제 2 장 복소수열과 멱급수

다항식과 분수식 만으로는 여러 가지 자연 현상이나 사회 현상을 설명하는 데에 부족한 경우가 많다. 이 경우 삼각함수, 지수함수 등 초월함수가 중요한 역할을 하는데, 이 장에서는 이러한 초월함수들를 어떻게 복소함수로 이해하는지 공부한다. 가장 자연스러운 방법은 대학 미적분에서 배우게 마련인 여러 가지 초월함수의 멱급수전개를 이용하는 것인데, 이를 위하여 복소급수의 수렴, 복소 멱급수의 수렴과 그 초보적인 성질들을 먼저 공부한다.

2.1. 복소급수의 수렴

복소수열 $\langle \alpha_n : n = 1, 2, \rangle$ 과 복소수 α 에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha_n - \alpha| = 0$$

이 성립할 때, $\langle \alpha_n \rangle$ 이 α 로 **수렴**한다고 말하고

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha, \qquad \text{또는} \quad \alpha_n \to \alpha$$

로 쓴다. 만일 $\alpha_n = a_n + ib_n$ 이고 $\alpha = a + ib$ 이면

$$|a_n - a| \le |\alpha_n - \alpha| \le |a_n - a| + |b_n - b|$$

$$|b_n - b| \le |\alpha_n - \alpha| \le |a_n - a| + |b_n - b|$$

이므로, 다음

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \iff \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}\alpha_n = \operatorname{Re}\alpha,\ \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}\alpha_n = \operatorname{Im}\alpha$$

이 성립함을 알 수 있다. 이 경우,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \left(\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}\alpha_n\right) + i\left(\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}\alpha_n\right)$$

와 같이 쓸 수 있다.

문제 2.1.1. 만일 $\alpha_n \to \alpha$ 이면 $|\alpha_n| \to |\alpha|$ 임을 보여라.

복소수열 $\langle \alpha_n \rangle$ 에 대하여

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

라 정의하자. 수열 $\langle \sigma_n \rangle$ 이 σ 로 수렴할 때, **복소급수** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 혹은 $\sum_n \alpha_n$ 이 σ 로 **수렴**한다고 말하고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sigma$ 라 쓴다. 즉,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

이다. 복소급수 $\sum_n \alpha_n$ 이 수렴하지 않으면 **발산**한다고 말한다.

정리 2.1.1. 복소수열 $\langle \alpha_n \rangle$ 에 대하여 다음은 동치이다.

(가) 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 이 수렴한다.

(나) 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}\alpha_n$ 과 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}\alpha_n$ 이 수렴한다.

만일 위 명제가 성립하면 다음 등식

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}\alpha_n\right) + i\left(\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}\alpha_n\right)$$

이 성립한다.

문제 2.1.2. 정리 2.1.1 을 증명하여라.

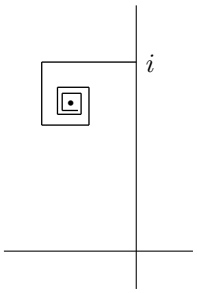
보기 1. 급수 $\sum_n \frac{i^n}{n}$ 의 수렴여부를 살피기 위하여 각 항의 실수부와 허수부를 생각하면, 두 급수

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\cdots, \qquad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots$$

의 수렴여부를 따져야 한다. 두 급수 모두 교대급수정리에 의하여 수렴하므로 $\sum_n \frac{i^n}{n}$ 는 수렴한다. 실제로

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2, \qquad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4} \tag{1}$$

이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}=-\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}$ 임을 알 수 있다.(1) □



다음은 여러 가지 수열 및 급수의 수렴여부를 판별하는 핵심 내용인데, 증명없이 받아들이기로 한다.(2)

비교판정법: 각 자연수 $n=1,2,\ldots$ 에 대하여 $0\le a_n\le b_n$ 이 성립한다 가정하자. 이 때, $\sum_n b_n$ 이 수렴하면 $\sum_n a_n$ 도 수렴한다.

(1) 교대급수정리와 등식 (1) 에 관한 사항은 참고문헌 [김홍종, *미적분학 1*, 서울대학교 출판부, 1999] 를 참고하라.

(2) 이 성질은 사실 실수의 완비성공리와 논리적으로 동치이다. 참고: [김성기·김도한·계승혁, *해석개론, 개정판*, 서울대학교 출판부, 1995, 2002]

임의의 실수 $a \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$a^+ = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ 0 & a < 0 \end{cases} \qquad a^- = \begin{cases} 0, & a \geq 0, \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

라 정의하자. 그러면

$$a = a^+ - a^-, \qquad |a| = a^+ + a^-$$

임을 알 수 있다.

이제 복소수열 $\langle \alpha_n \rangle$ 에 대하여 $\sum_n |\alpha_n|$ 이 수렴한다고 가정하자. 이와 같이 $\sum_n |\alpha_n|$ 이 수렴할 때, 복소급수 $\sum_n \alpha_n$ 이 **절대수렴**한다고 말한다. 그러면

$$(\operatorname{Re} \alpha_n)^+ \leq |\operatorname{Re} \alpha_n| \leq |\alpha_n|, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

이므로 $\sum_n (\operatorname{Re} \alpha_n)^+$ 이 수렴한다. 마찬가지 방법으로 $\sum_n (\operatorname{Re} \alpha_n)^-$ 도 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re} \alpha_n)^+ - \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re} \alpha_n)^-$$

도 수렴한다. 같은 방법으로 $\sum_n \operatorname{Im} \alpha_n$ 이 수렴하므로, 정리 2.1.1 에 의하여 다음을 얻는다.

정리 2.1.2. 절대수렴하는 복소급수는 수렴한다.

수렴하지만 절대수렴하지 않으면 **조건수렴**한다고 말한다.

보기 2. 급수 $\sum_n \dfrac{1}{n}$ 은 발산하지만 $\sum_n (-1)^n \dfrac{1}{n}$ 은 수렴한다. 따라서, $\sum_n (-1)^n \dfrac{1}{n}$ 은 조건수렴하는 급수이다. 보기 1 에 나오는 $\sum_n \dfrac{i^n}{n}$ 도 물론 조건수렴한다. □

이제, 비교판정법과 등비급수를 이용하여 주어진 복소수열이 절대수렴할 조건을 찾아 보자.

도움정리 2.1.3. 양의 실수 $r < 1$ 에 대하여

$$|\alpha_n|^{1/n} \le r, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

이 성립하면 $\sum_n \alpha_n$ 은 절대수렴한다.

증명: 각 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $|\alpha_n| \le r^n$ 인데, $\sum_n r^n$ 이 수렴하므로 $\sum_n |\alpha_n|$ 이 수렴한다. □

급수의 수렴을 논하는 경우 유한개의 항은 그 값이 변하더라도 관계없다. 따라서, 도움정리 2.1.3 에서 부등식 $|\alpha_n|^{1/n} \le r$ 이 모든 자연수 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 성립하지 않더라도, 유한개를 제외한 임의의 n 에 대하여 성립하면 같은 결론을 내릴 수 있다. 수열 $\langle |\alpha_n|^{1/n} \rangle$ 이 수렴하는 경우, 도움정리 2.1.3 이 쉽게 적용된다. 먼저 실수열 $\langle a_n \rangle$ 이 $a \in \mathbb{R}$ 로 수렴한다는 것이 무슨 뜻인가 살펴보자. 이는 a 를 중심으로 아무리 작은 구간 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 을 잡아도 첫 부분 유한개를 제외한 모든 a_n 이 모두 이 구간에 들어가야 한다는 뜻이다. 이는 임의의 양수 $\epsilon > 0$ 에 대하여 다음 성질

$$n \ge N \implies |a_n - a| < \epsilon$$

이 성립하는 자연수 N 을 잡을 수 있다는 말과 마찬가지이다.

보기 3. 수열 $\left\langle \dfrac{1}{n} \right\rangle$ 을 생각하여 보자. 구간 $(-\epsilon, \epsilon)$ 을 잡았을 때, $n > \dfrac{1}{\epsilon}$ 이면 $\dfrac{1}{n}$ 은 $(-\epsilon, \epsilon)$ 에 들어간다. 따라서 $\lim_n \dfrac{1}{n} = 0$ 이다. □

정리 2.1.4. (멱근판정법) 복소급수 $\sum_n \alpha_n$ 에 대하여, $\lim_n |\alpha_n|^{1/n} = r$ 이라 가정하자. 만일 $r < 1$ 이면 $\sum_n \alpha_n$ 은 절대수렴한다. 또한, $r > 1$ 이면 $\sum_n \alpha_n$ 은 발산한다.

증명: 먼저 $r < 1$ 인 경우, $r < s < 1$ 인 $s \in \mathbb{R}$ 를 잡자. 그러면 유한개를 제외한 모든 자연수 n 에 대하여 $|\alpha_n|^{1/n} < s$ 이고, 도움정리 2.1.3 을

적용할 수 있다. 또한, $r > 1$ 인 경우도 마찬가지로 $r > s > 1$ 인 $s \in \mathbb{R}$ 을 잡으면 유한개를 제외한 임의의 자연수 n 에 대하여 $|\alpha_n|^{1/n} > s$ 이고, 따라서 $|\alpha_n| > s^n > 1$ 이므로 $\sum_n \alpha_n$ 은 발산한다.(3) □

보기 4. 급수 $\sum_n \dfrac{a^n}{n^r}$ (단, $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$ 은 상수) 의 수렴 여부를 살펴보려면

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a^n}{n^r}\right|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{(n^{1/n})^r}$$

의 극한값을 따져야 한다. 그런데 $\lim_n n^{1/n} = 1$ 이므로, 급수 $\sum_n \dfrac{a^n}{n^r}$ 는 $|a| < 1$ 일 때 수렴하고, $|a| > 1$ 일 때 발산한다. 만일 $|a| = 1$ 이면 멱근판정법을 이용할 수 없으므로 다른 방법을 찾아야 하고, r 의 값에 따라서 결과가 달라지게 된다. 예를 들어 $\sum_n \dfrac{1}{n}$ 은 발산하지만 $\sum_n \dfrac{1}{n^2}$ 은 수렴한다. □

정리 2.1.5. (비율판정법) 복소급수 $\sum_n \alpha_n$ 에 대하여, $\lim_n \left|\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = r$ 이라 가정하자. 만일 $r < 1$ 이면 $\sum_n \alpha_n$ 은 절대수렴한다. 또한, $r > 1$ 이면 $\sum_n \alpha_n$ 은 발산한다.

증명: 먼저 $r < 1$ 인 경우, $r < s < 1$ 인 $s \in \mathbb{R}$ 를 잡는다. 그러면, 적당한 자연수 N 대하여 다음

$$n \geq N \implies \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| < s$$

이 성립한다. 따라서, 임의의 $k = 1, 2, \ldots$ 에 대하여

$$|\alpha_{N+k}| < s|\alpha_{N+k-1}| < s^2|\alpha_{N+k-2}| < \cdots < s^k|\alpha_N|$$

이 성립한다. 그런데, $\sum_k s^k|\alpha_N|$ 이 수렴하므로, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{N+k}|$ 이 수렴하고, 이는 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 이 수렴한다는 말과 마찬가지이다. 나머지 부분의 증명은 연습문제로 남긴다. □

(3) 급수 $\sum_n a_n$ 이 수렴하면 $\lim_n a_n = 0$ 이다.

문제 2.1.3. 정리 2.1.5 의 증명을 마무리하여라.

보기 5. 다음 급수

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^6}+\cdots$$

를 생각하여 보자. 수열 $|a_n|^{1/n}$ 과 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 를 써 보면 각각

$$\begin{matrix} 2^{-1/1}, & 2^{-0/2}, & 2^{-3/3}, & 2^{-2/4}, & 2^{-5/5}, & 2^{-4/6}, & 2^{-7/7}, & 2^{-6/8}, \cdots \\ 2^{1-0}, & 2^{0-3}, & 2^{3-2}, & 2^{2-5}, & 2^{5-4}, & 2^{4-7}, & 2^{7-6}, & 2^{6-9}, \cdots \end{matrix}$$

이다. 따라서, $\lim_n |a_n|^{1/n} = \frac{1}{2}$ 이므로 멱근판정법에 의하여 이 급수는 수렴한다. 그러나, 수열 $\left\langle \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \right\rangle$ 은 수렴하지 않으므로 비율판정법을 적용할 수 없다.(4) □

문제 2.1.4. 다음 급수의 수렴 여부를 판정하여라.

(가) $\sum_n \frac{n!}{n^n}$ (나) $\sum_n \frac{2^n n!}{n^n}$ (다) $\sum_n \frac{2^n}{n!}$

2.2. 멱급수와 수렴반경

복소수열 $\langle a_n : n = 0, 1, 2, \ldots \rangle$ 에 대하여 다음

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{2}$$

과 같이 정의된 급수를 **멱급수**라 한다. 이 멱급수가 절대수렴수렴하고 $|w| \le |z|$ 이면 비교판정법에 의하여 $\sum_n a_n w^n$ 도 절대수렴한다. 따라

(4) 실제로, $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$ 이면 $\lim_n |a_n|^{1/n} = r$ 임이 잘 알려져 있다. 따라서, 비율판정법이 적용되는 급수에는 멱근판정법이 반드시 적용된다. 물론, 경우에 따라서 어느 쪽 극한값을 계산하기 편한 지 잘 판단해야 한다.

서 집합

$$\left\{ |z| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ 이 절대수렴한다} \right\}$$

은 다음

$$\{0\}, \qquad [0, R), \qquad [0, R], \qquad [0, \infty)$$

중 하나의 꼴이다. 처음과 마지막 경우, 멱급수 (2) 의 **수렴반경**을 각각 $0, \infty$ 라 한다. 또한, 두번째나 세번째의 경우 수렴반경이 R 이라 한다. 각각의 경우, 다음 집합

$$\{0\}, \qquad \{z : |z| < R\}, \qquad \{z : |z| \le R\}, \qquad \mathbb{C}$$

위의 모든 복소수 z 에 대하여 멱급수 (2) 가 절대수렴하고, 바깥에서는 절대수렴하지 않는다. 이제 이러한 집합 바깥의 복소수 z 에 대하여 멱급수 (2) 의 조건수렴여부를 살펴보자. 이를 위하여 멱급수 (2) 가 수렴하고 $|w| < |z|$ 이면 $\sum_n a_n w^n$ 이 절대수렴함을 보이자. 우선 $\lim_n a_n z^n = 0$ 이므로 다음

$$|a_n z^n| \le M, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

을 만족하는 양수 $M > 0$ 을 잡을 수 있다. 따라서,

$$|a_n w^n| = |a_n z^n| \left|\frac{w}{z}\right|^n \le M \left|\frac{w}{z}\right|^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

인데 $\sum_n M \left|\frac{w}{z}\right|^n$ 이 수렴하므로 $\sum_n |a_n w^n|$ 도 수렴한다.

이제, 결론을 내릴 수 있다. 멱급수 (2) 의 수렴반경이 R 이면, 멱급수 (2) 는 $|z| < R$ 일 때 절대수렴하고, $|z| > R$ 일 때 발산함을 알 수 있다. 또한, $|z_0| = R$ 인 복소수 z_0 에 대하여 $\sum_n a_n z_0^n$ 이 절대수렴하면 $|z| \le R$ 인 모든 z 에 대하여 멱급수 (2) 가 수렴한다. 한편, $\sum_n a_n z_0^n$ 이 조건수렴한다면 멱급수 $\sum_n a_n z^n$ 의 수렴반경은 $|z_0|$ 이다.

보기 1. 멱급수 $\sum_n \frac{1}{n} z^n$ 를 생각하면 $z = -1$ 에서 $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ 이 조건수렴하므로, 수렴반경은 1 이다. 또 다른 예로서 멱급수 $\sum_n \frac{1}{n^2} z^n$ 를 생

각해 보자. 만일 $|z| \le 1$ 이면 이 멱급수는 절대수렴한다. 그런데 $|z| > 1$ 이면 $\lim_n \frac{|z|^n}{n^2} = \infty$ 이므로 $\sum_n \frac{1}{n^2} z^n$ 은 발산하고, 따라서 수렴반경은 1 이다. □

문제 2.2.1. 급수 $\sum_n n^n z^n$ 의 수렴반경을 구하여라.

문제 2.2.2. 만일 $r > 1$ 이면 $\lim_n \frac{r^n}{n^2} = +\infty$ 임을 보여라.

멱급수 (2) 에서 극한값 $\lim_n |a_n|^{1/n} = r$ 이 존재하는 경우, 수렴반경을 쉽게 구할 수 있다. 만일 $|z| < 1/r$ 이면,

$$\lim_{n\to\infty} |a_n z^n|^{1/n} = r|z| < 1$$

이므로 정리 2.1.4 에 의하여 멱급수 (2) 가 수렴한다. 한편, $|z| > 1/r$ 이면 마찬가지 방법으로 멱급수 (2) 가 발산함을 알 수 있다.

정리 2.2.1. 만일 $\lim_n |a_n|^{1/n} = r$ 이면, 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 의 수렴반경은 $1/r$ 이다.

문제 2.2.3. 정리 2.2.1 에서 $r = 0, \infty$ 이면 수렴반경은 각각 $\infty, 0$ 임을 보여라.

정리 2.2.2. 만일 $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$ 이면, 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 의 수렴반경은 $1/r$ 이다.

문제 2.2.4. 정리 2.2.2 를 증명하여라.

문제 2.2.5. 다음 멱급수의 수렴반경을 구하여라.

(가) $\sum_n \frac{1}{n} z^n$ (나) $\sum_n n z^n$ (다) $\sum_n \frac{1}{n!} z^n$

(라) $\sum_n \frac{n!}{n^n} z^n$ (마) $\sum_n 2^n z^n$ (바) $\sum_n \frac{1}{2^n} z^n$

보기 2. 임의의 복소수 $\alpha \in \mathbb{C}$ 와 자연수 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

라 정의한다. 또한, $\binom{\alpha}{0} = 1$ 이라 정의한다. 이제, 멱급수

$$B_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = 1 + \alpha z + \binom{\alpha}{2} z^2 + \cdots \binom{\alpha}{n} z^n + \cdots$$

의 수렴반경을 구해 보자. 먼저 $\alpha = m$ 이 자연수이면, $n > m$ 에 대하여 $\binom{m}{n} = 0$ 이다. 따라서, B_α 는 사실상 다항식이며 이 경우 수렴반경은 물론 ∞ 이다. 이제 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ 이라 하면 $\binom{\alpha}{n} \neq 0$ 이다. 그런데,

$$\binom{\alpha}{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} \binom{\alpha}{n}$$

이므로

$$\frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} = \frac{n+1}{\alpha - n} \to -1$$

이다. 따라서 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ 인 경우 멱급수 $B_\alpha(z)$ 의 수렴반경은 1 이다. 만일 $\alpha = -1$ 이면 $\binom{-1}{n} = (-1)^n$ 이므로

$$B_{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$$

이다. 멱급수 $B_\alpha(z)$ 는 **이항급수**라 부른다. □

문제 2.2.6. 등식

$$(1+z)B_{\alpha-1}(z) = B_\alpha(z)$$

을 증명하여라.

두 멱급수 $\sum_n a_n z^n$ 과 $\sum_n b_n z^n$ 의 수렴반경이 각각 R, S 라 하자. 만일 $|z| < R$ 이고 $|z| < S$ 이면 $\sum_n a_n z^n$ 과 $\sum_n b_n z^n$ 이 수렴하므로 두 멱급수의 합

$$\sum_n (a_n + b_n) z^n = \sum_n a_n z^n + \sum_n b_n z^n \tag{3}$$

이 수렴한다. 앞으로 실수집합 A 에 대하여 $\min A$ 와 $\max A$ 는 각각 실수집합 A 의 최소값과 최대값을 나타내기로 한다.

문제 2.2.7. 위 상황에서 $R \neq S$ 이라 하자. 만일 $\min\{R, S\} < |z| < \max\{R, S\}$ 이면 급수 (3) 은 발산함을 보여라.

이제 멱급수의 곱을 어떻게 정의하는 것이 좋을지 살펴보자. 다항식의 곱하기를 염두에 둔다면 다음

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) \\
&\qquad = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots) \\
&\qquad = (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) z^2 + \cdots \\
&\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n
\end{aligned}$$

과 같이 정의하는 것이 자연스럽다. 이 때, 멱급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ 의 수렴 여부를 살펴보기 위하여 다음이 필요하다.

도움정리 2.2.3. 급수 $\sum_n a_n = A$ 가 절대수렴하고, $\sum_n b_n = B$ 이라 하자. 이 때,

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

라 정의하면 급수 $\sum_n c_n$ 은 AB 로 수렴한다.

증명: 각 급수 $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ 의 부분합의 수열을 각각 $\langle A_n \rangle$, $\langle B_n \rangle$, $\langle C_n \rangle$ 이라 두고,

$$B_n - B = \beta_n, \qquad \gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

로 나타내면,

$$\begin{aligned} C_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \cdots + (a_0b_n + \cdots + a_nb_0) \\ &= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \cdots + a_nB_0 \\ &= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B + \beta_0) \\ &= A_nB + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0 = A_nB + \gamma_n \end{aligned}$$

이 된다. 이제 $\lim_n A_nB = AB$ 이므로 $\lim_n \gamma_n = 0$ 임을 보이면 된다. 임의의 양수 $\epsilon > 0$ 이 주어졌을 때, $n \geq N \implies |\beta_n| < \epsilon$ 을 만족하는 자연수 N 을 잡을 수 있다. 만일 $n \geq N$ 이면

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq |\beta_0a_n + \cdots + \beta_Na_{n-N}| + |\beta_{N+1}a_{n-N-1} + \cdots + \beta_na_0| \\ &\leq |\beta_0a_n + \cdots + \beta_Na_{n-N}| + \epsilon \textstyle\sum_n |a_n| \end{aligned}$$

을 얻는다. 이제, N 을 고정하고 $n \to \infty$ 를 취하면

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |\gamma_n| \leq \epsilon \textstyle\sum_n |a_n|$$

이 되어서 $\lim_n \gamma_n = 0$ 임을 알 수 있다. □

다음 정리는 도움정리 2.2.3 으로부터 바로 나온다.

정리 2.2.4. 멱급수 $\sum_n a_nz^n$ 과 $\sum_n b_nz^n$ 의 수렴반경이 각각 R, S 이라 하자. 만일 $|z| < \min\{R, S\}$ 이면 멱급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\right)z^n$ 이 절대수렴하고 등식

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\right)z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_nz^n\right)$$

이 성립한다.

보기 3. 멱급수 $\sum_n z^n$ 의 수렴반경이 1 임은 바로 확인된다. 실제로 이는 등비급수이므로

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad |z| < 1 \tag{4}$$

이 성립함을 알고 있다. 따라서,

$$1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots = \frac{1}{(1-z)^2}, \qquad |z| < 1$$

임을 알 수 있다. □

2.3. 초월함수

복소수 $\alpha \in \mathbb{C}$ 와 양수 $r > 0$ 에 대하여

$$D(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < r\},$$
$$\overline{D}(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| \le r\}$$

라 정의한다. 보통 $D(\alpha, r)$ 는 **열린원판**이라 부르고, $\overline{D}(\alpha, r)$ 는 **원판**이라 부른다. 멱급수 (2) 의 수렴반경이 $R > 0$ 이면 집합 $D(0, R)$ 에서 정의된 복소함수

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad z \in D(0, R)$$

를 생각할 수 있다. 이 절에서는 이와 같이 정의되는 몇 가지 함수를 살펴본다.

먼저, 멱급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

를 생각하자. 그러면

$$\frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

이므로 수렴반경은 ∞ 이다. 따라서, 위 멱급수는 복소평면 전체에서 정의된 복소함수인데, 이를 e^z 혹은 $\exp z$ 라 쓴다. 즉,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + \frac{1}{1!} z + \frac{1}{2!} z^2 + \cdots + \frac{1}{n!} z^n + \cdots \tag{5}$$

이다. 만일 이 함수를 실수축에 제한하면 $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ 이므로 우리가 잘 아는 지수함수와 일치한다. 허수축에서 이 함수의 값이 어떻게 되는가 알아보기 위하여 정리 2.1.1 을 적용하여 계산하면, 임의의 $y \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + \frac{1}{1!}(iy) + \frac{1}{2!}(iy)^2 + \frac{1}{3!}(iy)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(iy)^n + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!} y^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n} + \cdots\right) \\ &\qquad + i\left(y - \frac{1}{3!} y^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1} + \cdots\right) \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned} \tag{6}$$

임을 알 수 있다. 특히, $y = \pi$ 를 대입하면 등식

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{7}$$

을 얻는다.(5)

(5) 등식 (7) 은 **오일러 등식**이라 불리운다. 편히 읽을 수 있는 수학잡지 중의 하나인 *The Mathematical Intelligencer* 는 독자들을 상대로 수학의 어느 정리가 가장 아름다운가에 대하여 설문조사를 한 바 있는데, 이 등식이 첫째를 차지하였다. 둘째는 다각형의 꼭지점, 모서리, 면의 개수에 관한 오일러 공식 $V + F = E + 2$, 셋째는 소수가 무한히 많다는 정리, 넷째는 정다면체가 다섯 개 있다는 정리가 선정되

한편 임의의 실수 $y \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$ 이므로

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \qquad y \in \mathbb{R} \tag{8}$$

가 성립한다. 따라서, 복소함수 $\cos z$ 와 $\sin z$ 를 다음

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad z \in \mathbb{C} \tag{9}$$

과 같이 정의한다. 그러면

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(iz)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-iz)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{1+(-1)^n}{2}\; i^n\, z^n \\ &= 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} + \cdots \end{aligned} \tag{10}$$

이 성립한다. 마찬가지로

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} + \cdots \tag{11}$$

이다.

이제, 도움정리 2.2.3 을 이용하면 지수법칙

$$e^{z+w} = e^z e^w, \qquad z, w \in \mathbb{C} \tag{12}$$

었으며, 다섯번째에 역시 오일러가 발견한 다음 등식

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

이 선정되었다. 다음 기사 [D. Wells, Are these the most beautiful?, Math. Intelligencer Vol. 12, No. 3 (1990), pp. 37- 41] 를 참조하라.

Leonhard Euler (1707∼1783), 스위스 태생의 수학자. 주로 상트페테르부르크와 베를린에서 활동하였다. Gauss 와 더불어 역사상 최고의 수학자로 일컬어진다. 만년에 양쪽 눈을 모두 잃었다.

을 바로 증명할 수 있다. 임의의 $z, w \in \mathbb{C}$ 에 대하여 급수 $\sum_n \frac{1}{n!} z^n$ 과 $\sum_n \frac{1}{n!} w^n$ 이 절대수렴하므로,

$$\begin{aligned} e^z e^w &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\,\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = e^{z+w} \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 등식 (12) 는 지수함수와 삼각함수의 성질을 알아보는 데에 핵심적인 역할을 한다. 예를 들어서 고등학교에서 배운 등식 $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$ 는 다음

$$\begin{aligned} \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2i}\left(e^{i(z+\pi/2)} - e^{-i(z+\pi/2)}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz}e^{i\pi/2} - e^{-iz}e^{-i\pi/2}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} - (-i)e^{-iz}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \cos z \end{aligned}$$

과 같이 증명된다.

문제 2.3.1. 다음 등식을 증명하여라.
(가) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
(나) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$
(다) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

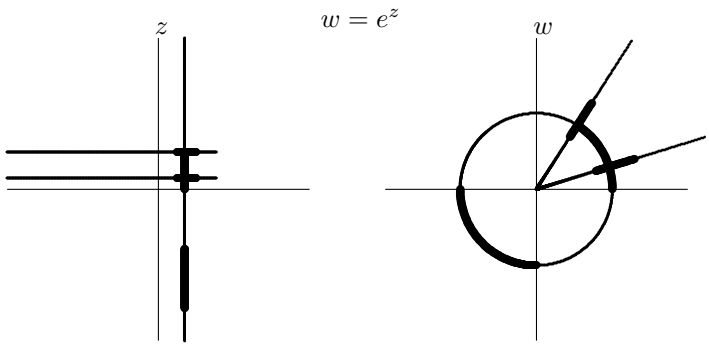
이제 등식 (12) 를 이용하여 지수함수의 성질들을 살펴보자. 우선

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

이므로, 복소함수 $w = e^z$ 가 어떠한 변환인지 일 수 있다. 즉,

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \qquad \arg e^z = \operatorname{Im} z \tag{13}$$

로서, e^z 의 절대값은 z 실수부에 의하여 결정되며 z 의 허수부는 바로 e^z 의 편각이다. 따라서, z-평면의 수평선은 w-평면에서 각도를 표시하는 반직선 (단, 원점은 제외) 이 되며, z-평면의 수직선은 w-평면의 원이 된다. 결국 변환 $w = e^z$ 는 간격이 2π 인 수평띠 $\{z : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$ 를 구멍난 평면 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 으로 보내는 전단사함수이다. 특히, 방정식 $e^z = 0$ 은 해를 가지지 않는다. 물론, z-평면에서 수직으로 2π 를 이동해도 그 상은 변하지 않는다.



문제 2.3.2. 방정식 $\cos z = 0$ 의 해를 모두 구하여라.

문제 2.3.3. 직선 $\operatorname{Re} z = 0$ 이 변환 $w = \cos z$ 에 의하여 어떤 도형으로 바뀌는지 살펴보아라.

지수함수의 역함수인 로그함수를 정의하여 보자. 우선 관계식 (13) 을 고려하면 로그함수를 다음

$$\log z = \log |z| + i \arg z, \qquad z \neq 0$$

과 같이 정의하면 된다. 그런데 여기서 $\arg z$ 가 2π 의 배수를 더한 값을 모두 취하므로 $z \mapsto \arg z$ 는 보통 의미의 함수가 아니다. 그러나, 주편각 $\operatorname{Arg} z$ 를 사용하여

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i\operatorname{Arg} z, \qquad z \neq 0 \tag{14}$$

라 정의하면 $w = \operatorname{Log} z$ 는 구멍난 평면을 수평띠 $\{z : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$ 로 보내는 일대일대응 함수가 된다.

문제 2.3.4. 로그함수와 지수함수가 서로 역함수관계임을 보여라.

여기서 한 가지 유의할 점으로 $\log(e^z) \neq z$ 이라는 것이다. 실제로 계산하여 보면

$$\begin{aligned}\log(e^z) &= \log|e^z| + i\arg(e^z)\\ &= \operatorname{Re} z + i(\operatorname{Im} z + 2n\pi) = z + 2n\pi i, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\end{aligned}$$

이다.

로그함수를 이용하면 자연스레 복소수의 지수를 정의할 수 있다. 이미 실수에서 알고 있는 공식 $a^b = e^{b\log a}$ 이용하여, 임의의 복소수 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 에 대하여

$$\alpha^\beta = e^{\beta\log\alpha}$$

라 정의한다.

보기 1. 예를 들어서 $\log i = \log|i| + i\arg i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ 이다. 따라서

$$i^{1/2} = e^{(1/2)\log i} = e^{\pi i/4 + n\pi i} = e^{\pi i/4}e^{n\pi i} = e^{\pi i/4}(\pm 1) = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

인데, 이 두 복소수는 물론 방정식 $z^2 = i$ 의 근이다. □

문제 2.3.5. 다음 값을 구하여라.

(가) 2^i (나) i^i (다) i^3 (라) $\log(1-i)^i$

임의의 자연수 $n \in \mathbb{N}$ 과 복소수 $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여

$$|n^z| = |e^{z\operatorname{Log} n}| = e^{\operatorname{Re} z \log n} = n^{\operatorname{Re} z} \tag{15}$$

이다. 여기서 $n^z = e^{z\operatorname{Log} n}$ 이다. 만일 $\operatorname{Re} z > 1$ 이면 급수 $\sum_n \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}$ 가 수렴하므로 비교판정법에 의하여 급수 $\sum_n \frac{1}{n^z}$ 도 수렴한다. 이와 같이 영역 $\{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ 위에서 정의된 다음 함수

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \qquad \operatorname{Re} z > 1$$

를 리만 ζ-함수라 한다.

2.4. 연습문제

2.4.1. 수열 $\langle \alpha_n \rangle$ 이 수렴하고 $\lim_n \alpha_n = \alpha$ 이면 수열 $\langle \overline{\alpha}_n \rangle$ 도 수렴하고 등식 $\lim_n \overline{\alpha}_n = \overline{\alpha}$ 이 성립함을 보여라.

2.4.2. 복소수열 $\langle \alpha_n \rangle$ 에 관한 다음 명제

$$\alpha_n \to \alpha \iff |\alpha_n| \to |\alpha|,\ \operatorname{Arg} \alpha_n \to \operatorname{Arg} \alpha$$

가 성립하는지 살펴보아라. 만일 성립하지 않는다면 어떤 가정을 추가하여야 성립하는가 살펴보아라.

2.4.3. 다음 급수의 수렴 반경을 구하여라.

(가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n} z^n$ (나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^k + a^n) z^n$ (다) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n - 1}{n} z^n$

(라) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} z^n$ (마) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{4^n n^k}$ (바) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 + 4n} z^{2n}$

(사) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n^2}}$ (아) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}$ (자) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n + 5^n} z^n$

2.4.4. 복소수열 $\langle a_n \rangle$ 과 $\langle b_n \rangle$ 에 대하여 $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ 이라 정의하자.

(가) 다음 등식

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k)$$

을 증명하여라.

(나) 만일 $\sum_n a_n$ 의 부분합수열 $\langle A_n \rangle$ 이 유계이고, 수열 $\langle b_n \rangle$ 이 단조감소하면서 0 으로 수렴하면 $\sum_n a_n b_n$ 이 수렴함을 보여라.(6)

(다) 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ 이 단위원 $|z| = 1$ (단, $z \neq 1$) 위에서 수렴함을 증명하여라.

2.4.5. 멱급수 $\sum_n a_n z^n$ 의 수렴반경이 $R > 0$ 일 때, 다음 멱급수의 수렴반경을 구하여라.

(가) $\displaystyle\sum_n a_n z^{2n}$ (나) $\displaystyle\sum_n a_n^2 z^n$ (다) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^k z^n$

(라) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^k} z^n$ (마) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k z^n$ (바) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$

(사) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$

2.4.6. 다음식을 만족하는 복소수 z 의 값을 모두 구하여라.

(가) $e^{3z} = 1$ (나) $e^{z^2} = 1$ (다) $e^{e^z} = 1$

2.4.7. 변환 $w = e^z$ 에 의한 다음 집합의 상을 구하여라.

(가) $-5 \leq x \leq 5,\ y = \dfrac{\pi}{4}$ (나) $x = 3,\ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$

(다) $-2 < x < 14,\ 0 < y < \pi$ (라) $x < 14,\ -\dfrac{\pi}{3} < y < \dfrac{2\pi}{3}$

2.4.8. 다음 값을 모두 구하여라

(가) $\log(1-i)$ (나) $\log(3-2i)$ (다) $\log(x+iy)$

2.4.9. 다음 값을 모두 구하여라.

(가) 5^i (나) $(\pi i)^e$ (다) $(2^i)^i$

(라) $\log(1+i)^{\pi i}$

2.4.10. 다음 등식

$$1^{1/2} + 1^{1/2} = 2 \cdot 1^{1/2}$$

이 참인지 거짓인지 살펴보아라.

2.4.11. 함수 $w = \cos z$ 가 반직선 $\{z : \operatorname{Arg} z = \theta\}$ 위에서 유계함수일 θ 의 조건을 구하여라.

---

(6) 이를 디리끌렛 판정법이라 부른다.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805∼1859), 독일 수학자. 파리 유학 후에 1826 년에 독일로 돌아와 주로 베를린에서 활동하다가 죽기 4년 전 Gauss 의 후임으로 Göttingen 에 초빙되었다.

2.4.12. 다음 등식

$$\log zw = \log z + \log w$$

에 대하여 논하여라.

2.4.13. 복소수 α^β 에 대하여 다음을 증명하여라.

(가) 만일 β 가 정수이면 α^β 의 값은 정확히 한 개이고, 이는 기존의 지수와 일치한다.

(나) 만일 β가 유리수이고 $\beta = \dfrac{m}{n}$ (단, m과 n이 서로 소인 정수이고 $n \neq 0$) 이면 α^β 의 값은 n 개이며, 그것은 모두 방정식 $z^n = \alpha^m$의 근이다.

(다) 나머지 경우에는 α^β 의 값이 무수히 많이 존재한다.