제 3 장 해석함수

이제부터 복소함수의 미적분을 본격적으로 공부한다. 먼저 실함수의 경우와 마찬가지로 뉴톤 몫을 이용하여 복소함수의 미분가능성과 도함수를 정의한다. 이 때, 주어진 어느 점 근방의 모든 점에서 미분가능하면 이러한 함수를 해석함수라 한다. 복소함수는 정의역과 치역을 실수부와 허수부로 구별함으로써 정의역과 치역의 변수가 두 개인 다변수함수로 이해할 수 있다. 미분가능한 복소함수는 이에 상응하는 다변수함수의 편도함수들 사이에 특별한 관계식을 만족해야 한다. 다항함수나 분수함수의 미분은 실함수의 경우와 같이 계산하면 된다. 여기서는 멱급수로 정의된 함수는 항상 해석함수이고, 그 도함수는 마치 다항식의 도함수를 계산하듯이 하면 된다는 것을 보인다.

3.1. 복소함수의 극한과 미분

실함수의 미분을 생각할 때 그 정의구역을 보통 열린구간으로 잡는데, 그 첫째 이유는 양쪽 극한을 생각하기 위함이다. 임의의 $x \in (a, b)$에 대하여 $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (a, b)$가 만족하도록 양수 $\epsilon > 0$을 잡을 수 있다. 물론 닫힌구간 $[a, b]$를 생각하면 $a \in [a, b]$이지만, 이러한 양수 $\epsilon > 0$을 잡는 것은 불가능하고 이는 양쪽 극한을 생각할 수 없음을 뜻한다. 열린구간의 또 다른 특성은 연결되어 있다는 점이다. 즉, 열린구간 안에서 임의의 두점을 잡아도 두 점을 연결하는 선분이 원래의

구간 안에 들어 있다. 이러한 점을 염두에 두고, 복소평면의 부분집합 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 가 다음 두 조건

(영1) 임의의 $z \in \Omega$ 에 대하여 $D(z,r) \subset \Omega$ 를 만족하는 양수 $r > 0$ 이 존재한다,

(영2) 임의의 두 점 $z, w \in \Omega$ 을 실수축 혹은 허수축과 평행하고 Ω 안에 있는 유한개의 선분으로 연결할 수 있다

을 만족할 때, Ω 를 복소평면의 **영역**이라 부른다. 지난 2.3 절에서 정의하였듯이

$$D(z,r) = \{w \in \mathbb{C} : |z-w| < r\}$$

이다.

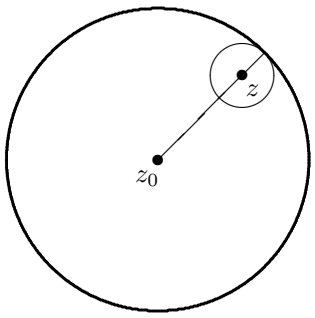
집합 $D(z_0,r)$ 은 영역이다. 먼저 (영1) 을 보이기 위하여 $z \in D(z_0,r)$ 을 하나 잡자. 그러면 $|z_0 - z| < r$ 이므로 $s = r - |z_0 - z| > 0$ 이고, $D(z,s) \subset D(z_0,r)$ 이 성립한다. 실제로 $w \in D(z,s)$ 이면 $|z-w| < s$ 이다. 따라서,

$$|z_0 - w| \le |z_0 - z| + |z - w| < |z_0 - z| + s = r$$

이므로 $w \in D(z_0,r)$ 이다. 즉, 다음

$$w \in D(z,s) \implies w \in D(z_0,r)$$

이 증명되었는데, 이는 곧 $D(z,s) \subset D(z_0,r)$ 이 성립함을 뜻한다.



문제 3.1.1. 집합 $D(z_0, r)$ 이 (영2) 를 만족함을 보여라.

문제 3.1.2. 다음 집합

$$\mathbb{C}, \qquad \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad \{z : |z| > 1\}, \qquad \{z : 1 < |z| < 2\}$$

들이 모두 영역임을 보여라.

영역 Ω 에서 정의된 복소함수 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 와 영역의 한 점 $z_0 \in \Omega$ 에 대하여 $\lim_{z \to z_0} |f(z) - \alpha| = 0$ 일 때

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha$$

라 쓰고, $f(z)$ 가 α 로 **수렴**한다고 말한다. 복소평면과 xy-좌표평면을

$$z = x_0 + iy_0 \longleftrightarrow (x_0, y_0)$$

에 의하여 같은 것으로 간주하면 $\lim_{z \to z_0}$ 와 $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)}$ 는 같은 것으로 생각할 수 있다. 따라서, z_0 를 지나는 임의의 곡선을 따라서 z 가 z_0 로 가까이 갈 때 $f(z)$ 가 α 에 가까이 간다는 것과 $\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha$ 은 같은 말이다. 이제, $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$, $\operatorname{Im} f(z) = v(z)$ 라 두면 u, v 는 이변수 실함수로 이해할 수 있다. 마찬가지로 $\alpha = a + ib$ 라 두면

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha \iff \begin{cases} \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) & = a, \\ \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) & = b \end{cases} \tag{1}$$

임을 바로 확인할 수 있다.

문제 3.1.3. 명제 (1) 을 증명하여라.

이제, 영역 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 에서 정의된 복소함수 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 와 영역의 한 점 $z_0 \in \Omega$ 에 대하여 다음 극한

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

이 존재할 때, 함수 $f(z)$ 가 $z = z_0$ 에서 **미분가능**하다고 말하고, 이 극한값을 $f'(z_0)$ 라 쓴다. 함수 $f(z)$ 가 영역 Ω 의 모든 점에서 미분가능하

면 함수 $z \mapsto f'(z)$ 를 생각할 수 있는데, 이 함수를 $f(z)$ 의 **도함수**라 하고, $f'(z)$ 혹은 $\dfrac{df}{dz}$ 라 쓴다.

예를 들어서 다항식의 미분법

$$\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$$

등의 미분 공식은 실함수의 경우와 꼭 같은 방법으로 증명된다.

문제 3.1.4. 다항식의 미분법을 증명하여라.

주어진 함수를 미분하는 데에 쓰이는 여러가지 공식 등도 그 증명이 실함수의 경우와 같으므로 여기서는 생략한다. 예를 들어서, 함수 $f(z)$ 와 $g(z)$ 가 미분가능하면 $f(z)+g(z)$, $f(z)g(z)$ 도 미분가능하고

$$\frac{d(f+g)}{dz} = \frac{df}{dz} + \frac{dg}{dz}, \qquad \frac{d(fg)}{dz} = \frac{df}{dz}\,g + f\,\frac{dg}{dz}$$

등의 공식이 성립한다. 만일 $g(z_0) \neq 0$ 이면, $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ 도 $z = z_0$ 에서 미분가능하고

$$h'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g'(z_0))^2}$$

이다. 연쇄법칙

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

도 물론 성립한다.

보기 1. 함수 $f(z) = \operatorname{Re} z$ 를 생각해 보자. 만일 $f(z)$ 가 $z = x_0 + iy_0$ 에서 미분가능하다면

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x - x_0}{(x+iy) - (x_0 + iy_0)}$$

의 극한이 존재해야 한다. 그런데, (x_0, y_0) 를 지나고 실수축 및 허수축에 평행한 직선 위에서 극한을 생각하면

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x - x_0}{(x+iy) - (x_0 + iy_0)} = \begin{cases} 1, & y = y_0, \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$$

이므로 극한값이 존재하지 않고, 따라서 $f(z) = \mathrm{Re}\, z$ 는 어느 점에서도 미분가능하지 않다.

이제, 함수 $g(z) = z\mathrm{Re}\, z$ 를 생각해 보자. 우선

$$g'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{z\mathrm{Re}\, z}{z} = \lim_{z\to 0} \mathrm{Re}\, z = 0$$

이다. 만일 $g(z)$ 가 $z = z_0$ 에서 미분가능하다 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned} g'(z_0) &= \lim_{z\to z_0} \frac{z\mathrm{Re}\, z - z_0\mathrm{Re}\, z_0}{z - z_0} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{(z+z_0)\mathrm{Re}\,(z+z_0) - z_0\mathrm{Re}\, z_0}{z} \\ &= \lim_{z\to 0} \left(\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Re}\, z_0 + z_0 \frac{\mathrm{Re}\, z}{z} \right) = \mathrm{Re}\, z_0 + z_0 \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Re}\, z}{z} \end{aligned}$$

만일 $z_0 \neq 0$ 이면 극한값 $\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Re}\, z}{z} = f'(0)$ 이 존재하는데, 이는 모순이다. 따라서, 함수 $g(z)$ 는 원점에서 미분가능하고, 원점 이외의 모든 점에서 미분가능하지 않다. □

영역 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 에서 정의된 복소함수 $f(z)$ 와 점 $z_0 \in \Omega$ 가 주어져 있다. 이 때, 다음 성질

$$z \in D(z_0, r) \implies f(z) \text{ 는 } z \text{ 에서 미분가능하다}$$

을 만족하는 양수 $r > 0$ 이 있으면 함수 $f(z)$ 가 $z = z_0$ 에서 **해석적**이라고 한다. 보기 1 에서 살펴본 함수 $g(z) = z\mathrm{Re}\, z$ 는 원점에서 미분가능하지만 해석적이지는 않다. 만일 함수 $f(z)$ 가 영역 Ω 위의 모든 점에서 해석적이면 이를 Ω 에서 정의된 **해석함수**라 한다. 영역 위의 모든 점에서 미분가능한 함수는 자동적으로 그 영역에서 정의된 해석함수이다. 다항식으로 정의된 함수는 복소평면 위에서 해석함수이다. 또한, 다항식의 몫으로 표시되는 유리함수는 그 정의역 위에서 해석함수이다. 예를 들어서 함수 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ 은 영역 $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 위에서 해석적이다.

만일 함수 $f(z)$ 가 $z = z_0$ 에서 미분가능할 때

$$h(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0), \qquad \alpha = f'(z_0)$$

라 두면 다음

$$\begin{aligned} &f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + h(z)(z - z_0), \\ &\lim_{z \to z_0} h(z) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

이 성립한다.

문제 3.1.5. 만일 관계식 (2) 를 만족하는 복소수 $\alpha \in \mathbb{C}$ 와 함수 $h(z)$ 가 존재하면 $f(z)$ 는 $z = z_0$ 에서 미분가능하고 $f'(z_0) = \alpha$ 임을 증명하여라.

3.2. 코시–리만 방정식

영역 Ω 에서 정의된 복소함수 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 가 Ω 의 한 점 $z_0 = x_0 + iy_0$ 에서 미분가능하다고 가정하자. 그러면, 극한값

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

이 존재한다. 만일 점 z_0 를 지나고 실수축에 나란한 직선을 따라서 z 를 z_0 에 접근시키면

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

이다. 따라서, 편미분계수 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$ 와 $\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$ 가 존재하고 등식

$$f'(x_0 + iy_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \tag{3}$$

이 성립함을 알 수 있다. 한편, 점 z_0 를 지나고 허수축에 나란한 직선을 따라서 z 를 z_0 에 접근시키면

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0+iy)-f(x_0+iy_0)}{i(y-y_0)} \\ &= \lim_{y\to y_0} \frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{y-y_0} - i\lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{y-y_0} \end{aligned}$$

이 된다. 따라서, 편미분계수 $\dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$ 와 $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$ 가 존재하고 다음 등식

$$f'(x_0+iy_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \tag{4}$$

이 성립한다. 특히, 등식 (3) 과 (4) 에 의하여 다음

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0), \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \tag{5}$$

이 성립하는데, 이를 **코시**(1)**–리만 방정식**이라 한다. 지금까지 논의한 바를 정리하면 다음과 같다.

정리 3.2.1. 복소함수 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 가 점 $z_0 = x_0 + iy_0$ 에서 미분가능하면, u, v 의 편도함수가 존재하고 등식 (5) 가 성립한다.

보기 1. 함수 $f(z) = z^2$ 이 미분가능하고 그 도함수가 $f'(z) = 2z$ 은 이미 알고 있는데, 이를 다변수함수

$$(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$$

로 이해하면

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \qquad v(x,y) = 2xy$$

(1) Augustin Louis Cauchy (1789∼1857), 프랑스 수학자. 원래, 토목공학을 전공하려 하였으나, École Polytechnique 의 라플라스 등이 권하여 수학을 하게 되었다. 1816 년부터 École Polytechnique 의 교수로 있으면서 수많은 논문과 저작을 남겼으나, 1830 년 혁명 이후 정치적인 이유(왕당파)로 쫓겨 나기도 했다가 1848 년 복귀하였다.

이다. 따라서

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

가 되어서 코시–리만 방정식을 만족한다. 만일 $u(x,y) = x^2 - y^2$ 일 때 $v(x,y)$ 를 어떻게 잡아야 복소함수 $u + iv$ 가 되는지 생각해 보자. 우선

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

이므로 $v(x,y) = 2xy + c(y)$ 꼴이어야 한다. 그런데

$$2x + c'(y) = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

이므로 $c(y)$ 는 상수함수임을 알 수 있다. 결국 $u(x,y) = x^2 - y^2$ 로 주어졌을 때 $u + iv$ 가 해석함수이기 위한 유일한 선택은 상수 차이를 무시하여 $v(x,y) = 2xy$ 이고, 이 때 $u+iv$ 는 해석함수 $w = z^2$ 이 된다. □

문제 3.2.1. 함수 $f(z) = |z|$ 가 어떤 점에서 미분가능한지 살펴보아라.

이 보기에서 보듯이 복소함수의 미분가능성과 그에 상응하는 이변수함수의 미분가능성은 매우 다른 개념이다. 해석함수 $u + iv$ 의 실수부와 허수부의 이계도함수들이 연속인 함수라면(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ 가 성립하므로, 코시–리만 방정식에 의하여 다음 등식

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

이 성립한다. 물론 허수부 v 도 마찬가지이다. 일반적으로 이변수 실함수 u 의 일계 및 이계 편도함수가 연속이고 다음 등식

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{6}$$

을 만족할 때, u 를 **조화함수**라 부른다.

(2) 실제로 임의의 해석함수는 한없이 미분가능하다는 것을 뒤에 배우게 되는데, 이는 실함수의 미분과 극명하게 대비되는 부분이다.

보기 2. 함수 $(x,y) \mapsto x^2-y^2$ 은 조화함수이지만 함수 $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ 는 조화함수가 아니다. 따라서, $f(x+iy) = x^2+y^2+iv(x,y)$ 는 $v(x,y)$ 를 어떻게 정의해도 절대 해석함수가 될 수 없다. □

문제 3.2.2. 다음 함수가 조화함수인지 살펴 보고, 조화함수인 경우 $v(x,y)$ 를 어떻게 정의하여야 $u+iv$ 가 해석함수가 되는지 알아 보아라.

(가) $u(x,y) = 2xy$ (나) $u(x,y) = e^x \cos y$

(다) $u(x,y) = x^3 - y^3$ (라) $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

코시–리만 방정식은 점 $x_0 + iy_0$ 을 지나면서 실수축 혹은 허수축과 나란한 직선 위에서 함수가 어떠한지 말하고 있기 때문에 함수의 연속성이나 미분가능성에 대한 충분조건과는 거리가 멀다. 예를 들어서 함수 $f(z)$ 를 다음

$$f(x+iy) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ 혹은 } y = 0 \\ 0, & x \neq 0,\ y \neq 0 \end{cases}$$

과 같이 정의하면, (5) 에 나오는 편미분계수는 원점에서 모두 0 이지만 함수 $f(z)$ 는 원점에서 불연속이다. 그러나, 편도함수의 연속성을 가정하면 정리 3.2.1 의 역이 성립한다.

정리 3.2.2. 영역 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 에서 정의된 복소함수 $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ 의 성분함수 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 가 Ω 위에서 연속인 편도함수를 가지고 임의의 점 $z_0 \in \Omega$ 에서 등식 (5) 가 성립하면, 함수 $f(z)$ 는 Ω 위에서 해석함수이고 등식 (3) 과 (4) 가 성립한다.

증명: 편의상 $\ell = h + ik$ 라 두면

$$\begin{aligned} f(z+\ell) - f(z) &= f(x+h, y+k) - f(x,y) \\ &= [f(x+h, y+k) - f(x, y+k)] + [f(x, y+k) - f(x,y)] \\ &= h\frac{\partial f}{\partial x}(x+h_1, y+k) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+k_1) \end{aligned}$$

이 된다. 여기서, 일변수함수 $x \mapsto f(x, y+k)$ 에 평균값정리를 적용하면[3] 0 과 h 사이에 위 식을 만족하는 h_1 을 잡을 수 있고, k_1 도 마찬가지이다. 이제

$$\begin{aligned} e_1(\ell) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x+h_1, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ e_2(\ell) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+k_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{aligned}$$

라 두자. 이제, 등식 $i\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ 을 이용하여 계산하면

$$\begin{aligned} \frac{f(z+\ell)-f(z)}{\ell} &= \frac{1}{\ell}\left(h\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+e_1(\ell)\right] + k\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+e_2(\ell)\right]\right) \\ &= \frac{1}{\ell}\left[(h+ik)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + he_1(\ell) + ke_2(\ell)\right] \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{h}{\ell}e_1(\ell) + \frac{k}{\ell}e_2(\ell) \end{aligned}$$

이 된다. 그런데, $\left|\dfrac{h}{\ell}\right| \le 1$, $\left|\dfrac{k}{\ell}\right| \le 1$ 이고, 편도함수들의 연속성으로부터

$$\lim_{\ell\to 0} e_1(\ell) = 0, \qquad \lim_{\ell\to 0} e_2(\ell) = 0$$

이므로

$$\lim_{\ell\to 0}\frac{f(z+\ell)-f(z)}{\ell} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

를 얻는다. 지금까지 논증은 임의의 $z \in \Omega$ 에 대하여 성립하므로 f 는 해석함수이다. □

보기 3. 이변수 실함수

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2), \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

(3) 함수 $x \mapsto f(x, y+k)$ 의 치역은 복소수이지만 실수부 u 와 허수부 v 에 각각 평균값정리를 적용하면 되고, 이 경우 u 와 v 에 대하여 잡는 h_1 은 각각 다른 값일 수 있지만 $h \to 0$ 일 때 $h_1 \to 0$ 이므로 증명에 별 지장이 없다.

을 생각하자. 우선 직접 계산하여 $u(x,y)$ 가 조화함수임을 바로 확인할 수 있다. 만일 $u+iv$ 가 해석함수라면

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

이어야 한다. 그런데,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\arctan\frac{y}{x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\arctan\frac{x}{y}\right] = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

이므로, 주어진 영역이 실수축을 포함하지 않는다면 $v(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$ 로 두고, 허수축을 포함하지 않는다면 $v(x,y) = -\arctan\dfrac{x}{y}$ 로 두면 된다. 이제, 실함수 $t \mapsto \arctan t + \arctan\dfrac{1}{t}$ 의 도함수가 0 인데 이 함수의 정의역이 $(-\infty,0)$ 과 $(0,\infty)$ 두 구간으로 나뉘어 있고, $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$ 및 $\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$ 이므로

$$\arctan\frac{y}{x} + \arctan\frac{x}{y} = \begin{cases} \pi/2, & xy > 0, \\ -\pi/2, & xy < 0 \end{cases}$$

이다. 따라서, 지난 2.3 절의 (14) 에서 정의한 $\operatorname{Log} z$ 는 다음

$$\operatorname{Log} z = \begin{cases} \log|z| + i\arctan\dfrac{y}{x}, & \operatorname{Re} z > 0, \\ \log|z| + i\left(-\arctan\dfrac{x}{y} + \dfrac{\pi}{2}\right), & \operatorname{Im} z > 0, \\ \log|z| + i\left(-\arctan\dfrac{x}{y} - \dfrac{\pi}{2}\right), & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases} \tag{7}$$

과 같이 쓸 수 있고, 정리 3.2.2 를 적용하면 $\operatorname{Log} z$ 가 영역

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z : \operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z \le 0\}$$

위에서 해석함수임을 알 수 있다. 한편 관계식 (3) 을 적용하면, 임의의 $z \in \Omega$ 에 대하여

$$\frac{d}{dz}\operatorname{Log} z = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}$$

임을 알 수 있다. □

문제 3.2.3. 등식 (7) 을 증명하고, $\operatorname{Log} z$ 가 해석함수임을 보여라.

만일 영역 $\Omega \subset C$ 위에서 $f' = 0$ 이면 실변수함수의 경우와 마찬가지로 $f(z)$ 는 상수함수이다. 이를 보이기 위하여 $f = u + iv$ 라 두면 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ 이다. 따라서, y 를 고정하면 함수 $x \mapsto u(x, y)$ 가 상수함수이다. 마찬가지로 함수 $y \mapsto u(x, y)$ 역시 상수함수이므로, 영역의 조건 (영2) 에 의하여 함수 u 는 영역 Ω 위에서 상수함수이다. 마찬가지로 함수 v 역시 상수함수이고, 따라서 다음을 얻는다.

정리 3.2.3. 영역 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 위에서 정의된 해석함수의 도함수가 0 이면 $f(z)$ 는 상수함수이다.

정리 3.2.4. 영역 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 위에서 정의된 해석함수의 절대값 $z \mapsto |f(z)|$ 가 상수함수이면 $f(z)$ 도 상수함수이다.

증명: 만일 $|f| = |u + iv| = C$ 이면 $u^2 + v^2 = C^2$ 이고, 이를 편미분하면

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

를 얻는다. 그런데, 코시–리만 방정식에 의하여

$$u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

을 얻고, 이로부터 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ 을 알 수 있다. 나머지 편미분도 마찬가지 방법으로 모두 0 이 되므로, 정리 3.2.3 에 의하여 $f = u + iv$ 는 상수함수이다. □

문제 3.2.4. 정리 3.2.4 의 증명을 마무리하여라.

3.3. 멱급수의 미분

지금까지 살펴본 다항식 함수나 유리함수 이외의 해석함수에 어떠한 것들이 있는가 알아보자. 그 첫번째 대상은 다항식 함수들의 극한으로 이해할 수 있는 멱급수로 표현된 함수이다. 멱급수 $\sum_n a_n z^n$ 의 수렴반경이 $R > 0$ 이면 영역 $D(0, R)$ 위에서 정의된 함수

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

를 생각할 수 있다. 이제 다항식 함수의 도함수를 생각하면, $f(z)$ 의 도함수가

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1} + \cdots$$

가 되리라는 것을 짐작할 수 있다. 우선 이 멱급수의 수렴반경 역시 $R > 0$ 임을 확인하자.

먼저 $|a_n z^{n-1}| \leq |n a_n z^{n-1}|$ 이므로, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ 이 절대수렴하면 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$ 도 절대수렴하고, 따라서

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + z \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} \right)$$

도 절대수렴한다. 이제, $|z| < R$ 일 때 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ 가 절대수렴함을 보이면 된다. 먼저, $|z| < s < R$ 인 $s \in \mathbb{R}$ 를 잡는다. 극한 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ 를 이용하면, 충분히 큰 자연수 N 에 대하여

$$n \geq N \implies n^{1/n} < \frac{s}{|z|}$$

임을 알 수 있다. 따라서, $n \geq N$ 이면

$$|na_n z^{n-1}| = |a_n| \frac{(n^{1/n}|z|)^n}{|z|} < \frac{1}{|z|}|a_n|s^n$$

인데 급수 $\sum |a_n|s^n$ 가 수렴하므로 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ 가 절대수렴함을 알 수 있다. 이 급수에 대하여 방금 한 이야기를 다시 적용하면 급수 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}$ 역시 $|z| < R$ 일 때 절대수렴한다.

이제, 영역 $D(0,R)$ 위에서 함수 $f(z)$ 의 도함수가 $g(z)$ 임을 보이자. 우선

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} - nz_0^{n-1}\right]$$

이다. 한편, 직접 계산하여 보면 $n = 2, 3, \ldots$ 에 대하여

$$\begin{aligned}\frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} - nz_0^{n-1} &= z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1} - nz_0^{n-1} \\ &= (z-z_0)\left[z^{n-2} + 2z^{n-3}z_0 + \cdots + (n-1)z_0^{n-2}\right]\end{aligned} \tag{8}$$

이다. 이제, $z_0 \in D(0,R)$ 를 고정하고, $|z_0| < r < R$ 인 양수 r 을 잡자. 만일 $|z| < r$ 이면

$$\left|\frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} - nz_0^{n-1}\right| \leq |z-z_0| \sum_{k=1}^{n-1} kr^{k-2} = |z-z_0| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}$$

이다. 따라서,

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0)\right| \leq |z-z_0| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2}|a_n|r^{n-2}$$

인데, 앞에서 살펴본 바와 같이 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|r^{n-2}$ 이 유한값이므로

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = g(z_0)$$

임을 알 수 있다.

문제 3.3.1. 위 논증 과정에서 등식 (8) 을 증명하여라.

정리 3.3.1. 멱급수 $\sum_n a_n z^n$ 의 수렴반경이 $R > 0$ 라 가정하자. 그러면 복소함수

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad z \in D(0, R) \tag{9}$$

은 영역 $D(0, R)$ 위의 모든 점에서 미분가능하고

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \qquad z \in D(0, R) \tag{10}$$

이다. 또한, 멱급수 $\sum_n n a_n z^{n-1}$ 의 수렴반경도 $R > 0$ 이다.

한 마디로 요약하면, 멱급수로 정의된 함수 (9) 는 영역 $D(0, R)$ 위에서 해석함수이다. 또한, 등식 (9) 와 (10) 에 $z = 0$ 을 넣으면

$$f(0) = a_0, \qquad f'(0) = a_1$$

임을 알 수 있다. 그런데 등식 (10) 도 수렴반경이 $R > 0$ 인 멱급수로 정의되어 있으므로 정리 3.3.1 을 다시 적용할 수 있다. 그러면

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}, \qquad z \in D(0, R)$$

임을 알 수 있다. 또한, $f''(0) = 2! a_2$ 이다. 이와 같이 정리 3.3.1 을 반복하여 적용하면

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^{n-k}, \qquad z \in D(0, R)$$

임을 알 수 있으며, 특히

$$f^{(k)}(0) = k! a_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

를 얻는다. 따라서, 멱급수로 정의된 복소함수는 한없이 미분가능하고 다음 등식

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \qquad z \in D(0, R) \tag{12}$$

을 만족한다.

다음 장에서 정리 3.3.1 의 역이 성립함을 보인다. 다시 말하여 임의의 해석함수는 멱급수로 표현할 수 있으며, 따라서 한없이 미분가능하고 등식 (12) 가 성립함을 보인다. 열린구간에서 미분가능하다고 하여 두번 미분가능하다는 보장이 없는 실함수의 경우와 비교하면 매우 큰 차이가 있음을 알게 된다. 멱급수로 정의된 함수는 수렴영역 안의 임의의 점에서 다시 멱급수로 표현된다는 것은 직접 보일 수 있는데, 이는 실함수의 경우와 마찬가지이다.(4)

만일 급수 $\sum_n a_n z^n$ 의 수렴반경이 양수이고 원점 근방 $D(0, \epsilon)$ 위에서 $\sum_n a_n z^n = 0$ 이면 등식 (11) 에 의하여 모든 계수가 0 을 알 수 있다. 따라서 다음을 얻는다.

정리 3.3.2. 만일 두 멱급수 $\sum_n a_n z^n$ 와 $\sum_n b_n z^n$ 의 수렴반경이 양수이고, 적절한 양수 $\epsilon > 0$ 에 대하여 등식

$$\sum_n a_n z^n = \sum_n b_n z^n, \qquad z \in D(0, \epsilon)$$

이 성립하면, 임의의 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $a_n = b_n$ 이다.

이 정리는 멱급수로 표현되는 두 함수 $f(z)$ 와 $g(z)$ 가 원점을 포함하는 작은 열린원판에서 함수값이 같으면 두 함수는 같은 함수임을 말해 준다. 함수 $f(z) - g(z)$ 에 대하여 생각하면, 이를 다음과 같이 달리 표현할 수 있다. 만일 멱급수로 표현되는 함수 $f(z)$ 의 해집합 $\{z : f(z) = 0\}$ 이 작은 원판 $D(0, \epsilon)$ 을 포함하면 $f(z)$ 는 상수함수이다.

(4) 참고문헌 [김성기·김도한·계승혁, *해석개론, 개정판*, 서울대학교 출판부, 1995, 2002] 의 정리 6.4.2 를 참조하라.

이 정리는 해집합이 열린원판보다 더 '작은' 집합이라도 성립한다. 이를 위하여, 멱급수로 표현되는 함수 $f(z) = \sum_n a_n z^n$ 의 해집합 안에서 0 으로 수렴하는 수열 $\langle z_m \rangle$ 을 택할 수 있다고 하자 (단, $z_m \neq 0$). 이제, $f \neq 0$ 라 가정하고 모순을 찾아보자. 만일 $f \neq 0$ 이면 a_n 가운데 0 아닌 것이 있을 텐데, 그 중 처음 0 이 아닌 것을 a_k 라 하자. 그러면 함수 $f(z)$ 는 다음

$$f(z) = z^k \left(a_k + a_{k+1} z + \cdots + a_{k+n} z^n + \cdots\right)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 만일 $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n} z^n$ 이라 두면, 각 $m = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $g(z_m) = 0$ 이고 함수 $g(z)$ 가 연속이므로

$$a_k = g(0) = \lim_{m \to \infty} g(z_m) = 0$$

이 되어 모순이다. 따라서, 다음이 증명되었다.

정리 3.3.3. 멱급수로 표현되는 함수 $f(z) = \sum_n a_n z^n$ 가 주어져 있다. 만일 0 으로 수렴하는 복소수열 $\langle z_m \rangle$ (단, $z_m \neq 0$) 위에서 $f(z_m) = 0$ 이면 $f(z) = 0$ 이다.

이 정리는 얼핏 보면 매우 놀라운 정리이다. 그러나, n-차 다항식을 결정하기 위하여 $n+1$ 개의 점 위에서 함수값만 알면 된다는 것을 생각하면 그리 놀라운 것은 아니다. 멱급수로 표현되는 함수를 결정하기 위해서는 적어도 무한개의 점에서 함수값이 정해져야 한다는 것인데, 그 핵심은 그 무한개의 점들이 한 곳에 모여 있어야 한다는 것이다. 예를 들어 $\sin z$ 나 $\cos z$ 는 그 해집합이 무한 집합이지만 그 점들이 수렴하지 않고 서로 떨어져 있으므로 정리 3.3.3 이 적용되지 않는다.

지난 2.3 절에서 정의한 함수 e^z, $\cos z$, $\sin z$ 들의 미분을 구하면

$$\frac{de^z}{dz} = e^z, \qquad \frac{d\cos z}{dz} = -\sin z, \qquad \frac{d\sin z}{dz} = \cos z$$

등이 성립함을 바로 확인할 수 있다. 만일 복소수 $\alpha \in \mathbb{C}$ 를 고정하고 $f(z) = e^z e^{\alpha - z}$ 두면 $f'(z) = 0$ 이다. 그런데 $f(0) = e^\alpha$ 이므로 정리 3.2.3 을 적용하면 임의의 $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여

$$e^z e^{\alpha - z} = e^\alpha, \qquad z \in \mathbb{Z}$$

임을 알 수 있다. 이 식에서 $\alpha - z = w$ 라 두면 지난 2.3 절의 등식 (12), 즉 지수법칙 $e^{z+w} = e^z e^w$ 을 얻는다.

지금까지 모든 논의는 $\sum_n a_n z^n$ 형태의 멱급수에 관하여 논하였지만, 이를 평행이동하면 $\sum_n a_n (z - z_0)^n$ 형태의 멱급수에 대해서도 물론 꼭 같은 이야기를 할 수 있다.

보기 1. 지난 2.2 절의 보기 3 에서 보았듯이

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad |z| < 1 \tag{13}$$

이 성립함을 알고 있다. 한편 $|z| = 1$ 이면 $\lim_n z^n \neq 0$ 이므로 $\sum_n z^n$ 은 수렴하지 않는다. 등식 (13) 의 양변을 미분하면

$$1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots = \frac{1}{(1-z)^2}, \qquad |z| < 1$$

임을 알 수 있고, 따라서 등식

$$z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \cdots = \frac{z}{(1-z)^2}, \qquad |z| < 1$$

를 얻는다. 예를 들어 $z = \dfrac{1}{2}$ 를 대입하면 등식 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$ 를 얻는다. 다시 양변을 미분하고 z 를 곱하면

$$z + 4z^2 + 9z^3 + 16z^4 + \cdots n^2 z^n + \cdots = \frac{z + z^2}{(1-z)^3}$$

을 얻는다. □

문제 3.3.2. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}$ 와 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}$ 의 값을 구하여라.

보기 2. 멱급수

$$\Lambda(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} z^n = z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \cdots$$

의 수렴반경이 1 임은 바로 확인되는데, 이를 **로그급수**라 부른다. 로그급수의 도함수는

$$\Lambda'(z) = 1 - z + z^2 - \cdots = \frac{1}{1+z}$$

로 주어진다. □

문제 3.3.3. 열린원판 $|z| < 1$ 위에서 $\Lambda(z) = \mathrm{Log}\,(1+z)$ 임을 보여라.

3.4. 연습문제

3.4.1. 영역 Ω 에서 정의된 복소함수 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 대하여 다음이 동치임을 보여라.

(가) 복소함수 f 가 점 $\alpha \in \Omega$ 에서 미분가능하다.

(나) 실함수 $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ 가 점 $\alpha \in \Omega$ 에서 미분가능하고, $f'(\alpha) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 를 복소함수로 이해하였을 때 선형사상이다.

3.4.2. 다음 함수들이 어떤 점들에서 코시–리만 방정식을 만족하는지 살펴보아라. 또한, 어떤 점들에서 미분가능한지 살펴보아라.

(가) $f(z) = \overline{z}^2$ (나) $f(z) = x^2 - y^2$

(다) $f(z) = 2xyi$ (라) $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$

(마) $f(z) = z\mathrm{Re}\, z$ (바) $f(z) = z|z|$

3.4.3. 미분가능함수 $f(z)$ 에 대하여 다음 등식

$$|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

이 성립함을 보여라.

3.4.4. 다음 함수들이 복소평면 전체에서 해석함수가 될 상수 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 의 조건을 구하여라.

(가) $f(z) = x + ay - i(bx + cy)$
(나) $f(z) = ax^2 - by^2 + icxy$
(다) $f(z) = e^x \cos ay + ie^x \sin(y + b)$
(라) $f(z) = a(x^2 + y^2) + ibxy$

3.4.5. 함수 $f(z)$ 와 $g(z)$ 가 z_0 에서 미분가능하고 $f(z_0) = g(z_0) = 0$ 이라고 하자. 만일 $g'(z_0) \neq 0$ 이면 다음 등식

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

이 성립함을 보여라.

3.4.6. 다음 극한이 존재하는지 살펴보고, 존재하는 경우 그 극한값을 구하여라.

(가) $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{3z}$ (나) $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{z^2}{|z|}$
(다) $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{2 \sin z}{e^z - 1}$ (라) $\displaystyle\lim_{z \to 0} z \sin \frac{1}{z}$

3.4.7. 다음 함수들이 조화함수임을 보여라. 또한 $u + iv$ 가 해석함수가 되도록 함수 v 를 정하여라.
(가) $u(x, y) = ax + by$ (단, $a, b \in \mathbb{R}$ 는 상수)
(나) $u(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \neq 0$
(다) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$
(라) $u(x, y) = \operatorname{Arg}(x + iy), \quad -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$
(마) $u(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$

3.4.8. 함수 $u(x, y) = ax^2y - y^3 + xy$ 가 조화함수가 될 실수 $a \in \mathbb{R}$ 의 조건을 구하여라. 또한, 이 때 $u + iv$ 가 해석함수가 되도록 함수 v 를 정하여라.

3.4.9. 이변수함수 u 와 v 가 각각 조화함수이고 복소함수 $u + iv$ 가 해석함수라 하자. 이 때, 두 함수의 곱 uv 가 조화함수임을 보여라. 또한 두 조화함수의 곱이 조화함수가 되기 위한 일반적인 조건은 무엇인지 알아 보아라.

3.4.10. 지난 2.2 절의 보기 2 에서 정의한 이항급수 $B_\alpha(z)$ 를 생각하자.
(가) 이항급수 $B_\alpha(z)$ 의 도함수가

$$B'_\alpha(z) = \alpha B_{\alpha-1}(z) = \frac{\alpha}{1 + z} B_\alpha(z), \qquad |z| < 1$$

로 주어짐을 보여라.

(나) 이항급수와 로그급수 사이에 다음 관계식

$$B_\alpha(z) = e^{\alpha\Lambda(z)}, \qquad |z| < 1$$

이 성립함을 보여라.

(다) 관계식

$$B_\alpha(z) = (1+z)^\alpha$$

이 어떤 방식으로 성립하는지 살펴보아라.

3.4.11. 멱급수

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \cdots$$

가 주어져 있다.

(가) 이 급수의 수렴반경과 도함수를 구하여라.

(나) 원점을 중심으로 하는 적절한 열린원판 위에서 다음 등식

$$A(\tan z) = z$$

이 성립함을 보여라. 여기서, 물론 $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ 로 정의된다.

(다) 등식

$$A(z) = \frac{1}{2i}\mathrm{Log}\,\frac{1+iz}{1-iz}, \qquad |z| < 1$$

이 성립함을 보여라.

(라) 등식

$$\tan(A(z)) = z, \qquad |z| < 1$$

이 성립함을 보여라.

3.4.12. 임의의 $z \in \{z : |z| < 1\}$ 에 대하여 부등식

$$|\mathrm{Log}\,(1+z) - z| < \frac{|z|^2}{2(1-|z|)}, \qquad |z| < 1$$

이 성립함을 보여라. 이를 이용하여 다음 등식

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z, \qquad z \in \mathbb{C}$$

이 성립함을 보여라.

3.4.13. 등식 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n$ 이 열린원판 $D = \{z : |z| < 1\}$ 위에서 성립하고, $z = e^{i\theta}$ 에서 급수 $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ 가 수렴한다고 가정하자.

(가) 만일 $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{ik\theta}$ 라 두면, 임의의 $z \in D$ 에 대하여 다음 등식

$$\frac{1}{e^{i\theta} - z} = e^{-i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\theta} z^n, \qquad \frac{f(z)}{e^{i\theta} - z} = e^{-i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n e^{-in\theta} z^n$$

이 성립함을 보여라.

(나) 임의의 $z \in D$ 에 대하여 등식

$$f(z) - \sigma = e^{-i\theta}(e^{i\theta} - z) \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_k - \sigma) e^{-in\theta} z^n$$

이 성립함을 보여라.

(다) 다음 등식

$$\sigma = \lim_{z \to e^{i\theta},\ z \in D} f(z)$$

이 성립함을 보여라.(5)

(라) 임의의 $z \in D$ 에 대하여 등식 $-\mathrm{Log}\,(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ 이 성립함을 보여라.

(마) 연습문제 2.4.4 를 이용하여 다음 무한합을 구하여라 (단, $e^{i\theta} \neq 1$).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\theta, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\theta$$

(5) 이를 아벨 정리라 부르는데, 여러 가지 급수의 합을 계산하는 데에 요긴하게 쓰인다.

Niels Henrik Abel (1802∼1829), 노르웨이에서 태어나 수학은 거의 독학으로 공부하고 베를린과 파리에 유학하였다. 대수학과 해석학에서 당시 최고의 수학자였으나, 당대에 별로 인정받지 못하고 고향으로 돌아온 뒤 2 년만에 요절하였다. 오차 이상 방정식이 대수적으로 풀리지 않는다는 것을 증명하였다.