복소변수함수론 중간고사

2002 년 10 월 21 일

1. 복소평면 위에 집합 $A = \{\, z : |\mathrm{Re}\, z| \le 1,\ |\mathrm{Im}\, z| \le 1 \}$ 가 주어져 있다.
   (가) 집합 $B = \{\, (1+i)z : z \in A \,\}$ 를 복소평면에 그려라.
   (나) 집합 $C = \{\, z^2 : z \in A \,\}$ 를 복소평면에 그리고, 그 넓이를 구하여라.

2. 서로 다른 세 복소수 α, β, γ 를 꼭지점으로 하는 삼각형이 정삼각형일 필요충분조건이
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0$$
   임을 증명하라.

3. 반평면 $\{z : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ 을 열린단위원판 $\{w : |w| < 1\}$ 로 보내고, $z = i$ 를 $w = 0$ 으로 보내는 일차분수함수를 찾아라.

4. 복소수 $e^{i\theta}$ 에 대하여 (단, $e^{i\theta} \ne 1$), 복소수 $-\mathrm{Log}\,(1 - e^{i\theta})$ 의 실수부와 허수부를 계산하여라.

5.
   (가) 조화함수의 정의를 써라.
   (나) 해석함수 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 에 대하여 $u(x,y)$ 가 조화함수임을 보여라.
   (다) 다음 함수 $u(x,y)$ 들이 조화함수인지 살펴보고, 조화함수인 경우 $u + iv$ 가 해석함수가 되도록 하는 $v(x,y)$ 를 찾아라. 이 경우, $u + iv$ 가 해석함수인 이유를 써라.
$$\text{(다–1) } u(x,y) = xy, \qquad \text{(다–2) } u(x,y) = x^3 - y^3$$

6. 주어진 점 z_0 에서 다음 함수들의 멱급수 전개를 구하고, 그 멱급수의 수렴반경을 구하여라.
$$\text{(가) } f(z) = \frac{1}{z-i},\quad z_0 = 1, \qquad \text{(나) } f(z) = \cos z,\quad z_0 = 1$$

7. 다음 적분값을 구하여라.
$$\text{(가) } \int_{|z|=1} \frac{1}{z(z+2)}\, dz \quad \text{(나) } \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2(z+2)}\, dz \quad \text{(다) } \int_{|z-1|=2} \frac{3z^2 - 2z + 1}{z(z-1)^2}\, dz$$

8. 단순연결영역 Ω 에서 정의된 연속함수 $f(z)$ 가 해석함수일 필요충분조건을 아는대로 써라.

9. 영역 $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z : \mathrm{Re}\, z = 0,\ |\mathrm{Im}\, z| \ge 1\}$ 위에서
$$\arctan z = \int_{[0,z]} \frac{1}{1+\zeta^2}\, d\zeta, \qquad z \in \Omega$$
   라 정의하자. 여기서 $[0,z]$ 는 0 에서 z 까지 가는 선분을 나타낸다.
   (가) 열린 단위원판 $D = \{z : |z| < 1\}$ 위에서
$$\arctan z = \frac{1}{2i}\mathrm{Log}\,\frac{1+iz}{1-iz} = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \cdots$$
   임을 보여라.
   (나) 영역 D 위에서 $z \mapsto \arctan z$ 가 단사함수임을 보이고, 이 함수의 상 $S = \{\arctan z : z \in D\}$ 를 구하여라.
   (다) 함수 $\tan w = \dfrac{\sin w}{\cos w}$ 는 영역 S 위에서 해석함수이고, 임의의 $w \in S$ 에 대하여 $|\tan w| < 1$ 임을 보여라.
   (라) 다음 등식
$$\arctan(\tan w) = w, \quad w \in S, \qquad \tan(\arctan z) = z, \quad z \in D$$
   이 성립함을 보여라.
   (마) $0 \le |\theta| < \pi/2$ 일 때, $\mathrm{Re}\,\arctan e^{i\theta}$ 의 값을 구하여라.

10. 아무거나 써라.