

# 제 5 장    로랑급수와 유수계산

코시 적분정리의 최대 응용은 해석함수를 멱급수  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ 로 전개할 수 있다는 것이고, 특히, 계수  $a_n$ 들을 적분 형태로 쓸 수 있다는 것이다. 그런데 해석함수가 아니더라도 다음

$$\cdots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

과 같이 전개할 수 있으며, 각 계수들은 코시 적분공식에 나오는 계수를 그대로 쓰면 된다는 것이 로랑 정리이다. 코시 적분공식을  $n = -1$ 인 경우 살펴보면 그대로 적분값이 된다. 따라서, 이는 적분값을 구하는 데에 큰 도움이 되는데, 이를 이용한 적분 계산을 유수 계산이라 한다. 유수 계산은 선적분을 통하여 원시함수를 구할 수 없는 함수들의 정적분을 구하는 데에 큰 도움이 될 뿐 아니라, 주어진 곡선 내부에 있는 근의 개수를 구하는 등 이론적인 측면에서도 매우 중요한 역할을 한다.

## 5.1. 특이점과 로랑급수

함수  $f(z)$ 가 어떤 점에서 해석함수가 아닐 때, 이 점을  $f(z)$ 의 특이점이라 한다. 만일 함수  $f(z)$ 가  $z_0$ 에서 해석적이지 않으나 적절한 영역  $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$  위에서 해석적이면  $z_0$ 를  $f(z)$ 의 고립특이점이라

부른다. 예를 들어서  $z = \pm 1$  은 함수  $\frac{1}{z^2 - 1}$  의 고립특이점이고,  $z = 0$  은  $e^{1/z}$  의 고립특이점이다.

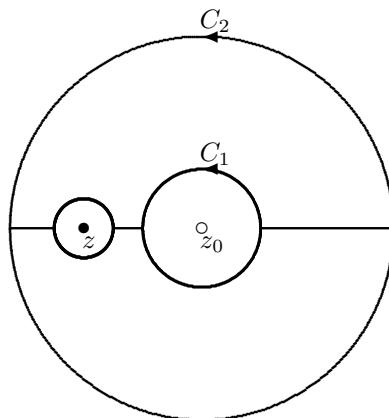
지난 4 장에서 공부한 코시 적분공식은 곡선의 내부를 포함하는 영역에서 주어진 함수가 해석적인 경우에 한하여 적용할 수 있었는데, 이 절에서는 곡선 내부에 특이점이 있는 경우 어떻게 되는지 알아보자. 영역  $\{z : r < |z - z_0| < R\}$  위에서 해석함수  $f(z)$  가 정의되어 있을 때 (단,  $0 \leq r < R$ ), 이 안에 있는 두 원

$$C_1 : |z - z_0| = R_1, \quad C_2 : |z - z_0| = R_2, \quad (r < R_1 < R_2 < R)$$

을 생각하자. 그러면, 지난 4.2 절의 등식 (4)를 증명하는 과정과 꼭 같은 과정을 거치고 코시 적분정리를 적용하면 두 원  $C_1$  과  $C_2$  사이에 있는 임의의 점  $z$ 에 대하여 다음 등식

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (1)$$

이 성립함을 바로 알 수 있다.



이제부터는 정리 4.3.2의 증명과정과 같은 방식을 따른다. 우선,  $\zeta$ 가 원  $C_2$  위에 있으면  $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$  이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\end{aligned}$$

이 된다. 만일  $\zeta$ 가 원  $C_1$  위에 있으면  $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$  이므로 같은 방식으로 계산하면

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^m}{(z - z_0)^{m+1}}$$

임을 알 수 있다. 이 두 식을 (1)에 넣고 무한합과 적분의 순서를 바꾸어 계산하면

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^n \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(\zeta) (\zeta - z_0)^m d\zeta \right] \frac{1}{(z - z_0)^{m+1}}\end{aligned}\tag{2}$$

이 된다. 위 등식에 나오는 적분은 원  $C_1, C_2$ 를 영역  $r < |z - z_0| < R$  안에 있으면서  $z_0$ 가 내부에 들어가는 단일폐곡선  $\Gamma$ 로 바꾸어도 변하지 않는다. 따라서, 각  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 에 대하여

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta\tag{3}$$

라 두면, 다음 등식

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{m=0}^{\infty} a_{-m-1} (z - z_0)^{-m-1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\end{aligned}$$

이 성립함을 알 수 있다. 이 급수를 점  $z_0$  를 중심으로 한 함수  $f(z)$  의 로랑<sup>(1)</sup>급수라 부른다.

**정리 5.1.1.** 영역  $\{z : r < |z - z_0| < R\}$  위에서 정의된 해석함수  $f(z)$  에 대하여  $a_n$  을 (3) 과 같이 놓으면 다음 등식

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R$$

이 성립한다.

**문제 5.1.1.** 정리 4.3.2 의 증명방법을 참고하여, 등식 (2) 를 증명하는 과정에서 무한합과 적분의 순서를 바꿀 수 있음을 보여라.

로랑급수를 구할 때 그 계수를 (3) 과 같이 적분으로 구할 필요는 없다. 대부분의 경우 멱급수전개를 이용하거나 등비급수를 이용하면 된다.

**보기 1.** 함수  $f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}$  은  $\mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$  위에서 해석함수이다. 다음 영역들

$$0 < |z - 1| < 2, \quad 2 < |z - 1|, \quad 1 < |z|$$

에서 함수  $f(z)$  의 로랑급수를 구해 보자. 우선  $f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}$  로 변형하자. 점  $z = 1$  을 중심으로 하는 영역의 경우  $\frac{1}{z-1}$  은 고칠 것 이 없다. 먼저  $0 < |z - 1| < 2$  의 경우  $\left| \frac{z-1}{2} \right| < 1$  을 염두에 두고 등비급수를 이용한다. 그러면

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1-z}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n$$

---

(1) Pierre Alphonse Laurent (1813~1854), 프랑스 토목기사. 그의 논문은 사후에 출판되었다.

을 얻는다. 따라서,

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 2 \quad (4)$$

임을 알 수 있다. 이제 영역  $2 < |z-1|$  에서는  $\left| \frac{2}{z-1} \right| < 1$  이므로

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{z-1}} = \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-2}{z-1} \right)^n$$

이다. 따라서,

$$f(z) = \frac{2}{z-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{(z-1)^n}, \quad |z-1| > 2 \quad (5)$$

이 된다.

영역  $|z| > 1$  에서는  $\left| \frac{1}{z} \right| < 1$  이므로

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{z} \right)^n, \quad \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{z} \right)^n$$

이므로

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{z^{2n+1}}, \quad |z| > 1 \quad (6)$$

임을 알 수 있다.  $\square$

**문제 5.1.2.** 영역

$$|z| < 1, \quad 0 < |z+1| < 2, \quad 2 < |z+1|$$

위에서  $f(z) = \frac{2}{z^2-1}$  의 로랑급수를 구하여라.

**문제 5.1.3.** 함수  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  에 대하여, 다음 영역에서 로랑급수를 구하여라.

- (가)  $|z| < 1$       (나)  $1 < |z| < 2$       (다)  $2 < |z|$

**보기 2.** 만일  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  라면,  $\sin z$ 의 벽급수전개를 이용하여 영역  $|z| > 0$  위에서

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{1}{3!} z^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n} + \cdots, \quad |z| > 0 \quad (7)$$

임을 알 수 있다. 마찬가지로,

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}, \quad |z| > 0 \quad (8)$$

이다.  $\square$

**보기 3.** 삼각함수  $\sin z$ 는  $z = 0$ 에서 균을 가지므로 함수  $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ 는  $z = 0$ 에서 고립특이점을 가지는데, 이 함수의 로랑급수를 구해 보자. 우선  $\frac{\sin z}{z}$ 는 등식 (7)에서 보듯이 벽급수전개가 가능하므로  $z = 0$ 에서 함수값을 1이라 두면 사실상 해석함수라 할 수 있고,  $\frac{z}{\sin z}$  역시  $z = 0$ 에서 해석함수이다. 이 함수의 벽급수전개가  $\sum_n a_n z^n$ 이라면 등식 (7)에 의하여

$$\left(1 - \frac{1}{3!} z^2 + \frac{1}{5!} z^4 + \cdots\right) (a_0 + a_1 z + a_2 + z^2 + \cdots) = 1$$

이 성립해야 한다. 따라서,

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 - \frac{1}{3!} a_0 &= 0 \\ a_2 - \frac{1}{3!} a_1 + \frac{1}{5!} a_0 &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

가 성립해야 하고, 이로부터

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{6}, \quad a_2 = \frac{7}{360}, \quad \dots$$

를 얻는다. 따라서,

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{6} z + \frac{7}{360} z^2 + \cdots\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{6} + \frac{7}{360} z + \cdots$$

임을 알 수 있다.  $\square$

로랑급수는 (7)에서 보듯이 경우에 따라서 멱급수  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ 의 꼴이 된다. 이 경우,  $f(z_0) = a_0$  라 정의하면  $f(z)$ 는 사실상 해석함수이다.

**정리 5.1.2.** (리만) 점  $z = z_0$ 에서 고립특이점을 가지는 해석함수  $f(z)$ 의 로랑급수가  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ 으로 주어질 때, 다음은 동치이다.

- (가) 각  $n = -1, -2, \dots$ 에 대하여  $a_n = 0$ 이다.
- (나) 함수  $f(z)$ 는  $z_0$ 의 적절한 근방 위에서 유계이다.
- (다)  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$ 이다.

증명: 먼저 (가)  $\Rightarrow$  (나)  $\Rightarrow$  (다)는 당연하므로, (다)를 가정하고 (가)를 증명하면 된다. 이를 위하여, 함수  $g(z)$ 와  $h(z)$ 를 다음

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z), & z \neq z_0, \\ 0 & z = z_0 \end{cases} \quad h(z) = (z - z_0)g(z)$$

과 같이 정의한다. 그러면

$$h'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$$

이므로  $h(z)$ 는  $z_0$ 에서 해석적이다. 그런데  $h(0) = h'(0) = 0$ 이므로,  $z_0$ 의 근방에서 멱급수전개

$$h(z) = a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

를 가진다. 따라서,

$$g(z) = a_2(z - z_0) + a_3(z - z_0)^2 + \cdots + a_{n+1}(z - z_0)^n + \cdots$$

$$f(z) = a_2 + a_3(z - z_0) + \cdots + a_{n+2}(z - z_0)^n + \cdots$$

이다.  $\square$

한편 (4)에서 보듯이 로랑급수가 다음 형태

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_{-n} \neq 0 \quad (9)$$

로 주어지는 경우가 있다. 이 경우

$$\begin{aligned} g(z) &= (z - z_0)^n f(z) \\ &= a_{-n} + a_{-n+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + a_0(z - z_0)^n \cdots \end{aligned} \quad (10)$$

는  $g(z_0) \neq 0$  인 해석함수이고

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}, \quad g(z_0) \neq 0 \quad (11)$$

을 만족한다. 이 때, 함수  $f(z)$ 는  $z = z_0$ 에서  $n$ -중극을 가진다고 말한다. 혹은 그냥 간단히  $z = z_0$ 에서 극을 가진다고 말한다. 이는 근, 혹은  $n$ -중근에 대비되는 개념이다. 함수  $f(z)$ 가  $z = z_0$ 에서  $n$ -중근을 가진다는 말은

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z), \quad g(z_0) \neq 0$$

을 만족하는 해석함수  $g(z)$ 가 존재한다는 뜻이다. 이 경우,  $f(z)$ 의 멱급수는

$$f(z) = a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots, \quad a_n \neq 0 \quad (12)$$

로 주어진다. 앞으로, 1-중극 및 1-중근은 각각 단극 및 단근이라 부른다.

만일 함수  $f(z)$ 가  $z = z_0$ 에서  $n$ -중극을 가지면 등식 (11)에 의하여  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$ 이 성립하는데, 다음 정리에서는 그 역이 성립함을 증명 한다. 일반적으로  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$ 이 성립할 때, 복소함수  $f(z)$ 가  $\infty$ 로 수렴한다고 말하고 이를

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

라 쓴다. 만일 함수의 변역을 리만구면  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  으로 생각하면, 이는  $z$  가  $z_0$  에 가까워짐에 따라  $f(z)$  가 리만구면의 한 점  $\infty$  에 가까워짐을 의미한다.

**정리 5.1.3.** 해석함수  $f(z)$  가 점  $z = z_0$  에서 고립특이점을 가질 때,  $z = z_0$  에서 극일 필요충분조건은  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  이다. 또한,  $n$ -중극이 될 필요충분조건은

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = A, \quad A \neq 0, \quad A \neq \infty$$

이다.

증명: 만일  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  이면,  $z_0$  의 적절한 근방에서  $\frac{1}{f(z)}$  는 유계 이므로 정리 5.1.2에 의하여 역급수전개  $\sum_n a_n(z - z_0)^n$  을 가지는데,  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$  이므로  $a_0 = 0$  이다. 따라서, 처음으로 0 아닌  $a_n$  를 잡으면

$$\frac{1}{f(z)} = a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots, \quad a_n \neq 0$$

임을 알 수 있다. 따라서,

$$\frac{1}{(z - z_0)^n f(z)} = a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \cdots, \quad a_n \neq 0$$

이므로 그 역수인  $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$  가  $g(z_0) \neq 0$  인 해석함수이고, 따라서  $f(z)$  는  $z = z_0$  에서  $n$ -중극을 가진다.  $\square$

로朗급수의 계수 (3)에서, 특히  $n = -1$  인 경우를 보면

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$$

이므로 이는 바로 적분값을 구하는 데에 큰 도움이 된다.

**보기 4.** 지금까지 살펴본 바에 의하면 등식 (4), (5), (6) 으로부터

$$\int_{|z-1|=1} \frac{2z dz}{z^2 - 1} = 2\pi i, \quad \int_{|z-1|=3} \frac{2z dz}{z^2 - 1} = 4\pi i, \quad \int_{|z|=2} \frac{2z dz}{z^2 - 1} = 4\pi i$$

등을 얻는다.  $\square$

문제 5.1.4. 다음 적분값을 계산하여라.

$$\begin{array}{ll} (\text{가}) \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz & (\text{나}) \int_{|z|=1} e^{1/z} dz \\ (\text{다}) \int_{|z|=1} \frac{1}{\sin z} dz & \end{array}$$

## 5.2. 유수정리와 편각원리

만일 함수  $f(z)$  가  $z = z_0$  에서 고립특이점을 가지면 적절한 영역  $D(z_0, r + \epsilon) \setminus \{z_0\}$  위에서 함수가 해석적이고,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

라 두면 로랑급수

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r$$

를 얻는다. 이 때 나오는 계수  $a_{-1}$  를  $z = z_0$  에서 함수  $f(z)$  의 유수라 하고, 이를  $\text{Res}(f; z_0)$  로 표시한다. 만일  $\Gamma$  가  $z_0$  를 한 바퀴 둘러싸는 단일폐곡선이고 그 내부에 또 다른 특이점이 없다면

$$\text{Res}(f; z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz \quad (13)$$

이다. 앞의 5.1 절의 보기 4 에서 보았듯이 곡선  $\Gamma$  내부에 또 다른 특이점이 있으면 위 등식 (13) 은 성립하지 않는다.

보기 1. 앞의 5.1 절에서 살펴본 보기 1, 보기 2, 보기 3 에 의하면

$$\text{Res}\left(\frac{2}{z^2 - 1}; 1\right) = 1, \quad \text{Res}\left(\frac{\sin z}{z}; 0\right) = 0$$

임을 알 수 있다. 한편

$$\operatorname{Res} \left( e^{1/z}; 0 \right) = 1, \quad \operatorname{Res} \left( \frac{1}{\sin z}; 0 \right) = 1$$

이다.  $\square$

많은 경우, 특히  $z = z_0$ 에서 극을 가지는 경우 로朗급수를 모두 계산하지 않고도 유수를 계산할 수 있다. 함수  $f(z)$ 가  $z = z_0$ 에서  $n$ -중극을 가지고 그 로朗급수가 (9)와 같이 주어지면 함수  $g(z)$ 를 (10)으로 정의하자. 그러면

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(z_0)$$

임을 알 수 있다. 따라서, 함수  $f(z)$ 가  $z = z_0$ 에서  $n$ -중극을 가지면 다음 공식

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] \quad (14)$$

을 얻는다.

**보기 2.** 적분값  $\int_{|z-1|=1} \frac{z^4 + z^3 + 5}{(z-1)^3} dz$ 를 계산하여 보자. 먼저 코시 적분공식을 이용할 수 있다. 이 경우  $g(z) = z^4 + z^3 + 5$ 라 두면  $g''(1) = 18$ 이므로 구하는 적분값은

$$\int_{|z-1|=1} \frac{g(z)}{(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} g''(1) = 18\pi i$$

이다. 한편, 유수를 먼저 계산하면

$$\operatorname{Res}(f; 1) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 1} g''(z) = \frac{1}{2} g''(1) = 9$$

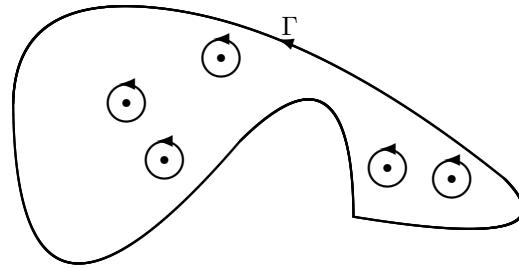
이므로 (13)에 의하여 같은 결과를 얻는다.  $\square$

이제부터 단일폐곡선  $\Gamma$  내부에 고립특이점  $z_1, z_2, \dots, z_n$ 이 있는 경우를 생각한다. 이 경우 점  $z_i$ 를 중심으로 하는 원  $C_i : |z - z_i| = r$ 를

그렸을 때,  $r > 0$  을 충분히 작게 하여  $C_1, C_2, \dots, C_n$  이 서로 겹치지 않고  $\Gamma$  내부에 있도록 할 수 있다. 이제, 지난 4.2 절의 등식 (4)를 증명하는 것과 같은 방법을 사용하면

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{|z-z_i|=r} f(z) dz$$

이므로, (13)에 의하여 다음 정리를 얻는다.



**정리 5.2.1.** (유수정리) 단일폐곡선  $\Gamma$  가 영역  $\Omega$  안에 놓여 있다. 함수  $f(z)$  가  $\Gamma$  내부에 있는 고립특이점  $z_1, z_2, \dots, z_n$  을 제외한  $\Omega$  위에서 해석함수라 하자. 그러면 등식

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \text{Res}(f; z_k)$$

이 성립한다.

**보기 3.** 함수  $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-2)}$  의 선적분을 여러 곡선에 대하여 구해 보자. 먼저 유수를 구하면  $z=0$  에서  $f(z)$  는 2-중극을 가지므로

$$\begin{aligned} \text{Res}(f; 0) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left( \frac{z+1}{z-2} \right) = -\frac{3}{4} \\ \text{Res}(f; 2) &= \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z+1}{z^2} = 2 \end{aligned}$$

이다. 따라서,

$$\begin{aligned}\int_{|z-2|=1} \frac{z+1}{z^2(z-2)} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f; 2) = 4\pi i \\ \int_{|z|=1} \frac{z+1}{z^2(z-2)} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f; 0) = -\frac{3}{2}\pi i \\ \int_{|z|=3} \frac{z+1}{z^2(z-2)} dz &= 2\pi i (\operatorname{Res}(f; 0) + \operatorname{Res}(f; 1)) = \frac{5}{2}\pi i\end{aligned}$$

를 얻는다.  $\square$

**문제 5.2.1.** 다음 적분값을 구하여라.

$$(가) \int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz \quad (나) \int_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z(z-2)} dz$$

**보기 4.** 적분값  $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z(e^z - 1)}$  을 구해보자. 우선  $e^z - 1$  의 근은  $2\pi i$  의 정수배이므로  $|z|=1$  내부의 특이점은  $z=0$  뿐이다. 그런데

$$z(e^z - 1) = z^2 + \frac{1}{2!}z^3 + \frac{1}{3!}z^4 + \dots$$

이므로  $\frac{1}{z(e^z - 1)}$  는  $z=0$ 에서 2-중극을 가진다. 따라서, 구하는 적분값은

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z(e^z - 1)} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{e^z - 1} \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1 - ze^z}{(e^z - 1)^2}$$

인데, 이 극한값을 구하기가 번거로우면 바로 로랑급수를 구할 수도 있다. 실제로

$$\frac{1}{z(e^z - 1)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2!}z + \frac{1}{3!}z^2 + \dots} = \frac{1}{z^2} \left( 1 - \frac{1}{2}z + \dots \right)$$

이므로

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z(e^z - 1)} = 2\pi i \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) = -\pi i$$

이다.  $\square$

문제 5.2.2. 다음 적분값을 구하여라.

$$(가) \int_{|z|=1} \frac{1}{\cos z} dz \quad (나) \int_{|z|=2} \frac{1}{\cos z} dz$$

점  $z = z_0$ 에서 함수  $f(z)$ 의 로랑급수  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  를 구하였을 때, 그 계수  $\{a_n : n = -1, -2, \dots\}$  가운데 0 아닌 것이 유한 개 뿐이라 하자. 이 때,

$$\text{Ord}(f; z_0) = \min\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$$

이라 둔다. 만일 함수  $f(z)$  가  $z = z_0$ 에서  $n$ -중극을 가지면 등식 (9)에서 보듯이  $\text{Ord}(f; z_0) = -n$  이다. 한편, 함수  $f(z)$  가  $z = z_0$ 에서  $n$ -중근을 가지면 등식 (12)에서 보듯이  $\text{Ord}(f; z_0) = n$  이다.

이제 함수  $\text{Ord}(f; z_0) = m$ 이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} f(z) &= a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots \\ &= a_m(z - z_0)^m [1 + g(z)] \end{aligned}$$

로 쓸 수 있다. 여기서,  $g(z)$ 는  $g(z_0) = 0$ 인 해석함수이다. 직접 계산하면

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{1 + g(z)}$$

을 얻는다. 따라서,

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(\frac{f'}{f}; z_0\right) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{m}{z - z_0} dz = m = \text{Ord}(f; z_0) \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 여기서 물론  $\Gamma$ 는  $z_0$ 를 제외하면 그 내부에 극이나 근이 없도록 잡는다. 유수정리를 이용하면 다음을 얻는다.

**정리 5.2.2.** (편각 원리) 단일폐곡선  $\Gamma$ 가 영역  $\Omega$  안에 놓여 있다. 함수  $f(z)$ 가  $\Gamma$  내부에 있는 고립특이점  $z_1, z_2, \dots, z_n$ 을 제외한  $\Omega$  위에

서 해석함수이고, 모든 고립특이점에서 극을 가진다고 하자. 또한, 함수  $f(z)$ 는  $\Gamma$  내부의 점  $z_{n+1}, z_{n+2}, \dots, z_{n+m}$ 에서 근을 가진다고 하자. 그러면 등식

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{m+n} \text{Ord}(f; z_k)$$

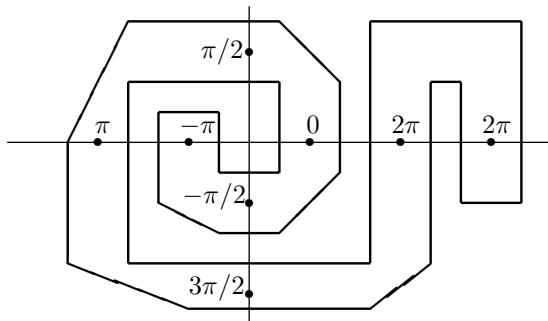
이 성립한다.

편각 원리는 다음과 같이 쉽게 풀어 쓸 수 있다. 단일폐곡선  $\Gamma$ 의 내부에 근이  $N$  개 있고 극이  $P$  개 있으면

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

라는 것이다. 여기서,  $n$ -중근은 물론  $n$  개의 근으로 간주하며  $n$ -중극도 마찬가지이다.

여기서 이 적분값이 항상 정수가 되는데, 이제 편각원리가 뜻하는 바를 알아 보자. 우선  $\Omega$ 가 원점을 포함하지 않는 단순연결영역이라 하자. 그러면  $\Omega$ 에 속하는 각각의  $z$ 에 편각을 하나씩 대응시켜주는 연속 함수가 존재한다. 이러한 연속함수를  $\Omega$ 에 정의된 편각의 가지라고 부르며 보통  $\arg^*$ 로 표기한다. 편각의 가지는  $2\pi i$ 의 정수배 차이를 무시했을 때 일의적으로 존재한다. 지난 3.2 절의 등식 (7)에서 보는 바와 같이  $\text{Arg } z$ 는 복소평면에서 원점 및 음의 실수축을 제거한 영역에 정의된 편각의 가지 가운데 하나이다.



문제 5.2.3. 위 논의에서 영역  $\Omega$  가 원점을 포함하지 않는 단순연결영역이라는 가정이 왜 필요한가 설명하여라.

원점을 포함하지 않는 단순연결영역  $\Omega$  에서 함수  $\log^* z$  다음

$$\log^* z = \log |z| + i \arg^* z, \quad z \in \mathbb{Z}$$

과 같이 정의한다. 지난 3.2 절의 보기 3에서 살펴보았듯이  $\arg^* z$  는 주어진 점 근방에서  $\arctan \frac{y}{x}$  혹은  $-\arctan \frac{x}{y}$  의 상수차로 표시될 수 있기 때문에  $\log^* z$  는  $\text{Log } z$  의 경우와 같이 해석함수이다. 이렇게 정의된  $\log^* z$  를  $\Omega$  에 정의된 로그의 가지라고 부른다. 편각의 가지와 마찬가지로 로그의 가지도  $2\pi i$  의 정수배 차이를 무시했을 때 일의적으로 존재한다. 또한 지난 3.2 절의 보기 3에서 살펴 본  $\text{Log } z$  의 경우와 마찬가지로 다음 등식

$$e^{\log^* z} = z, \quad \frac{d}{dz} \log^* z = \frac{1}{z}, \quad z \in \Omega,$$

이 성립함은 바로 확인된다.

단순연결일 필요가 없는 일반적인 영역  $\Omega$  에서 정의된 해석함수  $f(z)$  와 곡선  $\Gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  가 주어져 있고,  $f(z)$  에 의한 곡선  $\Gamma$  의 상이 원점을 포함하지 않는 단순연결영역  $\tilde{\Omega}$  에 포함된다고 가정하자. 그러면 연쇄법칙에 의하여

$$\frac{d}{dz} \log^* f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad z \in \Omega$$

가 성립하므로, 정리 4.1.1 에 의하여 다음 등식

$$\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \log^* f(\Gamma(b)) - \log^* f(\Gamma(a))$$

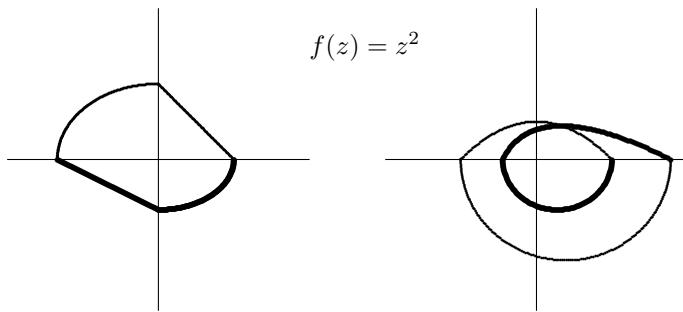
이 성립한다. 즉, 이 적분의 실수부와 허수부는 각각 곡선  $\Gamma$  를 따라 점  $z$  가 이동함에 따른  $\log |f(z)|$  와  $\arg^* f(z)$  의 변화량이다. 만일  $\Gamma$  가 닫힌곡선이면 이 적분의 실수부는

$$\log |f(\Gamma(b))| - \log |f(\Gamma(a))| = 0$$

이 된다. 또한, 곡선의 정의역을 잘게 나누므로써, 곡선  $f \circ \Gamma$ 의 각 부분이 단순연결영역에 들어가도록 할 수 있다. 따라서, 이 적분의 값

$$i [\arg^* f(\Gamma(b)) - \arg^* f(\Gamma(a))]$$

은  $z$ 가 곡선  $\Gamma$ 를 따라 한 바퀴 돌에 따른  $f(z)$ 의 편각의 변화량에  $i$ 를 곱한 것이다. 그런데,  $\Gamma$ 가 닫힌곡선이면 이 편각의 변화량은 원점을 지나지 않는 닫힌곡선  $f \circ \Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  이 원점을 시계반대방향으로 감은 횟수에  $2\pi$ 를 곱한 값이다.



따라서 편각원리가 뜻하는 바는 정리에 주어진 조건을 가정했을 때, 단일폐곡선  $\Gamma$ 의 내부에서 함수  $f$ 가 가지는 근과 극의 개수를 각각  $N, P$  라 하면, 곡선  $f \circ \Gamma$ 이 원점을 시계반대방향으로  $N - P$  번 감는다는 것이다. 편각 원리는 근의 분포를 알아내는 데에 매우 유용하게 쓰인다.

**정리 5.2.3.** (루셰<sup>(2)</sup>) 단일폐곡선  $\Gamma$ 가 영역  $\Omega$  안에 놓여 있고, 함수  $f(z)$ 와  $g(z)$ 가  $\Omega$  위에서 해석적이다. 만일 곡선  $\Gamma$  위의 모든 점  $z \in \Gamma$ 에 대하여 부등식

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \quad z \in \Gamma$$

(2) Eugène Rouché (1832~1910), 프랑스 수학자

이 성립하면,  $\Gamma$  내부에서  $f(z)$  와  $g(z)$  는 같은 수의 근을 가진다.

증명: 먼저  $h(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$  라 두면

$$\frac{h'}{h} = \frac{f}{g} \cdot \frac{g'f - gf'}{f^2} = \frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}$$

이다. 따라서,  $\Gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  이면

$$\int_{\Gamma} \frac{g'}{g} - \int_{\Gamma} \frac{f'}{f} = \int_{\Gamma} \frac{h'}{h} = \int_a^b \frac{h'(\Gamma(t))}{h(\Gamma(t))} \Gamma'(t) dt = \int_{h \circ \Gamma} \frac{1}{z} dz$$

이다. 그런데 가정에 의하면  $|h(\Gamma(t)) - 1| = \left| \frac{g(\Gamma(t))}{f(\Gamma(t))} - 1 \right| < 1$  이다. 이는 곡선  $h \circ \Gamma$  가 열린원판  $D(1, 1)$  위에 있음을 말한다. 그런데 함수  $\frac{1}{z}$  는  $D(1, 1)$  위에서 해석적이므로

$$\int_{\Gamma} \frac{g'}{g} - \int_{\Gamma} \frac{f'}{f} = \int_{h \circ \Gamma} \frac{1}{z} dz = 0$$

이고, 편각 원리로부터 원하는 결론을 얻는다.  $\square$

루셰 정리를 이용하면 대수학의 기본 정리를 증명하는 데에 그치지 않고 근의 절대값이 어느 정도까지 커질 수 있는지 알아볼 수 있는데, 기본적인 방법은 함수  $z^n$  이  $n$ -중근을 가진다는 사실을 이용하는 것이다. 먼저

$$p_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = p_{n-1}(z) + a_n z^n$$

라 두자 (단,  $a_n \neq 0$ ). 만일  $|z| > 1$  이면

$$\begin{aligned} \left| \frac{p_{n-1}(z)}{a_n z^n} \right| &\leq \frac{1}{|a_n||z|^n} (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|) |z|^{n-1} \\ &= \frac{1}{|a_n||z|} (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|) \end{aligned}$$

이다. 이제,  $R = \max \left\{ 1, \frac{1}{|a_n|} (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|) \right\}$  라 두면,

$$|z| = R + \epsilon \implies |a_n z^n - p_n(z)| = |p_{n-1}(z)| < |a_n z^n|$$

이므로 루세 정리에 의하여  $p_n(z)$ 는 원  $|z| = R + \epsilon$  내부에  $a_n z^n$ 과 같은  $n$  개의 근을 가진다. 여기서,  $\epsilon > 0$ 은 임의의 양수이므로  $p_n(z)$ 는 원판  $\overline{D}(0, R)$  위에서  $n$  개의 근을 가진다.

**보기 5.** 다항식  $p(z) = z^5 + 6z^3 + 2z + 10$ 의 근의 위치를 살펴보자. 먼저  $|z| = 1$ 에서

$$|p(z) - 10| = |z^5 + 6z^3 + 2z| \leq |z|^5 + 6|z|^3 + 2|z| < 10$$

이므로  $p(z)$ 는 함수  $f(z) = 10$ 과 같은 개수의 근을 가진다. 그런데  $|z| = 1$  내부에서  $f(z) = 10$ 이 근을 가지지 않으므로  $p(z)$ 도  $|z| < 1$ 에서 근을 가지지 않는다. 이제  $|z| = 3$ 에서

$$|p(z) - z^5| = 6|z|^3 + 2|z| + 10 = 6 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 + 10 < 3^5 = |z^5|$$

이므로  $p(z)$ 는 원  $|z| = 3$  내부에서  $z^5$ 와 마찬가지로 다섯개의 근을 가진다. 단위원  $|z| = 1$ 에서는  $|p(z)| \geq 10 - |z^5 + 6z^3 + 2z| \geq 1$ 이므로 근을 가질 수 없다. 결국 다항식  $p(z)$ 의 모든 근은 영역  $1 < |z| < 3$  위에 있음을 알 수 있다.  $\square$

**문제 5.2.4.** 영역  $1 < |z| < 2$  안에 다항식  $2z^5 - 6z^2 + z + 1$  근이 몇 개 있는지 살펴보아라.

### 5.3. 실적분의 계산

실함수  $\frac{1}{1+x^2}$ 은  $\arctan x$ 의 도함수이므로

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

임을 잘 알고 있다. 이 적분의 값을 복소적분을 이용하여 구해 보자. 이를 위하여 각 양수  $R > 0$ 에 대하여 다음

$$C_R(t) = Re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi), \quad L_R(t) = t \quad (-R \leq t \leq R)$$

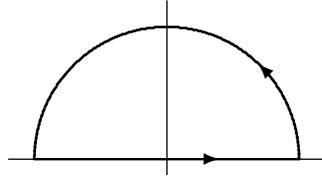
과 같이 정의된 반원  $C_R$  과 선분  $L_R$  을 생각하자. 이제 함수  $\frac{1}{1+z^2}$  를  $C_R + L_R$  을 따라서 선적분하는데, 반평면  $\operatorname{Im} z \geq 0$  에서  $z = i$  가 유일한 특이점이고  $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}; i\right) = \frac{1}{2i}$  이므로  $R > 1$  이면

$$\pi = \int_{C_R+L_R} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^2} + \int_{L_R} \frac{dz}{1+z^2} \quad (15)$$

이다. 그런데  $\int_{L_R} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2}$  이고

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leq \int_{C_R} \frac{1}{|1+z^2|} |dz| \leq \frac{1}{R^2-1} \cdot \pi R$$

이므로 (15) 에  $\lim_{R \rightarrow \infty}$  를 취하면 원하는 결론을 얻는다.



위에서 사용한 방법은 매우 전형적인 것이다. 만일 함수  $f(z)$  가 반평면  $\operatorname{Im} z \geq 0$  을 포함하는 영역에서 유한개의 특이점을 제외한 부분에서 해석함수이고 실직선  $\operatorname{Im} z = 0$  에서 균을 가지지 않는다고 하자. 만일 곡선  $C_R + L_R$  안에 모든 특이점이 들어갈 정도로  $R > 0$  을 크게 잡으면

$$\int_{-R}^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum \{\operatorname{Res}(f; z) : \operatorname{Im} z > 0\}$$

이 된다. 만일  $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 0$  이면,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \pi R \max\{|f(z)| : z \in C_R\} = 0$$

이다. 특히, 2 차 이상의 다항식  $p(z)$  가 실근을 가지지 않으면

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p(x)} dx = 2\pi i \sum \{ \text{Res}(p; z) : \text{Im } z > 0 \} \quad (16)$$

임을 알 수 있다.

**보기 1.** 예를 들어서  $p(z) = 1 + z^4$  이라 두면

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = 2\pi i \text{Res} \left( \frac{1}{p(z)}; e^{\pi i/4} \right) + 2\pi i \text{Res} \left( \frac{1}{p(z)}; e^{3\pi i/4} \right)$$

이다. 여기서  $p(z)$  를 인수분해하여 유수를 구하기란 매우 번거로운 일이다. 일반적으로  $f(z)$  가  $z = z_0$  에서 단근을 가지면 (14)에 의하여

$$\text{Res} \left( \frac{1}{f(z)}; z_0 \right) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

이다. 그런데,  $p'(e^{\pi i/4}) = 4e^{3\pi i/4}$ ,  $p'(e^{3\pi i/4}) = 4e^{\pi i/4}$  이므로

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = 2\pi i \left( \frac{1}{4} e^{-3\pi i/4} + \frac{1}{4} e^{-\pi i/4} \right) = \frac{\pi i}{2} \cdot (-\sqrt{2}i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

이다.  $\square$

**문제 5.3.1.** 적분값  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx$  를 구하여라.

**문제 5.3.2.** 적분값  $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx$  를 구하여라 (단,  $a > 0$ ).

다음에 계산할 특이적분

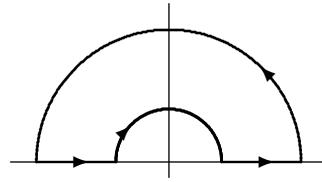
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (17)$$

은 푸리에급수를 공부할 때 매우 중요한 역할을 한다.<sup>(3)</sup>

---

(3) 선적분을 사용하지 않고 등식 (17) 을 계산하는 방법은 참고문헌 [김성기·김도한·계승혁, 해석개론, 개정판, 서울대학교 출판부, 1995, 2002] 의 8.1 절을 참조하라. 또 다른 방법으로 다음에 나오는 5.4 절을 참조하라.

**보기 2.** 함수  $\frac{e^{iz}}{z}$ 의 허수부가 실수축 위에서 우리가 원하는 함수  $\frac{\sin x}{x}$ 이다. 이 함수는 원점에서 극을 가지므로 이를 피하기 위하여,  $R$ 에서  $-R$  까지 시계반대방향으로 반원  $C_R$ 을 따라가고,  $-R$ 부터  $-r$  까지 선분을 따라가고 (단,  $0 < r < R$ ),  $-r$ 부터  $r$  까지 시계방향으로 반원  $C_r$ 을 따라가고, 마지막으로  $r$ 에서  $R$  까지 선분을 따라가는 단일폐곡선  $\Gamma$ 를 생각하자.



그러면

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz \\ &= \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx \end{aligned} \quad (18)$$

이다. 우선

$$\begin{aligned} \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx &= \int_r^R \left( \frac{e^{ix}}{x} - \frac{e^{-ix}}{x} \right) dx \\ &= 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

이다. 이제  $|e^{iRe^{i\theta}}| = e^{-R \sin \theta}$  이므로

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta$$

임을 알 수 있다. 그런데 구간  $[0, \frac{\pi}{2}]$  위에서  $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$  이므로

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R})$$

을 얻고, 따라서  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$  이다. 이제 선적분  $\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz$  를 계산할 차례인데, 보다 일반적으로 함수  $f(z)$  가  $z = 0$  에서 단극을 가질 때  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz$  를 계산해 보자. 이를 위하여

$$f(z) = \frac{\operatorname{Res}(f; 0)}{z} + g(z), \quad g(z) \text{ 는 원점에서 해석함수}$$

로 써 보면, 원점 근방에서  $g(z)$  는 연속이므로  $|g(z)| \leq M$  이다. 따라서,  $\left| \int_{C_r} g(z) dz \right| \leq M \cdot \pi r$  이므로

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz &= \operatorname{Res}(f; 0) \int_{C_r} \frac{dz}{z} + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} g(z) dz \\ &= -\pi i \operatorname{Res}(f; 0) \end{aligned}$$

이다. 이제  $\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}; 0\right) = 1$  이므로, 지금까지 계산을 (18) 에 넣으면

$$0 = -\pi i + 2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

이 되고, 이로부터 등식 (17) 을 얻는다.  $\square$

이제  $Q(x, y)$  가 이변수 유리식일 때,  $\int_{-\pi}^{\pi} Q(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$  를 구해보자. 지난 2.3 절의 (8) 을 고려하여

$$f(z) = \frac{1}{iz} Q\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

라 두자. 그러면

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) ir^{i\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} Q(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

가 된다. 따라서,  $Q(x, y)$  가 단위원 위에서 연속이면

$$\int_{-\pi}^{\pi} Q(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \sum \{\operatorname{Res}(f; z) : |z| < 1\} \quad (19)$$

임을 알 수 있다.

**보기 3.** 적분값  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta}$  를 계산해 보자. 여기서  $a+b\cos\theta \neq 0$  일 필요충분조건은  $|a| > |b|$  이므로  $a > |b| > 0$  를 가정한다. 우선  $Q(x, y) = \frac{1}{a+bx}$  이므로

$$f(z) = \frac{1}{iz} \cdot \frac{1}{a+b \cdot \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)} = \frac{-2i}{bz^2 + 2az + b}$$

이다. 함수  $f(z)$  는

$$z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \quad z_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

에서 단극을 가지는데, 이 중  $z_1$  만이 단위원 안에 들어간다. 이 때

$$\text{Res}(f; z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{-2i}{b(z - z_2)} = -\frac{i}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

이므로

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = 2\pi i \text{Res}(f; z_1) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad a > |b|$$

임을 알 수 있다.  $\square$

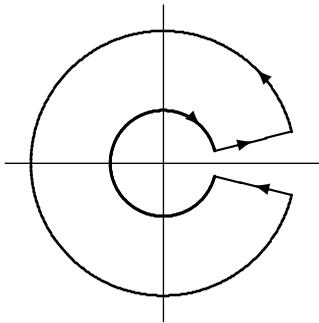
**문제 5.3.3.** 치환  $z = e^{i\theta}$ ,  $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$  을 이용하여

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = -2i \int_{|z|=1} \frac{dz}{bz^2 + 2az + b}$$

를 유도하여라.

무리함수가 포함되는 정적분의 값을 구할 때에는 매우 조심하여야 한다. 예를 들어서  $z^a = e^{a\log z}$  는 한 가지 값만 취하는 것이 아니기 때문에  $\log z$  가 한 가지 값을 취하도록 편각을 잘 제한해 주어야 한다. 예를 들어서  $\text{Log } z$  는  $\mathbb{C} \setminus \{z : \text{Re } z \leq 0, \text{Im } z = 0\}$  위에서 해석함수이다. 그러나, 피적분함수의 극점이 음의 실수축에 있는 경우에는 로그함수의 정의역을 이렇게 잡는 것이 적절하지 못할 수 있다.

**보기 4.** 적분값  $\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t} dt$  을 구하기 위하여  $f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z}$  라 두자 (단,  $0 < a < 1$ ). 이제 작은 편각  $\sigma > 0$  를 고정하고  $Re^{i\sigma}$  에서  $R^{-i\sigma}$  까지 시계반대방향으로 도는 원을  $C_1$  이라 한다. 이제  $0 < r < 1 < R$  이라 하고, 계속하여  $R^{-i\sigma}$  부터  $re^{-i\sigma}$  까지 가는 선분을  $L_-$ , 또  $re^{-i\sigma}$  부터  $re^{i\sigma}$  까지 시계방향으로 도는 원을  $C_2$  라 한다. 끝으로,  $re^{i\sigma}$  에서  $Re^{i\sigma}$  까지 가는 선분을  $L_+$  라 하자.



먼저 주어진 단일폐곡선의 내부를 포함하는 영역에서 로그함수가 해석함수가 되도록

$$\log z = \log |z| + i \arg z, \quad 0 < \arg z < 2\pi$$

라 둔다. 우선  $|z^{a-1}| = |e^{(a-1)\log z}| = e^{(a-1)\log |z|} = |z|^{a-1}$  이므로, 다음

$$\begin{aligned} |z| = R &\implies \left| \int_{C_1} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz \right| \leq \frac{R^{a-1}}{R-1} \cdot 2\pi R \\ |z| = r &\implies \left| \int_{C_2} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz \right| \leq \frac{r^{a-1}}{1-r} \cdot 2\pi r \end{aligned}$$

을 얻는다. 따라서  $\sigma$  의 값에 관계없이

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_2} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz = 0 \quad (20)$$

임을 알 수 있다. 이제, 곡선  $L_+$  와  $L_-$  에서 선적분을 계산하는데

$$(te^{i\sigma})^{a-1} = e^{(a-1)(\log t + i\sigma)} = t^{a-1} e^{i(a-1)\sigma}$$

이므로

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{L_+} f(z) dz = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_r^R \frac{t^{a-1} e^{i(a-1)\sigma}}{1 + te^{i\sigma}} e^{i\sigma} dt = \int_r^R \frac{t^{a-1}}{1+t} dt \quad (21)$$

이다. 한편 곡선  $L_-$  위에서는

$$(te^{-i\sigma})^{a-1} = e^{(a-1)(\log t + i(2\pi - \sigma))} = t^{a-1} e^{i(a-1)(2\pi - \sigma)}$$

이므로

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{L_-} f(z) dz = \int_R^r \frac{t^{a-1} e^{2\pi i(a-1)}}{1+t} dt = -e^{2\pi ia} \int_r^R \frac{t^{a-1}}{1+t} dt \quad (22)$$

를 얻는다. 따라서,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{L_+ + L_-} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz = (1 - e^{2\pi ia}) \int_r^R \frac{t^{a-1}}{1+t} dt$$

이다. 그런데

$$\text{Res } (f(z); -1) = (-1)^{a-1} = e^{(a-1)\log(-1)} = e^{(a-1)\pi i} = -e^{\pi ai}$$

이므로,  $\Gamma = C_1 + L_- + C_2 + L_+$  라 두면

$$-2\pi i e^{\pi ai} = \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{C_1 + C_2} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz + \int_{L_+ + L_-} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz$$

에서  $\lim_{\sigma \rightarrow 0}$  을 취하면

$$-2\pi i e^{\pi ai} = \int_{C_1 + C_2} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz + (1 - e^{2\pi ia}) \int_r^R \frac{t^{a-1}}{1+t} dt$$

이다. 여기서,  $\lim_{R \rightarrow \infty}$  과  $\lim_{r \rightarrow 0}$  를 취하면 (20)에 의하여

$$-2\pi i e^{\pi ai} = (1 - e^{2\pi ia}) \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t} dt$$

이 된다. 따라서,

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \frac{-2\pi i e^{\pi a i}}{1 - e^{2\pi i a}} = \frac{-2\pi i}{e^{-\pi a i} - e^{\pi a i}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

을 얻는다.  $\square$

## 5.4. 무한급수의 미분과 적분

멱급수의 미분을 계산하는 정리 3.3.1은 본질적으로 극한과 미분의 순서를 바꿀 수 있다는 것이다. 특별한 적분 꼴로 표시된 함수를 멱급수로 전개할 수 있다는 정리 4.3.2의 증명도 그 핵심은 결국 극한과 적분의 순서를 바꾸는 것이었다. 이는 로랑급수를 얻는 정리 5.1.1의 증명에서도 마찬가지였다. 바로 앞 5.3 절의 보기 4에서도 등식 (21), (22)에서 극한과 적분의 순서를 바꾸었다. 이 절에서는 좀 더 일반적인 상황에서 극한과 미분, 극한과 적분의 순서를 바꾸는 문제를 생각한다. 이런 문제는 좀 뒤로 미루고 우선 한 가지 계산의 예를 들어 보기로 하자.

복소함수

$$f(z) = \pi \cot \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$$

는  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  위에서 해석함수이고, 각 점  $n \in \mathbb{Z}$ 에서 단극을 가지는데, 그 유수는  $\text{Res}(f; n) = 1$ 이다. 이 함수는 다음

$$2f(2z) = f(z) + f(z + \frac{1}{2}) \quad (23)$$

과 같은 특별한 성질을 가진다. 이제 다음

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right) \quad (24)$$

과 같이 정의된 급수를 생각하자. 이 급수가  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  위에서 해석함수임을 보이는 것은 극한과 미분의 순서를 바꾸는 문제이므로 잠시 뒤로

미룬다. 이제  $g(z)$  가 각  $n \in \mathbb{Z}$  위에서 단극을 가지고  $f(z)$  와 마찬가지로  $\text{Res}(g; n) = 1$  이므로 함수  $h(z) = f(z) - g(z)$  는 복소평면 위에서 해석함수이다. 그런데  $g(z)$  역시 등식 (23) 을 만족하므로 함수  $h(z)$  는 등식 (23) 을 만족하는 해석함수이다.

**문제 5.4.1.** 함수  $f(z)$  와  $g(z)$  가 등식 (23) 를 만족함을 보여라.

이제 원판  $\bar{D} = \bar{D}(0, R)$  을 생각하자. 우선  $h(z)$  가 만족하는 등식 (23) 을 미분하고  $z$  대신에  $\frac{1}{2}z$  를 넣으면

$$4|h'(z)| \leq \left| h'\left(\frac{1}{2}z\right) \right| + \left| h'\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\right) \right|$$

가 성립하는데, 만일  $R > 1$  이면

$$z \in \bar{D} \implies \frac{1}{2}z \in \bar{D}, \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \in \bar{D}$$

이므로  $M = \max\{|h'(z)| : z \in \bar{D}\}$  라 두면  $4M \leq M + M$  이 되어  $M = 0$  이다. 결국  $D$  위에서  $h'(z) = 0$  이므로 상수함수인데  $h(0) = 0$  이므로  $f = g$  이다. 항등정리를 적용하면 다음 등식

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right) \quad (25)$$

을 얻는다. 이제  $\frac{d \cot z}{dz} = -\frac{1}{\sin^2 z}$  이므로, 극한과 미분의 순서를 바꿀 수 있다면

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{(z+n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$$

인데,  $z$  대신에  $\frac{z}{\pi}$  를 넣으면 등식

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi^2}{(z+n\pi)^2} \quad (26)$$

을 얻게 된다. 등식  $\sin(z + n\pi) = (-1)^n \sin z$  를 이용하면

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(z + n\pi)}{(z + n\pi)^2}$$

이다. 한편

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(t + n\pi)}{(t + n\pi)^2} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$$

이므로, 만일 극한과 적분의 순서를 바꿀 수 있으면

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} \quad (27)$$

임을 알 수 있다. 여기서 부분적분을 이용하면

$$\int_0^A \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = -\frac{\sin^2 A}{A} + \int_0^{2A} \frac{\sin t}{t} dt$$

이므로, 이미 알고 있는 등식

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

을 얻게 된다.

복소함수  $\pi \cot \pi z$  는 각  $z = 0$  에서 단극을 가지고 그 유수가 1 이므로  $\pi \cot \pi z - \frac{1}{z}$  는  $z = 0$  에서 해석함수이다. 이제, 등식 (25) 를 이용하여 이 함수의 멱급수전개를 구해 보자. 각  $n = 1, 2, \dots$  에 대하여

$$\frac{2z}{z^2 - n^2} = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{2z}{1 - \frac{z^2}{n^2}} = -\frac{2z}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k-2}}{n^{2k-2}}$$

이다. 만일 무한급수의 순서를 바꿀 수 있으면

$$\pi \cot \pi z - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ - \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2k}} \right) \right] z^{2k-1} \quad (28)$$

을 얻는다.

이제, 원래  $\cot z$ 의 정의에 의하여 벽급수전개를 구해 보자. 등식

$$\cot z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = i \left( 1 - \frac{2}{1 - e^{2iz}} \right) \quad (29)$$

을 염두에 두고

$$h(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

에서 시작하자. 함수  $e^z - 1$ 은  $2\pi$ 의 정수배에서 균을 가진다. 특히,  $z = 0$ 에서 단근을 가지므로  $h(0) = 1$ 이라 정의하면  $h(z)$ 는 열린원판  $D(0, 2\pi)$  위에서 해석함수이다. 따라서, 이 함수는 벽급수전개

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0} B_k \frac{z^k}{k!}$$

를 가지는데, 그 계수  $B_k$ 를 구해 보자. 우선  $\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}$  이므로

$$1 = \left( 1 + \frac{1}{2!} z + \cdots + \frac{1}{3!} z^2 + \frac{1}{(k+1)!} z^k + \cdots \right) \cdot \left( B_0 + \frac{B_1}{1!} z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \cdots + \frac{B_k}{k!} z^k + \cdots \right)$$

에서  $B_0 = 1$  및 점화식

$$\binom{n+1}{0} B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \binom{n+1}{2} B_2 + \cdots + \binom{n+1}{n} B_n = 0$$

을 얻는다. 처음 몇 항을 구해 보면

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \\ B_5 &= 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \dots \end{aligned}$$

를 얻는데, 이러한 수들을 베르누이<sup>(4)</sup>수라 부른다.

---

(4) Jacob Bernoulli (1654~1705), 스위스 수학자. Basel에서 공부하고 활동하였다. 그의 동생 Johann Bernoulli (1667~1748) 및 조카인 Johann의 아들들도 수학자였다.

문제 5.4.2. 짹함수의 벡급수전개에서 홀수차 항의 계수가 모두 0임을 보여라. 각  $n = 3, 5, 7, \dots$ 에 대하여  $B_n = 0$ 임을 보여라. 수열  $\langle B_n \rangle$ 은 유계가 아님을 보여라.

이제, 함수  $h(z)$ 의 정의와 관계식 (29)에 의하여

$$\begin{aligned}\cot z &= i + \frac{1}{z} h(2iz) \\ &= i + \frac{1}{z} \left( 1 - \frac{1}{2} (2iz) + \frac{B_2}{2!} (2iz)^2 + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2iz)^{2k} + \cdots \right)\end{aligned}$$

이므로 등식

$$\cot z - \frac{1}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4^k B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1} \quad (30)$$

을 얻는다. 이 등식은 다음

$$\frac{1}{2} z \cot \frac{1}{2} z = 1 - \frac{B_2}{2!} z^2 + \frac{B_4}{4!} z^4 + \cdots + (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} + \cdots$$

과 같이 보기 좋게 쓸 수도 있다.

이제 등식 (28)과 (30)을 비교하면

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2k}} = (-1)^k \frac{4^k B_{2k} \pi^{2k}}{(2k)!}$$

이고, 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

을 얻는데, 이는 지난 2.3 절에서 정의한 리만제타함수의 값  $\zeta(2k)$ 이다.

앞에서 얻은  $B_k$ 의 값을 넣으면

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

등을 얻는다.

이제, 지금까지 계산이 옳은지 확인할 수 있는 이론적인 틀을 살펴본다. 먼저 해석함수들의 무한합이 언제 해석함수인지 알아 보고, 이 경우 벡급수로 전개하였을 때 그 계수가 어떻게 되는지 알아 본다.

**정리 5.4.1.** (바이어슈트라스<sup>(5)</sup>) 각 자연수  $k = 1, 2, \dots$ 에 대하여 복소함수  $f_k(z)$ 가 열린원판  $D = D(z_0, R)$ 에서 해석함수라 하자. 또한 모든 자연수  $k = 1, 2, \dots$  와  $z \in D$ 에 대해서 부등식  $|f_k(z)| \leq M_k$ 가 성립하며 급수  $\sum_k M_k$ 가 수렴한다고 가정하자. 그러면 다음이 성립한다.

(가)  $f(z) = \sum_k f_k(z)$ 는  $D$  위에서 해석함수이다.

(나)  $f^{(n)}(z) = \sum_k f_k^{(n)}(z)$ 이 성립한다.

(다) 만일 각  $k = 1, 2, \dots$ 에 대하여  $f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}(z - z_0)^n$ 이면, 합수  $f(z)$ 의 멱급수전개는

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right) (z - z_0)^n \quad (31)$$

으로 주어진다.

증명: 점  $z \in D$ 를 고정하고, 원  $C : |\zeta - z_0| = r$ 를 잡되 (단,  $r < R$ ) 점  $z$ 가 이 원의 내부에 들어가도록 하자. 우선  $\zeta \in C$ 에 대하여

$$\left| f(\zeta) - \sum_{k=1}^K f_k(\zeta) \right| = \left| \sum_{k=K+1}^{\infty} f_k(\zeta) \right| \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} M_k$$

인데  $\sum_k M_k$ 가 수렴하므로,  $\epsilon_K = \sum_{k=K+1}^{\infty} M_k$ 이라 두면  $\lim_{K \rightarrow \infty} \epsilon_K = 0$ 이다. 이제,  $n = 1, 2, \dots$ 를 고정하면

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^K \int_C \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta - \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right| \\ & \leq \int_C \frac{1}{|\zeta - z|^{n+1}} \left| f(\zeta) - \sum_{k=K+1}^{\infty} f_k(\zeta) \right| |d\zeta| \leq \frac{\epsilon_K \cdot 2\pi r}{(r - |z - z_0|)^{n+1}} \end{aligned}$$

---

(5) Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815~1897), 독일 수학자. 김나지움 교사로 있다가 40세가 넘어 베를린 대학에 초빙되어 그 곳에서 죽을 때까지 활동하였다. 그는 해석학 전반에 걸쳐서 이루 헤아릴 수 없이 많은 업적을 남겼는데, 특히  $\epsilon-\delta$ 를 이용한 극한의 정의는 그가 확립한 것이다.

이므로

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (32)$$

임을 알 수 있다. 그런데  $f_k$  가 해석함수이므로 코시 적분공식을 만족 한다. 따라서, 등식 (32) 를  $n = 0$  일 때 적용하면

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \int_C \frac{f_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

이고, 정리 4.3.3 에 의하여  $f(z)$  는 해석함수이므로 (가) 가 증명되었다. 등식 (32) 를 그대로 적용하면 마찬가지로 (나) 증명된다. 이제 해석함수  $f(z)$  를  $z = z_0$  에서 막급수전개하였을 때 나오는 계수는 다시 (32) 에 의하여

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \int_C \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$$

이다.  $\square$

등식 (31) 를 다시 쓰면

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right) (z - z_0)^n = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} (z - z_0)^n$$

이므로 이는 결국 무한합을 바꾸는 문제로 귀착된다.

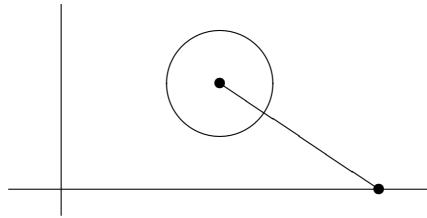
등식 (24) 에 의하여 정의된 함수  $g(z)$  가  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  에서 해석함수임을 보이자. 먼저 원판  $\overline{D} = \overline{D}(z_0, r)$  이 영역  $\operatorname{Re} z > 0$  에 들어가는 경우만 생각해도 된다. 이 때,  $A = \operatorname{Re} z_0 + r$  이라 두자. 그러면 임의의  $\zeta \in \overline{D}$  와  $n > A$  에 대하여

$$|\zeta + n| \geq |\zeta - n| \geq |n - z_0| - r \geq n - \operatorname{Re} z_0 - r = n - A$$

이다. 따라서,

$$\sum_{n>A} \left| \frac{1}{\zeta^2 - n^2} \right| \leq \sum_{n>A} \frac{1}{|\zeta - n|^2} \leq \sum_{n>A} \frac{1}{(n - A)^2}$$

이 수렴한다. 이제 정리 5.4.1 (가), (나)를 적용하면 (24)에 의하여 정의된 함수  $g(z)$  가 해석함수임을 알 수 있고, (26)을 얻는 과정에서 미분과 무한합을 바꾼 것도 정당함을 알 수 있다. 끝으로, 등식 정리 5.4.1 (다)를 적용하면 등식 (28)에서 무한합을 바꾼 것이 정당함을 알 수 있다.



정리 5.4.1 을 적용하면 지난 2.3 절의 (15)에서 정의한 리만제타함수가 영역  $\{z : \operatorname{Re} z > 1\}$  위에서 해석함수임을 증명할 수 있다. 우선  $n^z = e^{n \operatorname{Log} z}$  는  $\operatorname{Re} z > 1$  위에서 해석함수이고 근을 가지지 않으므로  $\frac{1}{n^z}$  는  $\operatorname{Re} z > 1$  위에서 해석함수이다. 만일  $\operatorname{Re} z > 1$  안에 원판  $\bar{D}$  가 들어가면  $a = \min\{\operatorname{Re} z : z \in \bar{D}\} > 1$  이다. 따라서, 임의의  $z \in \bar{D}$  에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^z} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

가 수렴하고,  $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$  는 해석함수이다.

등식 (27) 을 유도하는 과정에서 적분과 무한합을 바꾸는 과정도

$$M_n = \max \left\{ \left| \frac{\sin^2(t + n\pi)}{(t + n\pi)^2} \right| : 0 \leq t \leq \pi \right\}$$

라 두었을 때, 정리 5.4.1 의 증명과 마찬가지로  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n$  이 수렴하는가 하는 문제로 귀착되는데, 이는 연습문제로 남긴다.

문제 5.4.3. 등식 (27) 을 유도하는 과정에서 무한합과 적분의 순서를 바꿀 수 있음을 보여라. 또한, 등식 (21), (21) 에서 적분과 무한합의 순서를 바꿀 수 있음을 보여라.

## 5.5. 연습문제

5.5.1. 다음 함수들의 특이점을 찾아라.

- |                         |  |                                 |
|-------------------------|--|---------------------------------|
| (가) $\tan z$            | (나) $\frac{1}{e^{1/z} + i}$              | (다) $\frac{1}{\sin z - \cos z}$ |
| (라) $\frac{1}{(1-z)^3}$ | (마) $\operatorname{Log} \frac{1-z}{1+z}$ |                                 |

5.5.2. 다음 영역에서 함수  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z^2+4)}$  의 로랑급수를 구하라.

- |                   |               |               |
|-------------------|---------------|---------------|
| (가) $1 <  z  < 2$ | (나) $ z  > 2$ | (다) $ z  < 1$ |
|-------------------|---------------|---------------|

5.5.3. 복소수  $z=0$  에서 다음 함수의 유수를 구하라.

- |                       |                          |                          |
|-----------------------|--------------------------|--------------------------|
| (가) $\frac{1}{z+z^2}$ | (나) $z \sin \frac{1}{z}$ | (다) $\frac{z-\cos z}{z}$ |
|-----------------------|--------------------------|--------------------------|

5.5.4. 곡선  $|z|=2$  를 따라 다음 함수들을 적분하여라.

- |                          |                       |                         |
|--------------------------|-----------------------|-------------------------|
| (가) $\frac{e^{-z}}{z^3}$ | (나) $z^4 e^{z^{-2}}$  | (다) $\frac{z+1}{z^2-z}$ |
| (라) $\frac{z^6}{1-z^3}$  | (마) $\frac{1}{1+z^3}$ |                         |

5.5.5. 다음 적분값을 구하여라.

- |  |   |
|--|---|
| (가) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$                   | (나) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$         |
| (다) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+2x+2)}$          | (라) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$       |
| (마) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x dx}{(x^2+2x+2)^2}$ | (바) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x dx}{(x+1)^2+2^2}$ |

5.5.6. 적분값  $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$  을 구하여라. 단,  $a > b > 0$  이다.

5.5.7. 다음 적분값을 구하여라.

- |  |
|--|
| (가) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2t \cos \theta + t^2}$ , 단 $ t  \neq 1$ , $t \in \mathbb{R}$ |
| (나) $\int_0^\pi \frac{\cos 2\theta d\theta}{1-2t \cos \theta + t^2}$ , 단 $-1 < t < 1$            |

5.5.8. 다음 등식을 증명하여라.

$$(가) \int_0^\infty \frac{x^a dx}{(1+x)^2} = \frac{\pi a}{\sin \pi a}, \text{ 단 } -1 < a < 1$$

$$(나) \int_0^\infty \frac{x^a dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi a}{2}}, \text{ 단 } -1 < a < 1$$

$$(다) \int_0^\infty \frac{x^a dx}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-a)\pi}{4 \cos \frac{a\pi}{2}}, \text{ 단 } -1 < a < 3$$

5.5.9. 열린 단위원판  $D(0, 1)$  위에서 정의된 해석함수  $f(z)$ 에 대하여 (단,  $f \neq 0$ ), 다음 등식

$$\exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \right) = |f(0)|, \quad 0 < r < 1$$

이 성립함을 보여라.

5.5.10. 삼각급수  $h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ 의 계수  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{R}, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r$$

이라 하자.

(가) 함수  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 가 주기  $2\pi$ 인 주기함수이면  $h(t) = f(e^{it})$ 를 만족하는 함수  $f : \{z : |z| = 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ 가 존재함을 보여라.

(나) 만일  $r < 1 < R$ 이면  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ 는 집합  $\{z : r < |z| < R\}$  위에 서 해석함수임을 보여라.

(다) 만일  $r < 1 < R$ 이면  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 는 해석주기함수임을 보여라.<sup>(6)</sup>

5.5.11. 집합  $A = \{z : r \leq |z| \leq R\}$ 를 포함하는 영역 위에서 해석함수  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ 가 정의되어 있다. 이 때,  $f$ 의 상  $\{f(z) : r \leq |z| \leq R\}$ 의 넓이는

$$\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |a_n|^n (R^{2n} - r^{2n})$$

임을 보여라. 여기서  $f$ 의 상이 중복되는 경우 중복되는 만큼 넓이에 포함된다.

(6) 참고문헌 [김성기·김도한·계승혁, 해석개론, 개정판, 서울대학교 출판부, 1995, 2002]의 정리 9.4.5를 참조하라.

5.5.12. 함수  $f(z)$  가 단위원판  $\overline{D} = \overline{D}(0, 1)$  을 포함하는 영역  $\Omega$  위에서 해석함수이고,  $|z| = 1$  이면  $|f(z)| = 1$  이라 가정하자. 그러면  $f(z)$  의 상은 한 점이거나  $\overline{D}$  를 포함함을 보여라.

5.5.13. 열린원판  $D(0, R)$  위에 서로 다른 점  $z_1, \dots, z_n$  이 주어져 있을 때,

$$Q(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

이라 하자. 원판  $\overline{D}(0, R)$  을 포함하는 영역 위에서 정의된 해석함수  $f(z)$  에 대하여

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(\zeta) \left(1 - \frac{Q(z)}{Q(\zeta)}\right)}{\zeta - z} d\zeta$$

라 정의하면, 각  $i = 1, 2, \dots, n$  에 대하여  $P(z_i) = f(z_i)$  이고  $P(z)$  는  $n - 1$  차다항식임을 보여라.

5.5.14. 원점 0 을 출발하여 선분을 따라서  $R$  까지 가서 원호를 따라  $Re^{2\pi i/3}$  까지 가고 다시 선분으로 0 에 돌아오는 곡선 위에서  $\frac{1}{z^3 + 1}$  의 적분을 계산하고, 이를 이용하여 적분값

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^3 + 1} dx$$

를 구하여라.

5.5.15. 임의의 자연수  $n = 2, 3, \dots$  에 대하여 적분값

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^n + 1} dx$$

를 구하여라.

5.5.16. 지난 5.3 절의 보기 4 과 유사한 곡선을 잡되 큰 원과 작은 원을 두 개의 수평선으로 연결하는 곡선 위에서  $\frac{\log^* z}{z^2 + 3z + 2}$  의 선적분을 계산하고, 이를 이용하여 적분값

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$$

을 구하여라. 여기서,  $\log^*$  는 그 편각이  $(0, 2\pi)$  에 들어가도록 가지를 접는다.

5.5.17. 급수  $\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n$  이 열린원판  $D(-i, 1)$  위에서 해석함수임을 보여라.

5.5.18. 각 복소수  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  에 대하여 다음 무한급수

$$\sum_{n=-\infty}^\infty (-1)^n \frac{1}{z-n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N (-1)^n \frac{1}{z-n}$$

의 값을 구하여라. [도움말: 이 급수의 짹수번 째 항과 홀수번 째 항을 분리한 후, 등식 (25)를 이용한다]

### 5.5.19. 멱급수

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$$

가 주어져 있다.

(가) 이 멱급수의 수렴반경을 구하여라.

(나) 임의의 자연수  $n \geq k$ 에 대하여  $\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{(1+\zeta)^n}{\zeta^{k+1}} d\zeta$  가 성립함을 보여라.

(다) 만일  $|z| < \frac{1}{4}$ 이면  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta - z(1+\zeta^2)}$ 임을 보여라.

(라)  $|z| < \frac{1}{4}$ 일 때, 무한급수  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$ 의 값을 구하여라.

5.5.20. 복소평면 위에서 실수축 위의 구간  $[1, \infty)$ 를 제외한 영역을  $\Omega$ 라 두자. 각  $z \in \Omega$ 에 대하여

$$f(z) = - \int_0^z \frac{\operatorname{Log}(1-\zeta)}{\zeta} d\zeta, \quad z \in \Omega$$

라 정의하자.

(가) 함수  $f(z)$ 의 멱급수전개가 다음

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n = z + \frac{1}{2^2} z^2 + \frac{1}{3^2} z^3 + \cdots, \quad |z| < 1$$

과 같이 주어짐을 보여라.

(나) 위 등식이 임의의  $z \in \{z : |z| \leq 1, z \neq 1\}$  위에서 성립함을 보여라. 또한,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{\pi^2}{6}$ 임을 보여라. [도움말: 연습문제 3.4.14.]

(다) 점  $1 - \epsilon$ 에서 출발하여 점 1이 중심이고 반지름이  $\epsilon$ 인 원을 따라 시계방향으로 움직여서 단위원  $|z| = 1$ 의 한 점에 이르는 곡선을  $C_\epsilon$ 이라 할 때, 다음

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{\operatorname{Log}(1-\zeta)}{\zeta} d\zeta = 0$$

이 성립함을 보여라.

(라) 각  $\theta \in [0, \pi]$  에 대하여 등식

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi\theta}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^2} = -\theta \log 2 - 2 \int_0^{\theta/2} \log \sin t dt$$

이 성립함을 보여라.

(마) 다음 등식

$$\int_0^{\pi} \log \sin \theta d\theta = -\pi \log 2$$

을 증명하여라.