제 1 장 복소평면과 복소함수

복소수를 평면의 한 점과 대응시켜서 얻어지는 복소평면에 대하여 공부하는데, 그 핵심은 절대값과 편각이다. 변수를 복소수로 하는 복소함수는 복소평면 위의 변환으로 이해한다. 이 장에서는 더하기, 빼기, 곱하기, 나누기 등을 이용한 다항식, 분수식으로 정의되는 복소함수 중에서 간단한 몇 가지 예를 살펴본다.

1.1. 복소평면

실수 a, b 에 대하여

$$a + ib \tag{1}$$

로 표현되는 수를 **복소수**라 한다. 여기서 i 는 $i^2 = -1$ 를 만족하는 수이다. 두 복소수 $a + ib$ 와 $c + id$ 에 대하여 $a = c$ 이고 $b = d$ 일 때, 두 복소수가 같은 것으로 간주한다. 즉,

$$a + ib = c + id \iff a = c,\ b = d$$

이다. 복소수 $\alpha = a + ib$ 에 대하여 a 를 α 의 **실수부**라 하며 이를 $\operatorname{Re}\alpha$ 나타낸다. 또한 b 를 α 의 **허수부**라 하고 이를 $\operatorname{Im}\alpha$ 로 쓴다. 즉,

$$\operatorname{Re}(a+ib) = a, \qquad \operatorname{Im}(a+ib) = b$$

이다.

등식 $i^2 = -1$ 를 이용하면 복소수 사이의 **더하기**와 **곱하기**를 다음

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$$
$$(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

과 같이 자연스레 정의할 수 있다. 복소수 전체의 집합 $\mathbb{C}$ 에서 0 으로 나누는 것을 제외한 가감승제를 자유롭게 할 수 있고, 연산에 관한 결합법칙, 교환법칙, 배분법칙이 모두 성립한다. 예를 들어,

$$-(a+ib) = (-a)+i(-b), \qquad \frac{1}{a+ib} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

이다. 복소수 전체의 집합은 $\mathbb{C}$ 로 표시한다. 복소수에는 또 하나의 중요한 연산이 있다. 복소수 $\alpha = a + ib$ 에 대하여 $a - ib$ 를 α 의 **켤레복소수**라 부르고, 이를 $\overline{\alpha}$ 로 쓴다. 즉,

$$\overline{a+ib} = a - ib$$

이다. 이 때, 임의의 복소수 α, β 에 대하여 다음

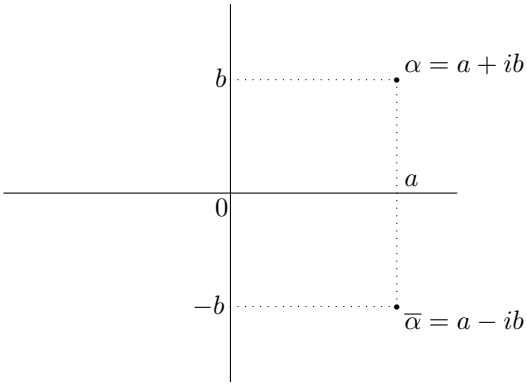
$$\overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha}+\overline{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}, \quad \operatorname{Re}\alpha = \frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}, \quad \operatorname{Im}\alpha = \frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i} \tag{2}$$

이 성립함을 바로 확인할 수 있다.

문제 1.1.1. 등식 (2) 를 증명하여라.

실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 과 직선 위에 놓여 있는 점들의 집합 사이에 자연스러운 일대일대응이 있기 때문에, 직선을 실수 전체의 집합으로 볼 수 있으며 이런 관점에서 본 직선을 **실직선**이라고 부른다. 각각의 복소수에 실수 두 개의 순서쌍이 자연스럽게 대응되고, 실수 두 개의 순

서쌍에는 평면의 한 점이 자연스럽게 대응되므로, 평면을 복소수 전체의 집합으로 볼 수 있다. 이런 관점에서 본 평면을 **복소평면** 또는 **가우스**(1)**평면**이라고 한다.



복소평면의 원점에서 복소수 α 까지 거리를 복소수 α 의 **절대값**이라 부르고, 이를 $|\alpha|$ 라 쓴다. 즉,

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

이다. 그러면, 두 복소수 α, β 에 대하여 다음 등식

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|, \quad |\alpha\beta| = |\alpha||\beta|, \quad |\overline{\alpha}| = |\alpha|, \quad \alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2 \tag{3}$$

이 성립함을 바로 확인할 수 있다. 부등식 $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ 는 **삼각부등식**이라 부른다. 한편,

$$|\alpha| = |\beta + (\alpha - \beta)| \leq |\beta| + |\alpha - \beta|$$

이므로 $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta|$ 임을 알 수 있다. 여기서, α 과 β 의 역할을 바꾸어도 마찬가지이므로 다음 부등식

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta| \tag{4}$$

(1) Johann Carl Friedrich Gauss (1777∼1855), 독일 수학자, 천문학자. Euler 와 더불어 역사상 최고의 수학자로 일컬어진다. 주로 Göttingen 에서 활동하였다.

을 얻는다.

문제 1.1.2. 관계식 (3) 을 증명하여라.

복소수 $\alpha = a + ib$ 가 복소평면에 있을 때, 양의 실수축과 원점에서 α 를 지나는 반직선이 이루는 각도를 α 의 **편각**이라 하고, 이를 $\arg\alpha$ 로 쓴다. 만일 $r = |\alpha|$, $\theta = \arg\alpha$ 이면

$$\alpha = a + ib = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{5}$$

로 나타낼 수 있다. 만일

$$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad \beta = s(\cos\tau + i\sin\tau)$$

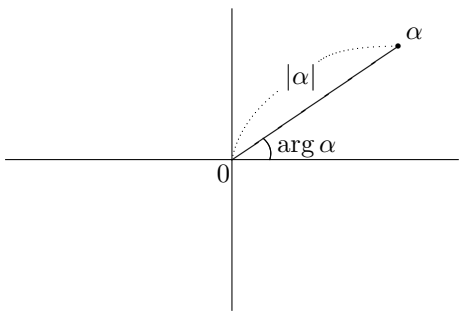
이면, 삼각함수의 가법정리에 의하여

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= rs[(\cos\theta\cos\tau - \sin\theta\sin\tau) + i(\sin\theta\cos\tau + \sin\tau\cos\theta)] \\ &= rs[\cos(\theta+\tau) + i\sin(\theta+\tau)]\end{aligned}$$

이 된다. 따라서, 다음 공식

$$\arg\alpha\beta = \arg\alpha + \arg\beta \tag{6}$$

을 얻는다.



만일 $\alpha = r(\cos\theta + \sin\theta)$ 이면 등식 (6) 을 반복하여 적용하여

$$\alpha^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

임을 알 수 있다. 그런데, 각도를 표시하는 방법은 유일한 것이 아니기 때문에 유의하여야 한다. 주어진 각도를 나타내는 실수 $\theta \in \mathbb{R}$ 를 잡았을 때, 이 수에 2π 의 배수를 더하면 모두 같은 각도이다. 따라서, 한 각도를 나타내는 방법은 무수히 많다. 여기서, $\arg\alpha$ 라 함은 묵시적으로 주어진 각도를 나타내는 모든 방법을 말한다. 이 가운데, 구간 $(pi, \pi]$ 안에 딱 하나가 있는데, 이 수를 $\operatorname{Arg}\alpha$ 라 쓰고 이를 복소수 α 의 **주편각**이라 부른다.

문제 1.1.3. 등식 (7) 을 귀납법으로 증명하여라.

복소수를 (1) 과 같이 직교좌표를 이용하여 표현하면 복소수의 더하기를 이해하는 데에 편리하다. 반면 복소수를 (5) 와 같이 극좌표를 이용하여 표현하면 복소수의 곱하기를 이해하는 데에 매우 편리하다.

문제 1.1.4. 다음 관계식을 만족하는 복소수 전체의 집합을 복소평면 위에 표시하여라.

(가) $|z-3| \le 4$ (나) $2 \le |z-i| \le 3$
(다) $|z-1| + |z+1| = 3$ (라) $|z-1| - |z+1| = 1$
(마) $|z-1| = \operatorname{Re} z$ (바) $\operatorname{Re} z^3 > 0$
(사) $0 \le \arg(z-i)^2 \le \pi$

보기 1. 복소계수 방정식

$$z^2 - 2iz - i - 2 = 0$$

을 풀어 보자. 실계수 방정식을 풀 때와 마찬가지 방법으로 완전제곱식으로 고치면

$$(z-i)^2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

이다. 여기서, 편각 $\dfrac{\pi}{4}$ 는 실제로

$$\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm, 2 \ldots$$

이다. 따라서, 등식 (7) 을 이용하여

$$z = i + 2^{1/4}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right), \qquad z = i + 2^{1/4}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$$

임을 알 수 있다. □

문제 1.1.5. 다음 방정식을 풀어라.
(가) $iz^2 + 5z + 3 + i = 0$ (나) $z^3 = i$

1.2. 일차함수와 이차함수

우리는 실함수 $y = f(x)$ 가 주어지면 이를 xy-평면 위에 그래프를 그림으로써 이 함수를 이해한다. 실제로 그래프를 그려 보면 x 가 변함에 따라서 y 가 어떻게 변하는지 일목요연하게 살펴볼 수 있다. 이제, 복소함수

$$w = f(z)$$

가 주어졌을 때, 이를 그래프로 그리려면 $\mathbb{C}^2$, 즉, 사차원 공간이 필요하므로 이는 불가능하다. 따라서, 두 복소평면, 즉 z-평면과 w-평면을 그리고, z 가 변함에 따라서 w 가 어떻게 변하는지 살펴보므로써 함수 $w = f(z)$ 를 이해하려고 한다. 이 경우 각 복소평면을 좌표평면으로 이해하기 위하여

$$z = x + iy \longleftrightarrow (x, y), \qquad w = u + iv \longleftrightarrow (u, v) \tag{8}$$

와 같이 대응시켜서 생각하기로 한다. 예를 들어서

$$w = z + \alpha$$

를 살펴보는데 $\alpha = a + ib$ 라 하면,

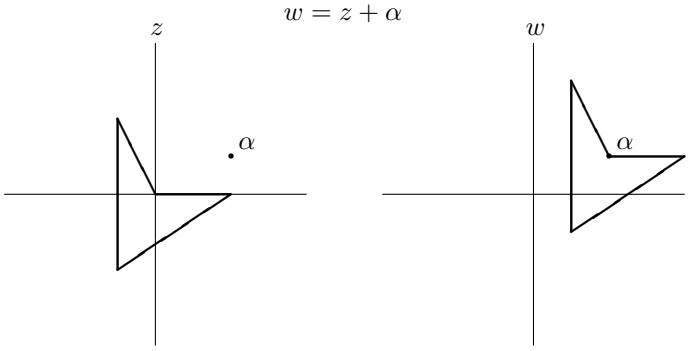
$$u = x + a, \qquad v = y + b$$

이므로, 복소함수 $z \mapsto z + \alpha$ 는 다음

$$(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$$

과 같은 **평행이동**으로 이해할 수 있다.

$w = z + \alpha$

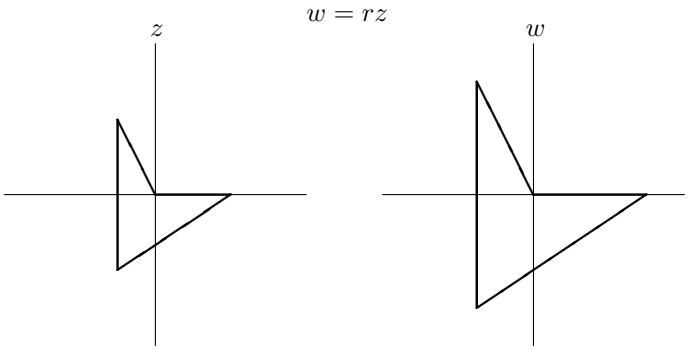


다음으로 복소함수 $w = \alpha z$ 를 살펴보자. 만일 $\alpha = r$ 이 실수이면 (단, $r > 0$), 이는

$$(x, y) \mapsto (rx, ry)$$

로서, $|w| = r|z|$ 이므로 주어진 점 z 의 절대값을 r 배만큼 **확대**시키는 변환이다.

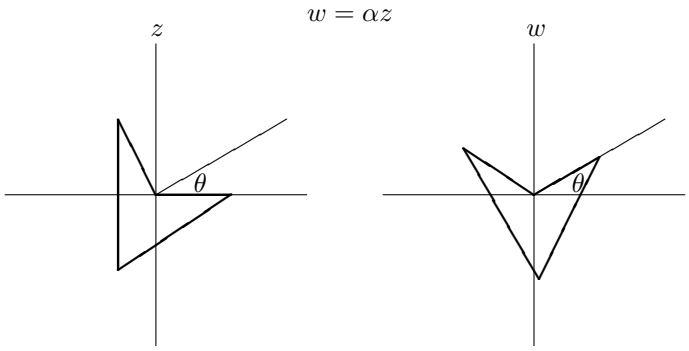
$w = rz$



만일 $|\alpha| = 1$ 이고 $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ 이면

$$(x, y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta)$$

로서, $\arg w = \arg z + \theta$ 이므로 주어진 점을 $\arg\alpha$ 만큼 **회전**시키는 변환이다.



임의의 일차함수는 $w = \alpha z + \beta$ 꼴이므로, 이를 복소평면 위의 변환으로 이해하면 평행이동, 확대, 회전 등 세 가지 변환의 합성으로 표시된다.

문제 1.2.1. 평행이동, 확대, 회전 등에서 두 가지 변환을 합성할 때, 그 순서를 바꾸어도 되는지 살펴보아라.

임의의 복소이차함수를 완전제곱으로 고치면 $w = \alpha(z - \beta)^2 + \gamma$ 의 꼴로 쓸 수 있으므로, 복소함수

$$w = z^2$$

가 어떠한 변환인지 이해하면 나머지는 이미 살펴본 평행이동, 확대, 회전 등으로 이해하면 된다. 이제, 같은 변환 $w = z^2$ 을 극좌표를 이용해서 이해해 보자. 만일 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 이면 $z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$ 이다. 즉, 이 변환에 의해서 절대값은 제곱으로 변하고 편각은 두 배로 변한다. 따라서, 이 변환을 직관적으로 이해하면 다음과 같다:

- 절대값이 제곱으로 변하도록 z-평면에 있는 점들을 단위원 안쪽에 있는 점들은 적당히 원점에 가까이 이동시키고, 단위원 밖에 있는 것은 적당히 원점에서 멀어지도록 이동시킨다.
- 양의 실수축을 따라 z-평면을 자르고 편각이 두 배가 되도록 평면을 변형하여, 즉 원점을 중심으로 한 동심원의 방향으로 평면을 두 배 늘려서, 아까 잘렸던 부분이 한 바퀴 돌아 다시 일치되도록 붙인다.
- 이렇게 z-평면을 변형하면 원점을 제외한 부분이 두 겹이 되는데, 이것을 w-평면 위에 양의 실수축이 일치하도록 놓고서 z-평면에 있는 점들을 그 바로 아래에 있는 w-평면의 점들에 대응시킨다.

물론, 변환 $w = z^3$, $w = z^4$ 등도 비슷한 관점에서 이해할 수 있다.

대응관계 (8) 에 의한 관계식 $u + iv = (x + iy)^2$ 은

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy \tag{9}$$

로 바뀌게 된다. 이제부터 변환

$$(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy) \tag{10}$$

을 보다 자세히 이해하기 위하여 xy-평면 위의 여러 가지 도형의 예를 들고, 이 도형이 변환 (10) 에 의하여 uv-평면 위에서 어떤 도형이 되는지 살펴보기로 한다. 시작하기 전에 유의할 사항은 $z^2 = (-z)^2$ 이므로 원점을 중심으로 대칭인 두 점은 같은 점으로 변환된다는 것이다.

먼저, 원점을 지나는 직선 $y = mx$ 가 어떻게 변환되는지 알아 보자. 관계식 (9) 에서

$$u = x^2 - m^2x^2, \qquad v = 2mx^2$$

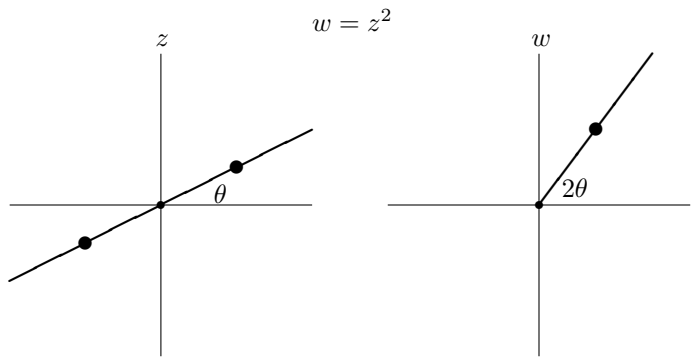
이므로 $\dfrac{v}{u} = \dfrac{2m}{1-m^2}$ 를 얻는다 (단, $m \neq \pm 1$). 따라서, 원점을 지나는 직선 $y = mx$ 는 (단, $m \neq \pm 1$) 반직선

$$v = \frac{2m}{1-m^2}u \qquad \begin{cases} u \geq 0, & 1-m^2 > 0 \text{ 일 때}, \\ u \leq 0, & 1-m^2 < 0 \text{ 일 때} \end{cases}$$

으로 변환된다. 직선 $y = x$ 와 $y = -x$ 는 변환 (10) 에 의하여 각각 반직선

$$u = 0, \quad v \geq 0 \qquad \text{과} \qquad u = 0, \quad v \leq 0$$

으로 변환된다.



이제, 실수축에 평행하고 원점을 지나지 않는 직선 $y = c$ 는 (단, $c \neq 0$) 변환 (10) 에 의하여

$$u = x^2 - c^2, \qquad v = 2xc$$

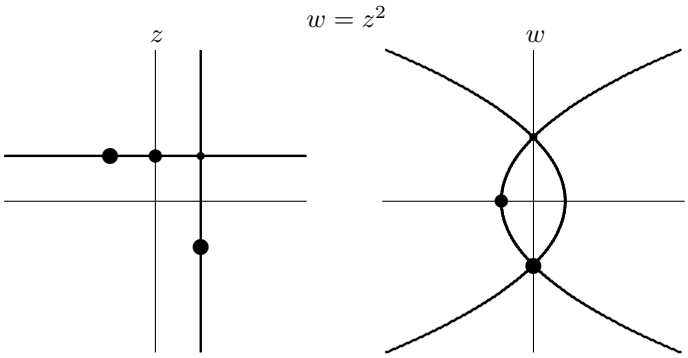
가 되므로, 포물선

$$u = \frac{1}{4c^2}v^2 - c^2$$

을 얻는다. 마찬가지로 직선 $x = c$ 역시 (단, $c \neq 0$) 포물선

$$u = -\frac{1}{4c^2}v^2 + c^2$$

로 변환됨을 바로 확인할 수 있다.



문제 1.2.2. 다음 도형들이 변환 (10) 에 의하여 어떻게 움직이는지 살펴보아라.
(가) $\{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0\}$
(나) $\{z : 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\}$
(다) $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$
(라) $\{z : |z| = 1\}$

보기 1. 이차곡선은 변환 (10) 에 의하여 사차곡선으로 변환되므로 원이 어떻게 움직이는지 정확하게 설명하기는 곤란하지만 그 대략의 개형은 짐작할 수 있다. 예를 들어서, 원

$$|z - i| = \frac{1}{2}$$

을 생각하여 보자. 이 원은

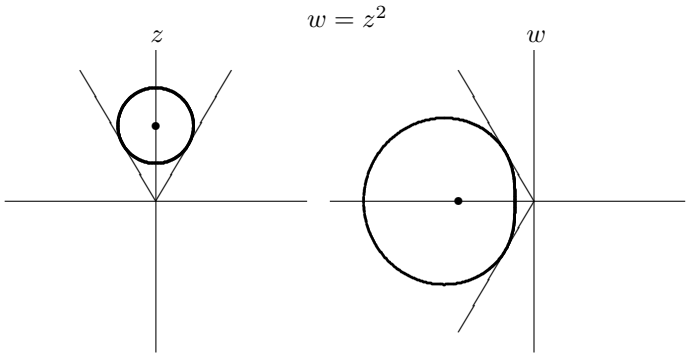
$$\left\{z : \frac{1}{3}\pi \leq \arg z \leq \frac{2}{3}\pi,\ \frac{1}{2} \leq |z| \leq \frac{3}{2}\right\}$$

안에 들어 있으므로, 그 상은

$$\left\{w : \frac{2}{3}\pi \leq \arg w \leq \frac{4}{3}\pi,\ \frac{1}{4} \leq |z| \leq \frac{9}{4}\right\}$$

안에 들어가야 한다. □

문제 1.2.3. 원 $|z - i| = \frac{1}{2}$ 를 (10) 에 의하여 변환시켰을 때 생기는 사차곡선의 방정식을 구하여라.



1.3. 일차분수함수

이 절에서는 다음

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \tag{11}$$

과 같이 주어지는 일차분수함수를 공부한다. 여기서 $ad - bc = 0$ 이면 (11) 은 상수함수가 되므로 앞으로 항상 $ad - bc \neq 0$ 이라 가정한다. 먼저 $c = 0$ 이면 바로 일차식이 되므로, 앞에서 알아본 바와 같이 평행이동, 회전, 확대 변환의 합성이다. 이제, $c \neq 0$ 라 가정하고, 실함수의 경우와 마찬가지로 다음

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}$$

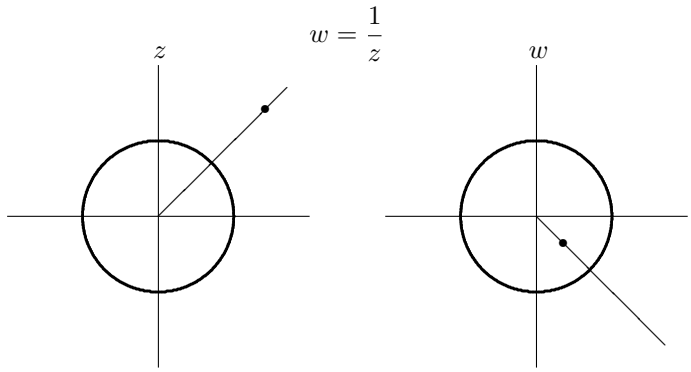
과 같이 고칠 수 있다. 따라서, 일차분수함수 (11) 에 의한 변환은 다음에 의한 변환

$$z \mapsto \frac{1}{z} \tag{12}$$

과 평행이동변환, 회전변환, 확대변환의 합성이다. 그런데

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}, \qquad \arg\frac{1}{z} = -\arg z$$

이므로, 함수 (12) 가 어떤 변환을 나타내는지 바로 알 수 있다.



평행이동변환, 회전변환, 확대변환은 평면 위의 원을 원으로 보내고, 직선을 직선으로 보낸다. 이제, 변환 (12) 가 원과 직선을 어떤 도형으로 보내는지 알아보자. 이를 위하여 $z = x + iy$, $w = u + iv$ 로 표시하면

$$u + iv = \frac{1}{x + iy}$$

로부터, (x, y) 와 (u, v) 의 관계식

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \qquad y = \frac{-v}{u^2 + v^2} \tag{13}$$

을 얻는다. 이로부터, xy-평면 위의 방정식 (단, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$)

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0 \tag{14}$$

이 다음 방정식

$$\delta(u^2 + v^2) + \beta u - \gamma v + \alpha = 0 \tag{15}$$

으로 변환됨을 바로 확인할 수 있다. 방정식 (14) 는 $\alpha = 0$ 일 때 직선을 나타내고, $\alpha \neq 0$ 일 때 원을 나타낸다. 또한, $\delta = 0$ 인지 여부에 의하여 원점을 지나는지 여부가 결정된다. 따라서, 변환 (12) 는 원 혹은 직선을 다시 원 혹은 직선으로 보내는 변환이고, 일차분수함수에 의하여 얻어지는 변환 역시 마찬가지이다.

문제 1.3.1. 평행이동변환, 회전변환, 확대변환이 평면 위의 원을 원으로 보내고, 평면 위의 직선을 직선으로 보냄을 증명하여라.

문제 1.3.2. 관계식 (13), (14) 로부터 (15) 를 유도하여라.

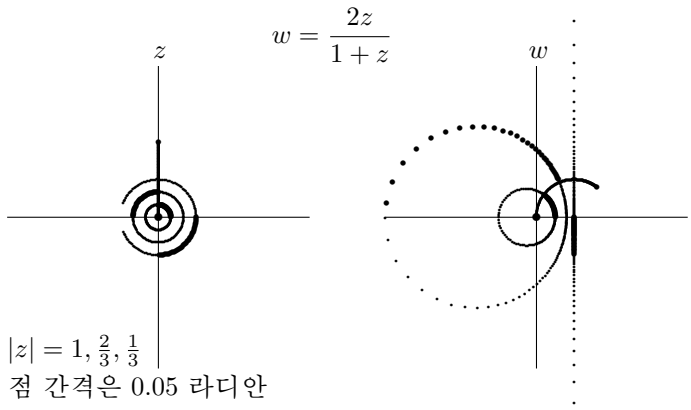
문제 1.3.3. 다음 도형들이 변환 (12) 에 의하여 어떻게 움직이는지 살펴보아라.
(가) $\{(x, y) : x > 0,\ y > 0\}$
(나) $\{z : 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$
(다) $\{(x, y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$
(라) $\{z : |z| = 1\}$

평면 위의 세 점이 주어지면 이 세 점을 지나는 직선 혹은 원이 유일하게 결정된다. 이러한 성질은 일차분수함수에 의하여 원의 내부 혹은 반평면이 어떻게 변환되는지 살펴보는 데에 매우 유용하다.

보기 1. 단위원판 $\{z : |z| \leq 1\}$ 이 변환

$$w = \frac{2z}{1+z}$$

에 의하여 어떻게 보내지는가 살펴보자. 만일 단위원 위에 있는 점 $z = 1, i, -i$ 를 대입하면 $w = 1, 1+i, 1-i$ 를 얻는데, 이 세 점은 직선 $\operatorname{Re} w = 1$ 를 결정한다. 따라서, 단위원은 직선 $\operatorname{Re} w = 1$ 로 보내어짐을 알 수 있다. 단위원의 내부가 직선의 어느 쪽으로 가는지 알려면 단위원 내부의 점, 예를 들어 $z = 0$ 을 대입해보면 된다. 점 $z = 0$ 이 점 $w = 0$ 로 가므로 단위원판은 직선 $\operatorname{Re} w = 1$ 의 왼쪽 부분으로 변환됨을 알 수 있다. □



일차분수함수 (11) 에서 계수 중 어느 하나는 1 이라 가정해도 되므로, 일차분수함수는 사실상 계수 세 개에 의하여 결정된다. 따라서, 세 점과 이 세 점의 상이 다음

$$z_1 \mapsto w_1, \qquad z_2 \mapsto w_2, \qquad z_3 \mapsto w_3 \tag{16}$$

과 같이 주어지면 이에 해당하는 일차분수함수가 결정된다. 실제로 등식 (11) 에서 (z, w) 에

$$(z_1, w_1), \qquad (z_2, w_2), \qquad (z_3, w_3)$$

을 대입하여 a, b, c, d 에 관한 방정식을 풀면 된다. 이제, 좀 더 간단한 방법을 알아보자. 먼저, 각 $i = 1, 2, 3$ 에 대하여 $w_i = \dfrac{az_i + b}{cz_i + d}$ 가 성립하므로,

$$w - w_i = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{az_i + b}{cz_i + d} = \frac{(ad - bc)(z - z_i)}{(cz + d)(cz_i + d)}$$

가 성립한다. 따라서,

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} = \frac{cz_3 + d}{cz_1 + d} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_3}, \qquad \frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3} = \frac{cz_3 + d}{cz_1 + d} \cdot \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$$

를 얻는다. 여기서, 두번째 식은 첫째 식에서 $w = w_2$, $z = z_2$ 를 대입한 것이다. 위 두식을 나누어 c, d 를 소거하면 구하는 방정식

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \tag{17}$$

을 얻는다.

보기 2. 점 $z = 1, i, -i$ 를 각각 $w = 1, 1+i, 1-i$ 로 보내는 일차분수함수를 구하면 (17) 에 의하여

$$\frac{(w-1)((1+i)-(1-i))}{(w-(1-i))((1+i)-1)} = \frac{(z-1)(i-(-i))}{(z-(-i))(i-1)}$$

인데, 이를 정리하면 $zw - 2z + w = 0$, 혹은 $w = \dfrac{2z}{1+z}$ 를 얻는다. □

변환 (12) 를 다시 생각해 보자. 이 함수는 집합 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 사이에 정의된 전단사함수이다. 만일 복소평면 $\mathbb{C}$ 에 무한대를 나타내는 점 ∞ 를 더하여 집합 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 를 생각하면, 변환 (12) 는 0 을 ∞ 로 보내고, ∞ 를 0 로 보내므로 변환 (12) 를 집합 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 사이에 정의된 전단사함수로 이해하는 것이 자연스럽다. 평행이동변환, 회전변환, 확대변환 등도 ∞ 를 ∞ 로 보낸다고 이해하면 모두 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 사이에 정의된 전단사함수이므로, 이제부터 임의의 일차분수함수는 집합 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 사이에 정의된 전단사함수로 이해한다. 물론 (11) 에 의하여 정의된 일차분수함수는 (단, $c \neq 0$)

$$-\frac{d}{c} \mapsto \infty, \qquad \infty \mapsto \frac{a}{c}$$

로 이해한다. 세 점과 그 점들의 상이 (16) 과 같이 주어지는 일차분수함수를 찾는 경우, 이들 중 어느 하나가 ∞ 라도 상관없다. 이 경우 (17) 에서 해당 복소수를 ∞ 로 보내면 된다. 예를 들어서 $z_1 = \infty$ 라면 구하는 일차함수는 (17) 의 우변에 $\lim\limits_{z_1 \to \infty}$ 를 취하여

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{z_2-z_3}{z-z_3}$$

이 된다.

보기 3. 일차분수함수 $w = \dfrac{2z}{1+z}$ 는 세 점 $1, 0, -1$ 을 각각 $1, 0, \infty$ 로 보낸다. 역으로 세 점 $1, 0, -1$ 을 각각 $1, 0, \infty$ 로 보내는 일차분수함수를 찾으면, (17) 에 의하여

$$\lim_{w_3 \to \infty} \frac{(w-1)(0-w_3)}{(w-w_3)(0-1)} = \frac{(z-1)(0-(-1))}{(z-(-1))(0-1)}$$

에서 $w = \dfrac{2z}{1+z}$ 를 얻는다. □

문제 1.3.4. 다음에 주어진 세 점을 각각 주어진 세 점으로 보내는 일차분수함수를 찾아라.

(가) $0, i, -i \mapsto i, -i, 0$ (나) $1, i, \infty \mapsto 0, 1, \infty$
(다) $0, 1, \infty \mapsto 0, \infty, 1$

문제 1.3.5. 변환 $z \mapsto \dfrac{1-z}{1+z}$ 에 의하여 다음 집합에 어떻게 옮겨지는지 살펴보아라.

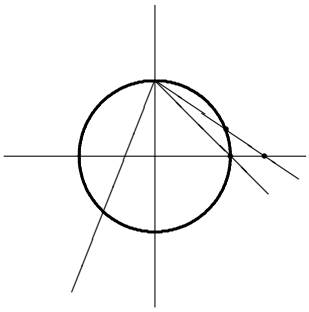
(가) $\{z : |z| \le 1\}$ (나) $\{z : \operatorname{Re} z \ge 0\}$
(다) $\{z : \operatorname{Im} z \ge 0\}$ (라) $\{z : 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{4}\}$

이제, 일차분수함수의 정의역 역할을 하는 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 을 기하학적으로 해석해 보자. 먼저 집합 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 이 단위원과 일대일대응이 됨을 바로 확인하자. 실제로 실수축 위에 있는 한 점 $(a, 0)$ 과 점 $(0, 1)$ 을 지나는 직선은 단위원 위의 한 점 (x, y) 와 만난다. 이 때, a 와 (x, y) 를 대응시키면 된다. 물론, ∞ 는 단위원 위의 점 $(0, 1)$ 과 대응된다.

문제 1.3.6. 실수 a 와 단위원 위의 점 (x, y) 사이의 관계식을 구하여라.

이제, 집합 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 도 꼭 같은 방법으로 단위구면과 일대일대응이 된다. 먼저 삼차원 직교좌표공간을 생각하고 단위구면 위의 한 점 (x, y, h) 와 xy-평면 위의 점 $(a, b, 0)$, 그리고 점 $(0, 0, 1)$ 이 일직선에 오도록 하면 (x, y, h) 와 $(a, b, 0)$ 사이에 일대일 대응을 얻을 수 있다. 구체적으로 관계식을 구해 보자. 먼저

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{h-1}{-1}$$



이 성립한다. 이 값을 s 라 두면

$$1 = x^2 + y^2 + h^2 = (as)^2 + (bs)^2 + (1-s)^2$$

이고, 따라서 $s = \dfrac{2}{a^2+b^2+1}$ 임을 알 수 있다. 따라서, 복소수 $z = a+ib$ 는 단위구면 위의 점

$$\left(\frac{2a}{a^2+b^2+1}, \frac{2b}{a^2+b^2+1}, \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}\right)$$
$$= \left(\frac{2\mathrm{Re}\, z}{|z|^2+1}, \frac{2\mathrm{Im}\, z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

에 대응된다. 여기서 단위구면 위의 점 $(0,0,1)$ 은 이러한 방식으로 얻을 수 없고, ∞ 에 대응된다. 이와 같은 일대일대응에 의해서 단위구면을 집합 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 으로 볼 수 있는데, 이런 관점에서 본 단위구면을 **리만**(2)**구면**이라고 부른다.

끝으로, 중요한 일차분수함수의 예를 한 가지 살펴보고 이 장을 마친다. 복소수 $|\alpha| < 1$ 을 고정하고

$$\phi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$$

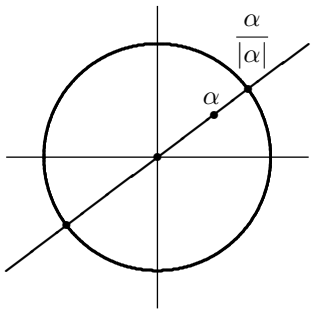
(2) Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826∼1866), 독일 수학자. Göttingen 과 베를린에서 공부한 후 Göttingen 에서 활동하였다.

라 정의하자. 우선

$$\phi_\alpha\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right) = \frac{\alpha}{|\alpha|}, \qquad \phi_\alpha\left(-\frac{\alpha}{|\alpha|}\right) = -\frac{\alpha}{|\alpha|}, \qquad \phi_\alpha(1) = \frac{1-\alpha}{1-\overline{\alpha}}$$

인데, $\pm\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$, $\dfrac{1-\alpha}{1-\overline{\alpha}}$ 등은 모두 단위원 위의 점이므로 변환 ϕ_α 는 단위원을 단위원으로 보낸다. 그런데 ϕ_α 는 단위원 내부의 점 α 를 다시 단위원 내부의 점 0 로 보내므로, ϕ_α 는 단위원판 전체를 단위원판 전체로 보낸다. 이 변환 ϕ_α 는 **뫼비우스**(3)**변환**이라 불리운다.

문제 1.3.7. 방정식 $\phi_\alpha(z) = z$ 를 만족하는 복소수는 $z = \pm\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$ 뿐임을 보여라.



1.4. 연습문제

1.4.1. 변환 $w = (1+i)z + 2$ 에 의한 다음의 상을 구하여라.

(가) $y = 2x$ (나) $y = 3x + 2$
(다) $|z| = 3$ (라) $|z - 1| = 2$

1.4.2. 변환 $w = (1-i)z + (2-i)$ 에 의한 영역 $0 < \operatorname{Re} z < 2,\ \operatorname{Im} z > 1$ 의 상을 구하여라.

1.4.3. 두 점 $3+i$ 와 $1-i$ 를 각각 $5i$ 와 $2+4i$ 로 보내는 일차 변환을 구하여라.

(3) August Ferdinand Möbius (1790∼1868), 독일 수학자, 천문학자. Göttingen 에서 공부하고 Leibzig 에서 활동하였는데, 뫼비우스띠로 유명하다.

1.4.4. 다음 변환에 의한 반평면 $\operatorname{Re} z > 0$ 의 상을 구하여라.

(가) $w = 2iz - i$ (나) $w = \dfrac{i}{z} - 1$

1.4.5. 다음 변환에 의한 직선 $y = 2x + 1$ 의 상을 구하여라.

(가) $w = \dfrac{1}{z}$ (나) $w = \dfrac{i}{z}$

1.4.6. 다음에 주어진 세 점을 각각 주어진 세 점으로 보내는 일차분수함수를 찾아라.

(가) $0, i, -i \mapsto 1, -1, 0$ (나) $1, i, \infty \mapsto i, -1, 0$
(다) $2, -1, -i \mapsto \infty, -1, -i$ (라) $2, \infty, 3 \mapsto \infty, -1, 1$

1.4.7. 변환 $w = \dfrac{iz}{z-1}$ 에 의한 다음의 상을 구하여라.

(가) $|z| \le 1$ (나) $\operatorname{Re} z \ge 0$ (다) $\operatorname{Im} z \ge 0$

1.4.8. 변환 $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ 에 의한 다음의 상을 구하여라.

(가) $\operatorname{Im} z > 1$ (나) $\operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z$

1.4.9. 복소수 $\alpha \ne 1$ 에 대하여 등식

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}, \qquad \alpha \ne 1$$

이 성립함을 보여라. 이를 이용하여 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta$ 의 값을 구하여라.

1.4.10. 다음을 증명하여라.

(가) 만일 $|\alpha| < 1$ 이면 $|\operatorname{Im}(i - \overline{\alpha} + \alpha^2)| < 3$ 이 성립한다.

(나) 만일 $|\alpha| = 2$ 이면 $\left|\dfrac{1}{\alpha^4 - 4\alpha^2 + 3}\right| \le \dfrac{1}{3}$ 이 성립한다.

(다) 만일 $|\alpha| < 1$ 이면 $\left|\operatorname{Arg} \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right| < \dfrac{\pi}{2}$ 이 성립한다.

1.4.11. 다음을 증명하여라.

(가) 만일 $|\alpha| < 1,\ |\beta| < 1$ 이면 $\left|\dfrac{\alpha - \beta}{1 - \overline{\alpha}\beta}\right| < 1$ 이 성립한다.

(나) 만일 $|\alpha| = 1$ 혹은 $|\beta| = 1$ (단, $\alpha \ne \beta$) 이면 $\left|\dfrac{\alpha - \beta}{1 - \overline{\alpha}\beta}\right| = 1$ 이 성립한다.

1.4.12. 다음 방정식

$$az^2 + 2bz\overline{z} + c\overline{z}^2 = d$$

이 복소평면의 원, 타원, 포물선, 쌍곡선을 나타낼 실수 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 의 조건을 각각 구하여라.

1.4.13. 다음 방정식

$$(\alpha + \overline{\alpha})z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + (\gamma + \overline{\gamma}) = 0$$

이 복소평면 위의 원을 나타낼 복소수 α, β, γ 의 조건을 구하고, 이 때 원의 중심과 반지름을 구하여라.

1.4.14. 서로 다른 세 복소수 α, β, γ 를 꼭지점으로 하는 삼각형이 정삼각형일 필요충분조건이

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0$$

임을 증명하라.

1.4.15. 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대하여 $\phi_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 라 정의하면

$$\phi_A \circ \phi_B = \phi_{AB}$$

가 성립함을 보여라. 여기서 AB 는 두 행렬 A 와 B 의 곱이다.

1.4.16.

(가) 일차분수함수 가운데 반평면 $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ 을 단위원판 $\{z : |z| \leq 1\}$ 으로 보내는 것을 모두 찾아라.

(나) 일차분수함수 가운데 반평면 $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ 을 반평면 $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ 으로 보내는 것을 모두 찾아라.

(다) 단위원판 $\{z : |z| \leq 1\}$ 을 단위원판 $\{z : |z| \leq 1\}$ 으로 보내는 일차분수함수는 뫼비우스변환과 회전변환의 합성임을 보여라.

1.4.17. 복소수 α 가 고정되어 있을 때 (단, $0 < |\alpha| < 1$), 평면 위의 직선 L 들 가운데 $\phi_\alpha(L) = L$ 인 것들을 모두 찾아라.