

복소변수함수론 기말고사

2002년 12월 12일

- 자신의 강의록이나 참고도서, 과제물, 노트 등을 모두 참고할 수 있습니다.
- 단, 다른 학생의 과제물이나 노트 복사한 것을 소지하고 있으면 부정행위로 간주합니다.

1. 열린원판 $D(0, 1)$ 위에서 정의된 해석함수 $f(z)$ 에 대하여 다음 세 성질
 - (가) 임의의 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $f(x) \in \mathbb{R}$ 이다,
 - (나) 임의의 $z \in D(0, 1)$ 에 대하여 $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ 이다,
 - (다) 함수 $f(z)$ 를 원점에서 멱급수전개하였을 때 모든 계수가 실수이다이 동치임을 보여라.
2. 영역 $0 < |z| < 1$ 위에서 함수 $\frac{1+z^2}{2z(1-z)^2}$ 의 로랑급수를 구하여라.
3. 적분값 $\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 \sin z} dz$ 을 구하여라.
4. 적분값 $\int_{|z-1|=1} \frac{1}{1+z^5} dz$ 을 구하여라.
5. 적분값 $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^6} dx$ 을 구하여라.
6. 적분값 $\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$ 을 구하여라.
7. 베르누이수 $\langle B_n : n = 1, 2, \dots \rangle$ 는 유계가 아님을 보여라.
8. ‘함수 f 가 단사함수이다’와 ‘ $f' \neq 0$ 이다’가 서로 어떤 관련을 가지는지 실함수의 경우와 복소함수의 경우를 비교하여 설명하여라.
9. 함수 u 와 v 는 조화함수이지만 uv 는 조화함수가 아닌 예를 들어라.
10. 영역 $\{z : -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3}{4}\pi\}$ 를 열린 단위원판으로 보내는 등각사상 ϕ 가운데 $\phi(e^{\pi i/4}) = 0$ 이고 $\phi'(e^{\pi i/4}) > 0$ 인 것을 찾아라.
11. 복소수 $|\alpha| = 1$ 에 이 고정되어 있다. 함수 f_α 를 다음
$$f_\alpha(z) = \frac{z}{1 + \alpha z^2}$$
과 같이 정의할 때, f_α 가 전단사 등각사상인가 살펴보아라. 또한 집합 $\{f_\alpha(z) : |z| < 1\}$ 를 복소평면 위에 그려라.
12. 반평면 H_u 위에서 정의된 다음 함수
$$w = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta} \sqrt{1 + \zeta}} d\zeta, \quad z \in H_u$$
의상을 구하고, 전단사 등각사상임을 보여라. 이 함수의 역함수가 $z = \sin w$ 을 보여라.
13. 아무거나 써라.