질들을 살펴보면 (체1) 부터 (체4) 까지는 더하기에 관한 성질들이고, (체5) 부터 (체8) 까지는 곱하기에 관한 성질들임을 알 수 있다. 성질 (체9) 는 물론 더하기와 곱하기가 어떻게 관련되어 있는가 하는 점을 나타낸다. 일반적으로, 어떤 집합 F 에 두 가지 연산이 있어서 위 성질들을 만족하면 이를 **체**라고 부른다. 어떤 수집합이 체라 함은, 간단히 말하여 가감승제가 자유롭다는 뜻이다. 참고로, 집합 F 에 연산이 주어졌다는 것은 다름이 아니라 $F \times F$ 에서 F 로 가는 함수가 주어져 있다는 말이다. 유리수 전체의 집합 $\mathbb{Q}$, 복소수 전체의 집합 $\mathbb{C}$ 가 체임을 이미 알고 있을 것이다. 물론, 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$ 이나 정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$ 는 체가 아니다. 위에서 열거한 성질들을 이용하면, 연산에 관한 모든 법칙을 증명할 수 있다. 이를테면, 중학교에서 배운 곱셈에 관한 법칙, 두 수의 곱이 0 이면 둘 중의 하나가 0 이다, 등도 증명할 수 있다.

실수의 성질 가운데 다음으로 중요한 것은 '순서'이다. 순서가 무엇인가 규명하기 위하여 '양수'가 무엇인지 규명하면 된다. 실수집합 $\mathbb{R}$ 에는 다음 성질들을 만족하는 부분집합 P 가 존재한다.

(순1) $a, b \in P \Longrightarrow a + b,\ ab \in P$.
(순2) $\mathbb{R} = P \cup \{0\} \cup (-P)$.
(순3) 집합 P, $\{0\}$ 및 $-P$ 는 서로소이다.

위 성질들을 만족하는 부분집합을 가지는 체를 **순서체**라 하고 P 의 원소를 **양수**라 한다. 두 실수 $a, b \in \mathbb{R}$ 에 대하여, $a - b \in P$ 이면 a 가 b 보다 **크다**고 말하고 이를 $a > b$ 또는 $b < a$ 로 쓴다. 만일 $a > b$ 이거나 $a = b$ 이면 $a \geq b$ 라고 쓴다. 위 성질들을 이용하면, 음양과 관련된 여러 가지 법칙들, 예를 들어 음수 곱하기 음수는 양수, 등도 모두 증명할 수 있다. 위에서 언급한 복소수체나 유한체 등에는 순서를 줄 수 없다. 그러나, 유리수체가 순서체라는 것은 바로 알 수 있으므로, 실수체를 규명하기 위하여 다른 성질을 추가할 필요가 있다. 이미 언급한 바와 같이 1 절에 나오는 정리들은 모두 논리적으로 동치이므로 그 중 하나만 실수의 성질에 추가하면 되고, 그 중 어느 것을 추가해도 마찬가지이다.

제 4 절 이런 것이 정말 있는가?

이제, 앞 절에서 언급한 성질들을 모두 가지는 집합이 있는가 하는 물음에 답하여 보자. 여기서는 유리수체가 존재한다는 것은 가정하고, 유리수체로부터 실수체를 어떻게 만드는지 살펴보자. 대표적인 방법이 두 가지인데, 독일의 수학자 데데킨트와 칸토르[4]가 1870 년대 같은 시기에 전혀 다른 방법을 이용하여 독자적으로 만들었다.

데데킨트는 직선 위의 점이 그 직선을 두 부분으로 자른다는 사실을 주목하였다. 이는 유리수체도 마찬가지인데, 유리수로 이루어진 두 집합의 쌍 (A,B) 가 다음 성질

$$A \cup B = \mathbb{Q}, \qquad A \cap B = \emptyset, \qquad a \in A,\ b \in B \Longrightarrow a < b$$

을 만족할 때, (A,B) 를 **절단**이라 부르자. 만일 A 가 최대값을 가지거나 B 가 최소값을 가지는 경우, 절단 (A,B) 가 한 유리수를 나타낸다고 볼 수 있다. 그러나, 절단 가운데 그렇지 못한 것이 있다. 예를 들어서

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \le 0 \text{ 혹은 } x^2 < 2\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 > 2\}$$

이라 두면 (A,B) 는 절단이 되지만, A 가 최대값을 가지지 않고 B 가 최소값을 가지지 않음을 바로 알 수 있다. 이제, 절단들을 모두 모아 놓으면 1 절과 3 절에서 언급한 성질들을 만족하는 수집합이 된다. 예를 들어서, 절단 (A,B) 와 (A',B') 의 합을 정의하려면 집합 $A+B := \{a+a' : a \in A, b \in B'\}$ 과 그 여집합 $\mathbb{Q} \setminus (A+B)$ 를 생각하면 된다. 또한, A 와 A' 사이에 $A \subset A'$ 이거나 $A \supset A'$ 둘 중에 하나가 반드시 성립하는데, 이를 이용하면 순서를 정의할 수 있다. 이렇게 정의된 순서체에 대하여 1 절에서 논의된 여러 가지 정리를 쉽게 증명할 수 있다. 다시 말하여, 기하적인 직관에 의존하지 않을 수 없는 미적분학의 몇가지 기본 쟁점들을 완전히 산술적인 방법으로 증명할 수 있도록 한 것이다. 사실, 역

---

[4]Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), 독일의 수학자. 괴팅겐에서 학위를 받은 후, 취리히 및 독일 중부의 Braunschweig 등에서 활동하였다.

Georg Cantor (1845-1918), 독일의 수학자. 베를린 대학에서 학위를 한 후, 1869 년부터 1905 년까지 할레 대학에서 활동하였는데, 만년을 정신병원에서 보냈다. [5] 의 서문을 참조하라.

사이래 많은 사람들이 '수'란 무엇인가, 특히 어떻게 하여야 연속된 직선의 모든 점에 수를 대응시킬 수 있는가 하는 질문에 답하려고 노력하였지만, 이와 같이 완벽한 대답을 한 사람은 없었다.[5]

칸토르는 1870 년에 삼각급수에 관한 유일정리를 발표하였다. 만일 삼각급수

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

가 구간 $[a, b]$ 위의 모든 점에서 0 으로 수렴하면, a_n 과 b_n 이 모두 0 이란 것이다. 다시 말하여 어느 함수를 삼각급수의 극한으로 표현하는 방법이 기껏해야 한 가지뿐이란 것이다. 사실, 삼각급수에 대하여 수많은 사람들이 연구하여 왔지만, 대개는 주어진 주기함수를 어떻게 삼각급수로 표현하는가, 또는 그 삼각급수가 원래 함수로 수렴하는가 하는 문제에 주력하였다. 그는 1872 년에 놀라운 결과를 발표하였는데, 위 급수가 모든 점에서 수렴하지 않아도 결론을 내리는데 지장이 없으며, 수렴하지 않는 점들의 '분포'가 적당한 조건을 만족하면, 그러한 점들의 개수가 무한히 많더라도 같은 결론을 내릴 수 있다는 것이다. 여기서 제시한 조건은 극한점 등의 개념을 이용한 이른 바 위상적인 성질로서, 칸토르가 무한집합에 대하여 연구하고 집합론을 창시하는 계기가 되었다. 이러한 조건을 말하기 앞서서 그는 우선 실수를 구성하는 방법을 제시하였다.

그는 유리수열 $\langle a_n \rangle$ 이 다음 조건

- 임의의 양의 유리수 $\epsilon > 0$ 이 주어졌을 때, 적절한 자연수 n_1 을 잡으면, 모든 자연수 m 과 $n \geq n_1$ 에 대하여 $|a_{n+m} - a_n| < \epsilon$ 이 성립한다.

을 만족할 때 $\langle a_n \rangle$ 을 **기본열**이라 불렀다. 이는 사실 1 절의 정리 3 에서 제시된 조건에 다름아니다. 볼차노와 코시는 이러한 수열이 반드시 어떤 실수로 수렴한다고 잘못된 논증을 시도하였으나, 칸토르는 이러한 기본열 자체를 하나의 실수로 취급하였다. 여기서 중요한 문제가 생기는데, 서로 다른 기본열이라도 사실은 같은 '수'를 나타낼 수 있다는 점

[5]데데킨트의 방법은 [9] 의 1 장에 잘 설명되어 있다.

이다. 따라서, 우리는 '같다'라는 것이 무슨 뜻인지 분명하게 밝힐 필요가 생긴다. 이러한 문제는 수학뿐 아니라 일상생활에서도 일어난다. 기하 시간에 선생님이 칠판에 그리는 정삼각형과 학생이 공책에 그리는 정삼각형은 같은 것인가? 가게에서 물건을 살 때에, "어제 산 것과 같은 걸 주시오"라고 말할 때 제대로 말하는 것인가? 잘 생각하여 보면 '같다'라고 하는 말은 그때 그때 정하기 나름이라는 것을 알 수 있다. 칸토르는, 기본열 $\langle a_n \rangle$ 과 $\langle b_n \rangle$ 이 다음 조건

- 임의의 양의 유리수 $\epsilon > 0$ 이 주어졌을 때, 적절한 자연수 n_1 을 잡으면 n_1 보다 큰 임의의 자연수 n 에 대하여 $|a_n - b_n| \le \epsilon$ 이 성립한다.

를 만족할 때, 두 기본열이 같다고 정의하였다. 간단히 말하면 $\langle a_n - b_n \rangle$ 이 0 으로 수렴할 때 $\langle a_n \rangle$ 과 $\langle b_n \rangle$ 이 같다고 약속하자는 말이다.

이와 같은 기본열 전체의 집합에 연산과 순서를 정의해야 하는데, 이 경우 그 정의가 제대로 되어 있는지 반드시 확인하여야 한다. 예를 들어서, 두 기본열 $\langle a_n \rangle$ 과 $\langle b_n \rangle$ 의 합은 수열 $\langle a_n + b_n \rangle$ 으로 정의한다. 그러면, 우선 $\langle a_n + b_n \rangle$ 이 기본열이 된다는 것을 보여야 한다. 그리고, $\langle a_n \rangle$ 과 $\langle a'_n \rangle$ 이 같고 $\langle b_n \rangle$ 과 $\langle b'_n \rangle$ 이 같을 때 $\langle a_n + b_n \rangle$ 과 $\langle a'_n + b'_n \rangle$ 이 같다는 것을 증명하여야 한다. 이와 같은 방법으로 칸토르는 실수를 구성하였다. 칸토르의 방법은 모든 실수를 유리수열의 극한으로 이해하고자 하는 생각을 구체적으로 구현한 것이다.[6] 물론 주어진 실수를 어떻게 유리수열로 표현하느냐 하는 것은 전혀 별개의 문제이다. 알려진 바로는 번분수전개가 주어진 실수를 가장 빠르게 유리수열로 점근시키는 방법이다.

제 5 절 이런 것이 하나 밖에 없는가?

이제, 3 절에서 말한 성질들을 모두 만족하는 것이 존재한다는 것을 알았는데, 그것들, 특히 데데킨트와 칸토르가 제시한 것이 실제로 같은 것인가 하는 질문에 대답하여 보자. 대답하기에 앞서서, 우선 '같다'는 말

[6] 칸토르의 방법은 [1] 의 부록에 간략하게 설명되어 있다.

이 무슨 뜻인가 따져 보아야 한다. 이제 우리가 생각하려는 것은, 양수집합이 P_F 와 P_G 로 각각 주어진 두 순서체 F 와 G 가 모두 1 절에서 말한 성질을 만족할 때 F 와 G 가 같은가 하는 것인데, 여기서 같다고 하는 말은 사실 F 와 G 가 순서체로서 꼭같은 구조를 같는가 하는 점을 묻고 있는 것이다. 즉, F 의 원들과 G 의 원들이 일대일 대응이 되어 연산과 순서구조가 그대로 보존되는가 하는 것이 이 물음의 핵심이다. 보다 구체적으로 다시 말하면, 전단사함수 $\phi : F \to G$ 를 잘 정의하여, 다음 성질들

(유1) 각 $x, y \in F$ 에 대하여 $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$, $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ 이 성립한다.

(유2) $\{\phi(x) \in G : x \in P_F\} = P_G$ 이다.

가 성립하도록 할 수 있는가 하는 것이다. 여기서, $\phi(x+y)$ 의 '+' 는 F 의 더하기이고, $\phi(x) + \phi(y)$ 의 '+' 는 G 의 더하기인데, 곱하기도 물론 마찬가지이다.

우선 1 을 몇 번 더하여 0 이 되면, 이러한 수집합은 순서체가 될 수 없다. 따라서, 임의의 자연수 n 에 대하여 1 을 n 번 더한 수를 $n \cdot 1$ 이라 쓰면 집합 $\{n \cdot 1 \in F : n = 1, 2, \dots\}$ 와 자연수집합 $\mathbb{N}$ 은 일대일 대응이 되고 더하기와 곱하기가 보존됨을 알 수 있다. 마찬가지로 집합

$$\{(n \cdot 1) \cdot (m \cdot 1)^{-1} : m, n \in \mathbb{Z},\ m \neq 0\}$$

은 유리수집합과 일대일대응이된다. 순서체 F 와 G 의 1 을 1_F 와 1_G 로 각각 표시하면, 우선 $(n \cdot 1_F) \cdot (m \cdot 1_F)^{-1}$ 를 $(n \cdot 1_G) \cdot (m \cdot 1_G)^{-1}$ 로 보내도록 ϕ 를 정의하여야 한다. 나머지 원소 $x \in F$ 에 대하여 $\phi(x)$ 를 정의하기 위하여, 1 절에 나오는 정리들과 동치인 명제를 한 가지 더 소개한다.

실수집합 $A \subset \mathbb{R}$ 과 실수 $\alpha \in \mathbb{R}$ 이, 다음 성질

(상1) 임의의 $a \in A$ 에 대하여 $a \le \alpha$ 이다.

(상2) 만일 임의의 $a \in A$ 에 대하여 $a \le \beta$ 이면 $\alpha \le \beta$ 이다.

을 만족하면 α 가 A 의 **최소상계**라 하고, 이를 $\alpha = \sup A$ 라 쓴다. 실수 α 가 (상1) 에 나오는 성질을 가질 때 이를 집합 A 의 **상계**라 부르는

데, (상2) 에서는 α 가 상계들 중에서 최소값임을 말하고 있다. 다음 정리 또한 1 절에 나오는 정리들과 논리적으로 동치인데, 이를 완비성공리라 부른다.

정리 5. 비어 있지 않은 실수 집합 $A \subset \mathbb{R}$ 이 상계를 가지면 A 는 반드시 최소상계를 가진다.

이 성질을 이용하면, 임의의 $x \in F$ 에 대하여

$$\phi(x) = \sup\{r \cdot 1_G : r \in \mathbb{Q},\ r \cdot 1_F < x\} \in G$$

라 정의할 수 있다. 이렇게 정의된 함수 ϕ 는 실제로 전단사함수이고, (유1) 과 (유2) 를 만족한다. 다시 말하면, 완비성공리를 만족하는 순서체는, 그 구성 방법에 상관없이 모두 '같은' 것이 된다. 따라서, 완비성공리를 만족하는 순서체는 적어도 하나가 있고 또 하나 밖에 없는데, 이를 실수체라 하고 그 원소 하나하나를 실수라 부른다.

참고 문헌

[1] 김성기·김도한·계승혁, *해석개론*, 서울대학교 출판부, 1995.
[2] 박세희, *수학의 세계*, 서울대학교 출판부, 대학교양총서 18, 1985.
[3] B. Belhoste, *Augustin-Louis Cauchy, A biography*, Springer-Verlag, 1991.
[4] U. Bottazzinni, *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Springer-Verlag, 1986.
[5] G. Cantor, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Dover, 1955.
[6] J. L. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs*, Oxford University Press, 1990.
[7] H. Eves, *Great Moments in Mathematics*, [번역: 허민·오혜영, 수학의 위대한 순간들, 경문사, 1994].
[8] A. Fraenkel, *Set theory and logic*, Addison-Wesley, 1966.
[9] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis, 3/e*, McGrawHill, 1976.