연습문제 풀이

제 1 장

1.1.5. (가) $z = \frac{5}{2}i \pm \frac{\sqrt[4]{985}}{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$ 단, $\tan 2\theta = -\frac{12}{29}$

(나) $z = -i,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

1.2.1. 확대와 회전의 순서만 바꿀 수 있다.

1.2.2. (가) $\{w : \operatorname{Im} w \geq 0\}$ (나) $\{w : \operatorname{Re} w \geq 0,\ \operatorname{Im} w \geq 0\}$

(다) $\{(u,v) : v \geq 0,\ -1 + \frac{v^2}{4} \leq u \leq 1 - \frac{v^2}{4}\}$ (라) $\{w : |w| = 1\}$

1.2.3. $(2u^2 + 2v^2 + 4u + \frac{9}{8})^2 = u^2 + v^2$

1.3.3. (가) $\{w : \operatorname{Re} w > 0,\ \operatorname{Im} w < 0\}$ (나) $\{w : -\frac{\pi}{4} < \arg w < 0\}$

(다) $\{w : |w - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2},\ |w + \frac{i}{2}| > \frac{1}{2},\ \operatorname{Re} w > 0,\ \operatorname{Im} w < 0\}$

(라) $\{w : |w| = 1\}$

1.3.4. (가) $w = \frac{1 - iz}{3z - i}$ (나) $w = \frac{z - 1}{i - 1}$ (다) $w = \frac{z}{z - 1}$

1.3.5. (가) $\{z : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ (나) $\{z : |z| \leq 1\}$ (다) $\{z : \operatorname{Im} z \leq 0\}$

(라) $\{z : |z - 1| \leq \sqrt{2},\ \operatorname{Im} z \leq 0\}$

1.3.6. $x = \frac{2a}{a^2 + 1},\ y = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$

1.4.1. (가) $v = -3u + 6$ (나) $v = -2u + 2$ (다) $|w - 2| = 3\sqrt{2}$

(라) $|w - 3 - i| = 3\sqrt{2}$

1.4.2. $\{(u,v) : v > -u + 3,\ u - 3 < v < u - 7\}$

1.4.3. $w=-\frac{1}{4}(1-3i)z+(\frac{3}{2}+3i)$

1.4.4. (가) $\mathrm{Im}\,w>-1$ (나) $\mathrm{Im}\,w>0$

1.4.5. (가) $|w+1+\frac{1}{2}i|=\frac{\sqrt{5}}{2}$ (나) $|w-\frac{1}{2}+i|=\frac{\sqrt{5}}{2}$

1.4.6. (가) $w=\frac{-z-i}{3z-i}$ (나) $w=\frac{1}{z-(1+i)}$ (다) $w=\frac{-(3+i)z-i}{z-2}$
(라) $w=\frac{4-z}{z-2}$

1.4.7. (가) $\mathrm{Im}\,w\le\frac{1}{2}$ (나) $|w-\frac{1}{2}i|\ge\frac{1}{2}$ (다) $\mathrm{Re}\,w\ge 0$

1.4.8. (가) $|w-1-i|<1$ (나) $|w+i|>\sqrt{2}$

1.4.9. $\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$

1.4.12. $(a+2b+c)x^2+(-a+2b-c)y^2+2i(a-c)xy=d$ 에서 $a=c$, $(a+c)x^2+(-a+b)y^2=\frac{d}{2}$ 이다

1.4.13. $\mathrm{Re}\,\alpha\neq 0$, $|\beta|^2-4(\mathrm{Re}\,\alpha)(\mathrm{Re}\,\gamma)>0$

1.4.14. α,β,γ 가 주어진 등식을 만족하는 것과 $\alpha-\tau,\beta-\tau,\gamma-\tau$ 가 주어진 등식을 만족하는 것은 동치이다. 또한, α,β,γ 대신에 $\rho\alpha,\rho\beta,\rho\gamma$ 를 대입해도 마찬가지이다. 따라서, $\alpha=0$ 이고 $\beta=1$ 일 때에만 증명하면 된다. 즉, $0,1,\gamma$ 가 정삼각형의 세 꼭지점을 이룬다는 것과 $\gamma^2-\gamma+1=0$ 이 성립하는 것과 동치임을 보이면 된다.

1.4.16. (가) $w=A\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$, 단 $|A|=1$
(나) $w=\frac{az+b}{cz+d}$, 단 $a,b,c,d\in\mathbb{R},\ ad-bc>0$
(다) $w=K\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$, 단 $|K|=1,\ |\alpha|<1$

1.4.17. 먼저 $\phi_\alpha(\infty)=-\frac{1}{\overline{\alpha}}$ 이고, $\phi_\alpha(\frac{1}{\overline{\alpha}})=\infty$ 이다. 만일 $\phi_\alpha(L)=L$ 이면 $\infty\in L$ 이므로 $-\frac{1}{\overline{\alpha}}=\phi_\alpha(\infty)\in L$ 이고 $\frac{1}{\overline{\alpha}}=\phi_\alpha^{-1}(\infty)\in L$ 이다. 그런데, 0, α 및 $\pm\frac{1}{\overline{\alpha}}$ 가 일직선 위에 있으므로 $L=\{t\alpha : t\in\mathbb{R}\}$ 이다. 역으로 $L=\{t\alpha : t\in\mathbb{R}\}$ 이면 $\phi_\alpha(0)=\alpha$ 이고 $\phi_\alpha(\infty)=-\frac{1}{\overline{\alpha}}$ 및 $\phi_\alpha(\frac{1}{\overline{\alpha}})=\infty$ 이므로 ϕ_α 는 L 을 L 로 보낸다.

제 2 장

2.1.1. $||\alpha| - |\beta|| \le |\alpha - \beta|$

2.1.4. (가) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to \dfrac{1}{e}$ 이므로 수렴 (나) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to \dfrac{2}{e}$ 이므로 수렴
(다) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$ 이므로 수렴

2.2.1. 0

2.2.5. (가) 1 (나) 1 (다) ∞ (라) e (마) $\dfrac{1}{2}$ (바) 2

2.2.6. $\dbinom{\alpha-1}{n} + \dbinom{\alpha-1}{n-1} = \dbinom{\alpha}{n}$ 를 이용한다.

2.3.2. $(n+\dfrac{1}{2})\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

2.3.3. $\{w : \operatorname{Im} w = 0,\ \operatorname{Re} w \ge 1\}$

2.3.5. (가) $e^{-2n\pi + i\log 2}$ (나) $e^{-(\pi/2+2n\pi)}$ (다) $-i$
(라) $-\dfrac{7}{4}\pi + 2n\pi + i(\log\sqrt{2} + 2m\pi)$

2.4.2. 만일 $-\pi < \operatorname{Arg}\alpha < \pi$ 이면 동치관계가 성립한다.

2.4.3. (가) $|a|$ (나) $\min\{1, \dfrac{1}{|a|}\}$ (다) 1 (라) $\dfrac{1}{e}$ (마) 2 (바) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
(사) ∞ (아) 1 (자) $\dfrac{5}{3}$

2.4.4. (가) 등식 $a_n = A_n - A_{n-1}$ 을 이용한다.
(나) 먼저 (가) 에 의하여, 급수 $\sum_n A_n(b_{n+1} - b_n)$ 과 수열 $\langle A_n b_{n+1}\rangle$ 이 수렴하면 급수 $\sum_n a_n b_n$ 이 수렴함을 알 수 있다. 민일 $|A_n| \le M$ 이면, $A_n b_{n+1} \to 0$ 이다. 또한, $|A_n(b_{n+1} - b_n| \le M(b_{n+1} - b_n)$ 인데, $\sum_n (b_{n+1} - b_n) = b_1$ 이다.
(다) $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^k$ 이라 두면 $|A_n| = \left|\dfrac{z - z^{n+1}}{1-z}\right| \le \dfrac{2}{|1-z|}$ 이다.

2.4.5. (가) $\sqrt{R}$ (나) R (다) R (라) R (마) R^k (바) ∞ (사) 0

2.4.6. (가) $z = \dfrac{2n\pi i}{3}$ (나) $z = \pm\sqrt{n\pi}(1+i),\ \pm\sqrt{n\pi}(1-i), n = 0, 1, 2, \dots$
(다) $z = \operatorname{Log}|2n\pi| + i(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi)$

2.4.7. (가) $\{e^{\pi i/4} t : e^{-5} \le t \le e^5\}$ (나) $\{w : \operatorname{Re} w > 0,\ |w| = e^3\}$
(다) $\{w : \operatorname{Im} w > 0,\ e^{-2} < |w| < e^{14}\}$
(라) $\{w : 0 < |w| < e^{14},\ -\dfrac{\pi}{3} < \arg w < \dfrac{2\pi}{3}$

2.4.8. (가) $\operatorname{Log}\sqrt{2} + i(\dfrac{7\pi}{4} + 2n\pi)$ (나) $\operatorname{Log}\sqrt{13} - i(\arctan\dfrac{2}{3} + 2n\pi)$

2.4.9. (가) $e^{-2n\pi+i\mathrm{Log}\,5}$ (나) $\pi^e e^{i(\pi/2+2n\pi)e}$ (다) $\frac{1}{2}e^{-2n\pi}$
(라) $-(\frac{\pi^2}{4}+2n\pi^2)+i(\pi\mathrm{Log}\sqrt{2}+2m)$

2.4.10. $1^{1/2}+1^{1/2}=0,\pm 2$ 이고, $2\cdot 1^{1/2}=\pm 2$ 이다.

2.4.11. 만일 $z=te^{i\theta}$ 이면 $|e^{iz}|=e^{-t\sin\theta}$ 이고 $|e^{-iz}|=e^{t\sin\theta}$ 이다. 따라서, $\sin\theta>0$ 이면 $2|\cos z|=|e^{iz}+e^{-iz}|\geq|e^{-iz}|-|e^{iz}|$ 는 $t\to+\infty$ 에 따라서 $+\infty$ 로 발산한다. $\sin\theta<0$ 일 때에도 마찬가지이다. 따라서, 구하는 조건은 $\sin\theta=0$ 이다.

2.4.12. 만일 $\log z$ 를 집합 $\{\mathrm{Log}\,|z|+i(\mathrm{Arg}\,z+2n\pi):n=0,\pm 1,\pm 2,\dots\}$ 으로 이해하면 두 집합은 같다.

2.4.13. $\log\alpha=\mathrm{Log}\,|\alpha|+i(\mathrm{Arg}\,\alpha+2k\pi)$ 에서 $\alpha^\beta=e^{\beta\mathrm{Log}\,|\alpha|}\cdot e^{i\beta(\mathrm{Arg}\,\alpha+2k\pi)}$ 이다.

제 3 장

3.2.1. 모든 점에서 미분불가능하다.

3.2.2. (가) $v(x,y)=y^2-x^2+C$ (나) $v(x,y)=e^x\sin y+C$
(다) 조화함수가 아니다. (라) $v(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}+C$

3.3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}n^3z^n=\frac{z(z^2+4z+1)}{(1-z)^4}$ 에서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{4^n}=\frac{132}{81}$ 이다. 또한, $\sum_{n=1}^{\infty}n^4z^n=\frac{z(z^3+11z^2+11z+1)}{(1-z)^5}$ 에서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{2^n}=150$ 이다.

3.4.2. (가) (나) (다) (마) (바) $z=0$ 에서만 코시-리만 방정식을 만족하고 미분가능하다. (라) 모든 점에서 코시–리만 방정식을 만족하고 미분가능하다.

3.4.4. (가) $a=b,\ c=-1$ (나) $a=b=\frac{c}{2}$ (다) $a=1,\ b=0$
(라) $a=b=0$

3.4.6. (가) $\frac{1}{3}$ (나) 0 (다) 2 (라) 존재하지 않음

3.4.7. (가) $ay-bx$ (나) $\frac{x}{x^2+y^2}$ (다) $3x^2y-y^3$ (라) $-\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$
(마) $e^{x^2-y^2}\sin 2xy$

3.4.8. $a=3,\ v(x,y)=-x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+3xy^2$

3.4.9. 조화함수 u, v 에 대하여 $\dfrac{\partial^2(uv)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2(uv)}{\partial y^2} = 2\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 이 성립한다. 따라서 u, v 가 조화함수일 때, uv 가 조화함수일 필요충분조건은 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ 이다.

3.4.10. (나) 함수 $f(z) = B_\alpha(z)e^{-\alpha\Lambda(z)}$ 의 도함수를 구한다.

(다) $|z| < 1$ 위에서 $B_\alpha(z) = e^{\alpha\Lambda(z)} = e^{\alpha \mathrm{Log}\, z}$ 이고, $(1+z)^\alpha = e^{\alpha \log z}$ 이다.

3.4.11. (가) $|z| < 1$ 위에서 $A'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ 이다.

(나) 양변을 미분하여 비교한다.

(다) Log 가 제대로 정의되었는지 확인하고 양변을 미분하여 비교한다.

(라) $\tan z = i\dfrac{1-e^{2iz}}{1+e^{2iz}}$ 와 $e^{2iz} = \dfrac{1+iz}{1-iz}$ 를 이용한다.

3.4.12. 문제 3.3.3 에 의한 부등식 $|\mathrm{Log}\,(1+z) - z| \le \dfrac{1}{2}|z|^2 \sum_n |z|^n$ 에서 원하는 부등식을 얻는다. 이에 의하여 $\lim\limits_{n\to\infty} n\mathrm{Log}\,(1+\dfrac{z}{n}) = z$ 임을 알 수 있다.

3.4.13. (가) 첫째 등식은 등비급수공식에서, 둘째 등식은 정리 2.2.4 에서 나온다.

(다) $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ 이므로 $n \ge N \implies |\sigma_n - \sigma| < \epsilon$ 인 자연수 N 을 잡을 수 있다. 이 때, $A = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} |\sigma_n - \sigma|$ 라 두면 $|f(z) - \sigma| \le |e^{i\theta} - z| \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} |\sigma_n - \sigma| + \epsilon|(e^{i\theta} - z)\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}(e^{-i\theta}z)^n| \le A|e^{i\theta} - z| + \epsilon$ 이다.

(라) 양변을 미분하여 비교한다.

(마) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos n\theta = -\log\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\theta = \frac{\pi - \theta}{2}$