# 제 1 장 복소평면과 복소함수

복소수를 평면의 한 점과 대응시켜서 얻어지는 복소평면에 대하여 공부하는데, 그 핵심은 절대값과 편각이다. 변수를 복소수로 하는 복소함수는 복소평면 위의 변환으로 이해한다. 이 장에서는 더하기, 빼기, 곱하기, 나누기 등을 이용한 다항식, 분수식으로 정의되는 복소함수 중에서 간단한 몇 가지 예를 살펴본다.

## 1.1. 복소평면

실수 $a, b$ 에 대하여

$$a + ib \tag{1}$$

로 표현되는 수를 **복소수**라 한다. 여기서 $i$ 는 $i^2 = -1$ 를 만족하는 수이다. 두 복소수 $a + ib$ 와 $c + id$ 에 대하여 $a = c$ 이고 $b = d$ 일 때, 두 복소수가 같은 것으로 간주한다. 즉,

$$a + ib = c + id \iff a = c,\ b = d$$

이다. 복소수 $\alpha = a + ib$ 에 대하여 $a$ 를 $\alpha$ 의 **실수부**라 하며 이를 $\operatorname{Re}\alpha$ 나타낸다. 또한 $b$ 를 $\alpha$ 의 **허수부**라 하고 이를 $\operatorname{Im}\alpha$ 로 쓴다. 즉,

$$\operatorname{Re}(a+ib) = a, \qquad \operatorname{Im}(a+ib) = b$$

이다.

등식 $i^2 = -1$ 를 이용하면 복소수 사이의 **더하기**와 **곱하기**를 다음

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$$
$$(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

과 같이 자연스레 정의할 수 있다. 복소수 전체의 집합 $\mathbb{C}$ 에서 0 으로 나누는 것을 제외한 가감승제를 자유롭게 할 수 있고, 연산에 관한 결합법칙, 교환법칙, 배분법칙이 모두 성립한다. 예를 들어,

$$-(a+ib) = (-a)+i(-b), \qquad \frac{1}{a+ib} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

이다. 복소수에는 또 하나의 중요한 연산이 있다. 복소수 $\alpha = a+ib$ 에 대하여 $a-ib$ 를 $\alpha$ 의 **켤레복소수**라 부르고, 이를 $\overline{\alpha}$ 로 쓴다. 즉,

$$\overline{a+ib} = a-ib$$

이다. 이 때, 임의의 복소수 $\alpha, \beta$ 에 대하여 다음

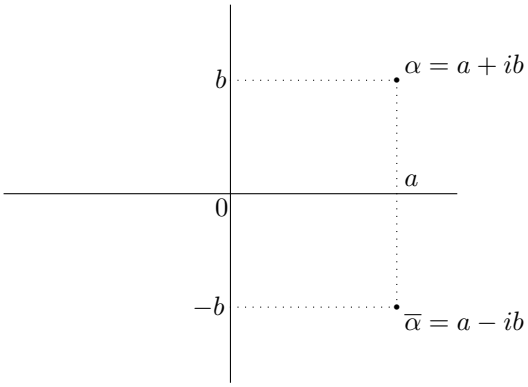
$$\overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha}+\overline{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}, \quad \operatorname{Re}\alpha = \frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}, \quad \operatorname{Im}\alpha = \frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i} \tag{2}$$

이 성립함을 바로 확인할 수 있다.

**문제** 1.1.1. 등식 (2) 를 증명하여라.

실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 과 직선 위에 놓여 있는 점들의 집합 사이에 자연스러운 일대일대응이 있기 때문에, 직선을 실수 전체의 집합으로 볼 수 있으며 이런 관점에서 본 직선을 **실직선**이라고 부른다. 각각의 복소수에 실수 두 개의 순서쌍이 자연스럽게 대응되고, 실수 두 개의 순서쌍에는 평면의 한 점이 자연스럽게 대응되므로, 평면을 복소수 전체

의 집합으로 볼 수 있다. 이런 관점에서 본 평면을 **복소평면** 또는 **가우스**[1]**평면**이라고 한다.




복소평면의 원점에서 복소수 $\alpha$ 까지 거리를 복소수 $\alpha$ 의 **절대값**이라 부르고, 이를 $|\alpha|$ 라 쓴다. 즉,

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

이다. 그러면, 두 복소수 $\alpha, \beta$ 에 대하여 다음

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|, \quad |\alpha\beta| = |\alpha||\beta|, \quad |\overline{\alpha}| = |\alpha|, \quad \alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2 \tag{3}$$

이 성립함을 바로 확인할 수 있다. 부등식 $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ 는 **삼각부등식**이라 부른다. 한편,

$$|\alpha| = |\beta + (\alpha - \beta)| \leq |\beta| + |\alpha - \beta|$$

이므로 $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta|$ 임을 알 수 있다. 여기서, $\alpha$ 과 $\beta$ 의 역할을 바꾸어도 마찬가지이므로 다음 부등식

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta| \tag{4}$$

(1) Johann Carl Friedrich Gauss (1777∼1855), 독일 수학자, 천문학자. Euler 와 더불어 역사상 최고의 수학자로 일컬어진다. 주로 Göttingen 에서 활동하였다.

을 얻는다.

**문제** 1.1.2. 관계식 (3) 을 증명하여라.

복소수 $\alpha = a + ib$ 가 복소평면에 있을 때, 양의 실수축과 원점에서 $\alpha$ 를 지나는 반직선이 이루는 각도를 $\alpha$ 의 **편각**이라 하고, 이를 $\arg\alpha$ 로 쓴다. 만일 $r = |\alpha|$, $\theta = \arg\alpha$ 이면

$$\alpha = a + ib = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{5}$$

로 나타낼 수 있다. 만일

$$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad \beta = s(\cos\tau + i\sin\tau)$$

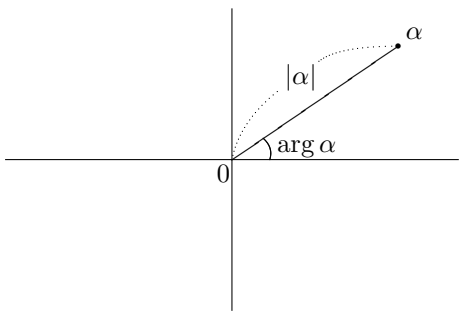
이면, 삼각함수의 가법정리에 의하여

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= rs[(\cos\theta\cos\tau - \sin\theta\sin\tau) + i(\sin\theta\cos\tau + \sin\tau\cos\theta)] \\ &= rs[\cos(\theta+\tau) + i\sin(\theta+\tau)]\end{aligned}$$

이 된다. 따라서, 다음 공식

$$\arg\alpha\beta = \arg\alpha + \arg\beta \tag{6}$$

을 얻는다.



만일 $\alpha = r(\cos\theta + \sin\theta)$ 이면 등식 (6) 을 반복 적용하여

$$\alpha^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

임을 알 수 있다. 그런데, 각도를 표시하는 방법은 유일한 것이 아니기 때문에 유의하여야 한다. 주어진 각도를 나타내는 실수 $\theta \in \mathbb{R}$ 를 잡았을 때, 이 수에 $2\pi$ 의 배수를 더하면 모두 같은 각도이다. 따라서, 한 각도를 나타내는 방법은 무수히 많다. 여기서, $\arg\alpha$ 라 함은 묵시적으로 주어진 각도를 나타내는 모든 방법을 말한다. 이 가운데, 구간 $(-\pi, \pi]$ 안에 딱 하나가 있는데, 이 수를 $\operatorname{Arg}\alpha$ 라 쓰고 이를 복소수 $\alpha$ 의 **주편각**이라 부른다.

**문제** 1.1.3. 등식 (7) 을 귀납법으로 증명하여라.

복소수를 (1) 과 같이 직교좌표를 이용하여 표현하면 복소수의 더하기를 이해하는 데에 편리하다. 반면 복소수를 (5) 와 같이 극좌표를 이용하여 표현하면 복소수의 곱하기를 이해하는 데에 매우 편리하다.

**문제** 1.1.4. 다음 관계식을 만족하는 복소수 전체의 집합을 복소평면 위에 표시하여라.

(가) $|z-3| \le 4$
(나) $2 \le |z-i| \le 3$
(다) $|z-1| + |z+1| = 3$
(라) $|z-1| - |z+1| = 1$
(마) $|z-1| = \operatorname{Re} z$
(바) $\operatorname{Re} z^3 > 0$
(사) $0 \le \arg(z-i)^2 \le \pi$

**보기** 1. 복소계수 방정식

$$z^2 - 2iz - i - 2 = 0$$

을 풀어 보자. 실계수 방정식을 풀 때와 마찬가지 방법으로 완전제곱식으로 고치면

$$(z-i)^2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

이다. 여기서, 편각 $\dfrac{\pi}{4}$ 는 실제로

$$\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm, 2 \ldots$$

이다. 따라서, 등식 (7) 을 이용하여

$$z = i + 2^{1/4}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right), \qquad z = i + 2^{1/4}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$$

임을 알 수 있다. □

**문제** 1.1.5. 다음 방정식을 풀어라.
(가) $iz^2 + 5z + 3 + i = 0$ (나) $z^3 = i$

## 1.2. 일차함수와 이차함수

우리는 실함수 $y = f(x)$ 가 주어지면 이를 $xy$-평면 위에 그래프를 그림으로써 이 함수를 이해한다. 실제로 그래프를 그려 보면 $x$ 가 변함에 따라서 $y$ 가 어떻게 변하는지 일목요연하게 살펴볼 수 있다. 이제, 복소함수

$$w = f(z)$$

가 주어졌을 때, 이를 그래프로 그리려면 $\mathbb{C}^2$, 즉 사차원 공간이 필요하므로 이는 불가능하다. 따라서, 두 복소평면, 즉 $z$-평면과 $w$-평면을 그리고, $z$ 가 변함에 따라서 $w$ 가 어떻게 변하는지 살펴봄으로써 함수 $w = f(z)$ 를 이해하려고 한다. 이 경우 각 복소평면을 좌표평면으로 이해하기 위하여

$$z = x + iy \longleftrightarrow (x, y), \qquad w = u + iv \longleftrightarrow (u, v) \tag{8}$$

와 같이 대응시켜서 생각하기로 한다. 예를 들어서

$$w = z + \alpha$$

를 살펴보는데 $\alpha = a + ib$ 라 하면,

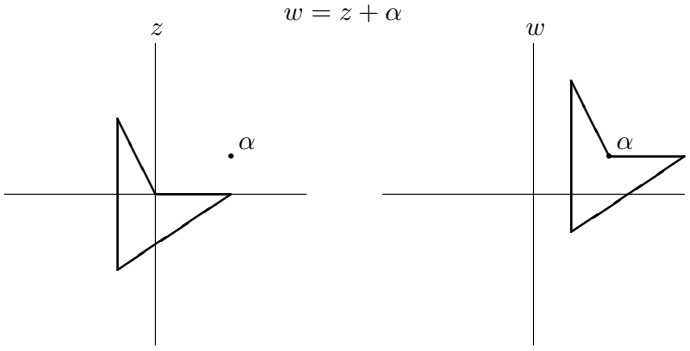
$$u = x + a, \qquad v = y + b$$

이므로, 복소함수 $z \mapsto z + \alpha$ 는 다음

$$(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$$

과 같은 **평행이동**으로 이해할 수 있다.

$w = z + \alpha$

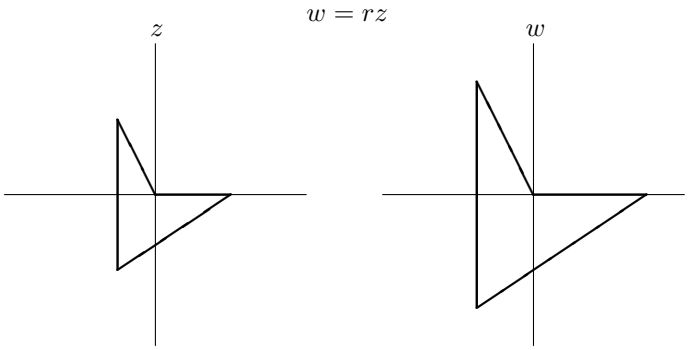



다음으로 복소함수 $w = \alpha z$ 를 살펴보자. 만일 $\alpha = r$ 이 실수이면 (단, $r > 0$), 이는

$$(x, y) \mapsto (rx, ry)$$

로서, $|w| = r|z|$ 이므로 주어진 점 $z$ 의 절대값을 $r$ 배만큼 **확대**시키는 변환이다.

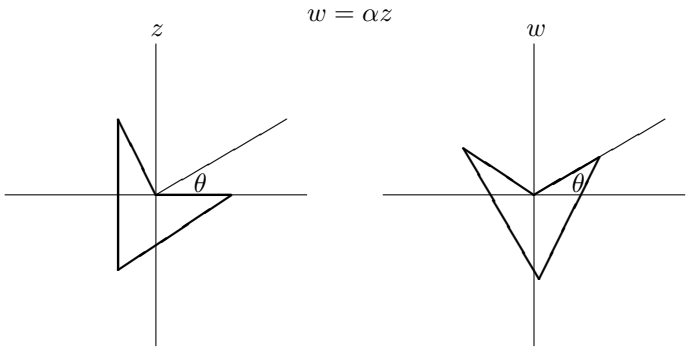
$w = rz$



만일 $|\alpha| = 1$ 이고 $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ 이면

$$(x, y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta)$$

로서, $\arg w = \arg z + \theta$ 이므로 주어진 점을 $\arg\alpha$ 만큼 회전시키는 변환이다.




임의의 일차함수는 $w = \alpha z + \beta$ 꼴이므로, 이를 복소평면 위의 변환으로 이해하면 평행이동, 확대, 회전 등 세 가지 변환의 합성으로 표시된다.

**문제** 1.2.1. 평행이동, 확대, 회전 등에서 두 가지 변환을 합성할 때, 그 순서를 바꾸어도 되는지 살펴보아라.

**문제** 1.2.2. 변환 $w = (1+i)z + 2$ 에 의한 다음의 상을 구하여라.

(가) $y = 2x$ (나) $y = 3x + 2$
(다) $|z| = 3$ (라) $|z - 1| = 2$

**문제** 1.2.3. 변환 $w = (1-i)z + (2-i)$ 에 의한 영역 $0 < \operatorname{Re} z < 2,\ \operatorname{Im} z > 1$ 의 상을 구하여라.

**문제** 1.2.4. 두 점 $3 + i$ 와 $1 - i$ 를 각각 $5i$ 와 $2 + 4i$ 로 보내는 일차 변환을 구하여라.

임의의 복소이차함수를 완전제곱으로 고치면 $w = \alpha(z - \beta)^2 + \gamma$ 의 꼴로 쓸 수 있으므로, 복소함수

$$w = z^2$$

가 어떠한 변환인지 이해하면 나머지는 이미 살펴본 평행이동, 확대, 회전 등으로 이해하면 된다. 이제, 변환 $w = z^2$ 을 극좌표를 이용해서 이해해 보자. 만일 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 이면 $z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$ 이다. 즉, 이 변환에 의해서 절대값은 제곱으로 변하고 편각은 두 배로 변한다. 따라서, 이 변환을 직관적으로 이해하면 다음과 같다:

- 절대값이 제곱으로 변하도록 $z$-평면의 단위원 안쪽에 있는 점들은 적당히 원점에 가까이 이동시키고, 단위원 밖에 있는 점들은 적당히 원점에서 멀어지도록 이동시킨다.
- 양의 실수축을 따라 $z$-평면을 자르고 편각이 두 배가 되도록 평면을 변형하여, 즉 원점을 중심으로 한 동심원의 방향으로 평면을 두 배 늘려서, 아까 잘렸던 부분이 한 바퀴 돌아 다시 일치되도록 붙인다.
- 이렇게 $z$-평면을 변형하면 원점을 제외한 부분이 두 겹이 되는데, 이것을 $w$-평면 위에 양의 실수축이 일치하도록 놓고서 $z$-평면에 있는 점들을 그 바로 아래에 있는 $w$-평면의 점들에 대응시킨다.

물론, 변환 $w = z^3$, $w = z^4$ 등도 비슷한 관점에서 이해할 수 있다.

대응관계 (8) 에 의한 관계식 $u + iv = (x + iy)^2$ 은

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy \tag{9}$$

로 바뀌게 된다. 이제부터 변환

$$(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy) \tag{10}$$

을 보다 자세히 이해하기 위하여 $xy$-평면 위의 여러 가지 도형의 예를 들고, 이 도형이 변환 (10) 에 의하여 $uv$-평면 위에서 어떤 도형이 되는지 살펴보기로 한다. 시작하기 전에 유의할 사항은 $z^2 = (-z)^2$ 이므로 원점을 중심으로 대칭인 두 점은 같은 점으로 변환된다는 것이다.

먼저, 원점을 지나는 직선 $y = mx$ 가 어떻게 변환되는지 알아보자. 관계식 (9) 에서

$$u = x^2 - m^2x^2, \qquad v = 2mx^2$$

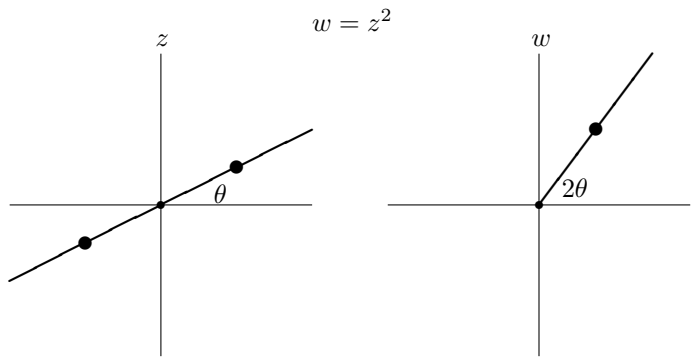
이므로 $\dfrac{v}{u} = \dfrac{2m}{1-m^2}$ 를 얻는다 (단, $m \neq \pm 1$). 따라서, 원점을 지나는 직선 $y = mx$ 는 (단, $m \neq \pm 1$) 반직선

$$v = \frac{2m}{1-m^2}u \qquad \begin{cases} u \geq 0, & 1-m^2 > 0 \text{ 일 때}, \\ u \leq 0, & 1-m^2 < 0 \text{ 일 때} \end{cases}$$

으로 변환된다. 직선 $y = x$ 와 $y = -x$ 는 변환 (10) 에 의하여 각각 반직선

$$u = 0, \quad v \geq 0 \qquad \text{과} \qquad u = 0, \quad v \leq 0$$

으로 변환된다.




이제, 실수축에 평행하고 원점을 지나지 않는 직선 $y = c$ 는 (단, $c \neq 0$) 변환 (10) 에 의하여

$$u = x^2 - c^2, \qquad v = 2xc$$

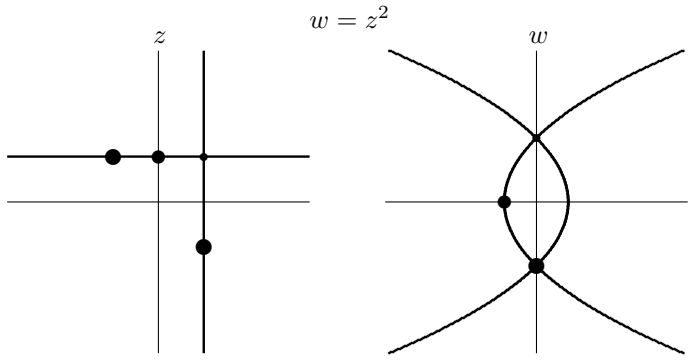
가 되므로, 포물선

$$u = \frac{1}{4c^2}v^2 - c^2$$

을 얻는다. 마찬가지로 직선 $x = c$ 역시 (단, $c \neq 0$) 포물선

$$u = -\frac{1}{4c^2}v^2 + c^2$$

로 변환됨을 바로 확인할 수 있다.




**문제** 1.2.5. 다음 도형들이 변환 (10) 에 의하여 어떻게 움직이는지 살펴보아라.
(가) $\{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0\}$
(나) $\{z : 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\}$
(다) $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$
(라) $\{z : |z| = 1\}$

**보기** 1. 이차곡선은 변환 (10) 에 의하여 사차곡선으로 변환되므로 원이 어떻게 움직이는지 정확하게 설명하기는 곤란하지만 그 대략의 개형은 짐작할 수 있다. 예를 들어서, 원

$$|z - i| = \frac{1}{2}$$

을 생각하여 보자. 이 원은

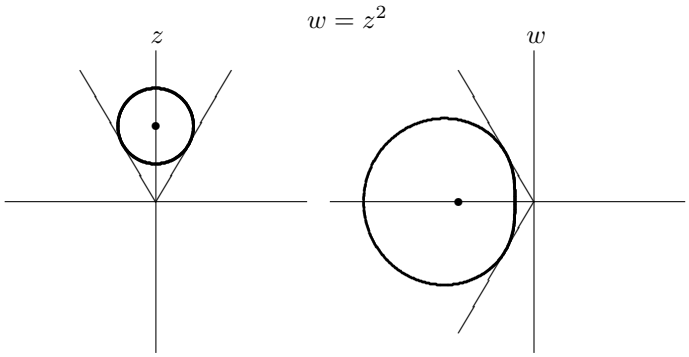
$$\left\{z : \frac{1}{3}\pi \leq \arg z \leq \frac{2}{3}\pi,\ \frac{1}{2} \leq |z| \leq \frac{3}{2}\right\}$$

안에 들어 있으므로, 그 상은

$$\left\{ w : \frac{2}{3}\pi \le \arg w \le \frac{4}{3}\pi,\ \frac{1}{4} \le |z| \le \frac{9}{4} \right\}$$

안에 들어가야 한다. □

**문제** 1.2.6. 원 $|z - i| = \frac{1}{2}$ 를 (10) 에 의하여 변환시켰을 때 생기는 사차곡선의 방정식을 구하여라.




## 1.3. 일차분수함수

이 절에서는 다음

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \tag{11}$$

과 같이 주어지는 **일차분수함수**를 공부한다. 여기서 $ad - bc = 0$ 이면 (11) 은 상수함수가 되므로, 앞으로 항상 $ad - bc \neq 0$ 이라 가정한다. 먼저 $c = 0$ 이면 바로 일차식이 되므로, 앞에서 알아본 바와 같이 평행이동, 회전, 확대 변환의 합성이다. 이제, $c \neq 0$ 라 가정하고, 실함수의 경

우와 마찬가지로 다음

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d)+b-\frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{z+\frac{d}{c}}$$

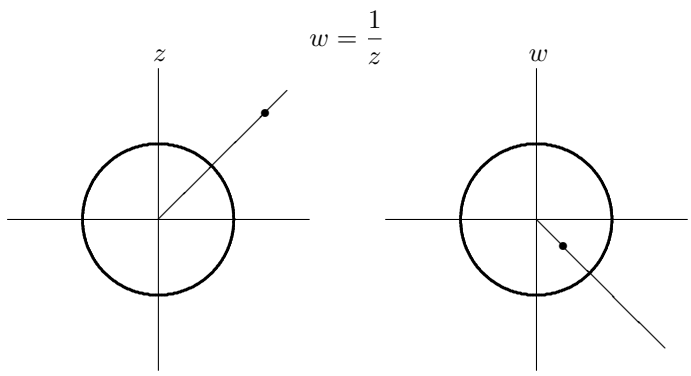
과 같이 고칠 수 있다. 따라서, 일차분수함수 (11) 에 의한 변환은 다음에 의한 변환

$$z \mapsto \frac{1}{z} \tag{12}$$

과 평행이동변환, 회전변환, 확대변환의 합성이다. 그런데

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}, \qquad \arg\frac{1}{z} = -\arg z$$

이므로, 함수 (12) 가 어떤 변환을 나타내는지 바로 알 수 있다.




평행이동변환, 회전변환, 확대변환은 평면 위의 원을 원으로 보내고, 직선을 직선으로 보낸다. 이제, 변환 (12) 가 원과 직선을 어떤 도형으로 보내는지 알아보자. 이를 위하여 $z = x+iy$, $w = u+iv$ 로 표시하면

$$u+iv = \frac{1}{x+iy}$$

로부터, $(x, y)$ 와 $(u, v)$ 의 관계식

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad v = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad x = \frac{u}{u^2+v^2}, \qquad y = \frac{-v}{u^2+v^2} \tag{13}$$

을 얻는다. 이로부터, $xy$-평면 위의 방정식 (단, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$)

$$\alpha(x^2+y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0 \tag{14}$$

이 다음 방정식

$$\delta(u^2+v^2) + \beta u - \gamma v + \alpha = 0 \tag{15}$$

으로 변환됨을 바로 확인할 수 있다. 방정식 (14) 는 $\alpha = 0$ 일 때 직선을 나타내고, $\alpha \neq 0$ 일 때 원을 나타낸다. 또한, $\delta = 0$ 인지 여부에 의하여 원점을 지나는지 여부가 결정된다. 따라서, 변환 (12) 는 원 혹은 직선을 다시 원 혹은 직선으로 보내는 변환이고, 일차분수함수에 의하여 얻어지는 변환 역시 마찬가지이다.

**문제** 1.3.1. 평행이동변환, 회전변환, 확대변환이 평면 위의 원을 원으로 보내고, 평면 위의 직선을 직선으로 보냄을 증명하여라.

**문제** 1.3.2. 관계식 (13), (14) 로부터 (15) 를 유도하여라.

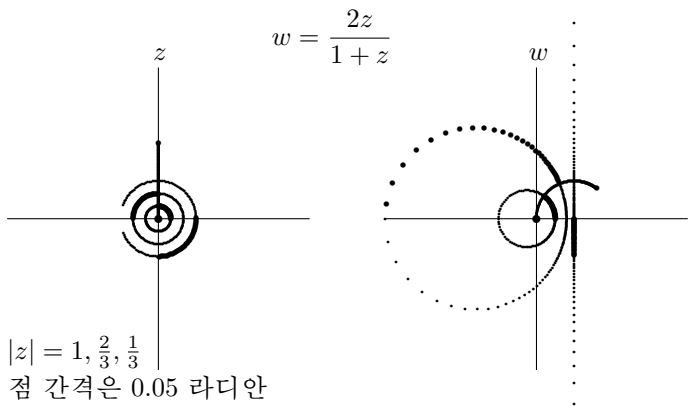
**문제** 1.3.3. 다음 도형들이 변환 (12) 에 의하여 어떻게 움직이는지 살펴보아라.
(가) $\{(x, y) : x > 0,\ y > 0\}$
(나) $\{z : 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$
(다) $\{(x, y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$
(라) $\{z : |z| = 1\}$

평면 위의 세 점이 주어지면 이 세 점을 지나는 직선 혹은 원이 유일하게 결정된다. 이러한 성질은 일차분수함수에 의하여 원의 내부 혹은 반평면이 어떻게 변환되는지 살펴보는 데에 매우 유용하다.

**보기** 1. 단위원판 $\{z : |z| \leq 1\}$ 이 변환

$$w = \frac{2z}{1+z}$$

에 의하여 어떻게 보내지는가 살펴보자. 만일 단위원 위에 있는 점 $z = 1, i, -i$ 를 대입하면 $w = 1, 1+i, 1-i$ 를 얻는데, 이 세 점은 직선 $\operatorname{Re} w = 1$ 를 결정한다. 따라서, 단위원은 직선 $\operatorname{Re} w = 1$ 로 보내어짐을 알 수 있다. 단위원의 내부가 직선의 어느 쪽으로 가는지 알려면 단위원 내부의 점, 예를 들어 $z = 0$ 을 대입해보면 된다. 점 $z = 0$ 이 점 $w = 0$ 로 가므로 단위원판은 직선 $\operatorname{Re} w = 1$ 의 왼쪽 부분으로 변환됨을 알 수 있다. □




일차분수함수 (11) 에서 계수 중 어느 하나는 1 이라 가정해도 되므로, 일차분수함수는 사실상 계수 세 개에 의하여 결정된다. 따라서, 세 점과 이 세 점의 상이 다음

$$z_1 \mapsto w_1, \qquad z_2 \mapsto w_2, \qquad z_3 \mapsto w_3 \tag{16}$$

과 같이 주어지면 이에 해당하는 일차분수함수가 결정된다. 실제로 등식 (11) 에서 $(z, w)$ 에

$$(z_1, w_1), \qquad (z_2, w_2), \qquad (z_3, w_3)$$

을 대입하여 $a, b, c, d$ 에 관한 방정식을 풀면 된다. 이제, 좀 더 간단한 방법을 알아보자. 먼저, 각 $i = 1, 2, 3$ 에 대하여 $w_i = \dfrac{az_i + b}{cz_i + d}$ 가 성립하

므로,

$$w - w_i = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_i+b}{cz_i+d} = \frac{(ad-bc)(z-z_i)}{(cz+d)(cz_i+d)}$$

가 성립한다. 따라서,

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} = \frac{cz_3+d}{cz_1+d} \cdot \frac{z-z_1}{z-z_3}, \qquad \frac{w_2-w_1}{w_2-w_3} = \frac{cz_3+d}{cz_1+d} \cdot \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}$$

를 얻는다. 여기서, 두번째 식은 첫째 식에서 $w = w_2$, $z = z_2$ 를 대입한 것이다. 위 두식을 나누어 $c, d$ 를 소거하면 구하는 방정식

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \tag{17}$$

을 얻는다.

**보기** 2. 점 $z = 1, i, -i$ 를 각각 $w = 1, 1+i, 1-i$ 로 보내는 일차분수함수를 구하면 (17) 에 의하여

$$\frac{(w-1)((1+i)-(1-i))}{(w-(1-i))((1+i)-1)} = \frac{(z-1)(i-(-i))}{(z-(-i))(i-1)}$$

인데, 이를 정리하면 $zw - 2z + w = 0$, 혹은 $w = \dfrac{2z}{1+z}$ 를 얻는다. □

변환 (12) 를 다시 생각해 보자. 이 함수는 집합 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 사이에 정의된 전단사함수이다. 만일 복소평면 $\mathbb{C}$ 에 무한대를 나타내는 점 $\infty$ 를 더하여 집합 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 를 생각하면, 변환 (12) 는 0 을 $\infty$ 로 보내고 $\infty$ 를 0 으로 보내므로, 변환 (12) 를 집합 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 사이에 정의된 전단사함수로 이해하는 것이 자연스럽다. 평행이동변환, 회전변환, 확대변환 등도 $\infty$ 를 $\infty$ 로 보낸다고 이해하면 모두 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 사이에 정의된 전단사함수이므로, 이제부터 임의의 일차분수함수는 집합 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 사이에 정의된 전단사함수로 이해한다. 물론 (11) 에 의하여 정의된 일차분수함수는 (단, $c \neq 0$)

$$-\frac{d}{c} \mapsto \infty, \qquad \infty \mapsto \frac{a}{c}$$

로 이해한다. 세 점과 그 점들의 상이 (16) 과 같이 주어지는 일차분수함수를 찾는 경우, 이들 중 어느 하나가 $\infty$ 라도 상관없다. 이 경우 (17) 에서 해당 복소수를 $\infty$ 로 보내면 된다. 예를 들어서 $z_1 = \infty$ 라면 구하는 일차함수는 (17) 의 우변에 $\lim_{z_1 \to \infty}$ 를 취하여

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{z_2-z_3}{z-z_3}$$

이 된다.

**보기** 3. 일차분수함수 $w = \dfrac{2z}{1+z}$ 는 세 점 $1, 0, -1$ 을 각각 $1, 0, \infty$ 로 보낸다. 역으로 세 점 $1, 0, -1$ 을 각각 $1, 0, \infty$ 로 보내는 일차분수함수를 찾으면, (17) 에 의하여

$$\lim_{w_3 \to \infty} \frac{(w-1)(0-w_3)}{(w-w_3)(0-1)} = \frac{(z-1)(0-(-1))}{(z-(-1))(0-1)}$$

에서 $w = \dfrac{2z}{1+z}$ 를 얻는다. □

**문제** 1.3.4. 다음에 주어진 세 점을 각각 주어진 세 점으로 보내는 일차분수함수를 찾아라.

(가) $0, i, -i \mapsto i, -i, 0$ (나) $1, i, \infty \mapsto 0, 1, \infty$
(다) $0, 1, \infty \mapsto 0, \infty, 1$

**문제** 1.3.5. 변환 $z \mapsto \dfrac{1-z}{1+z}$ 에 의하여 다음 집합에 어떻게 옮겨지는지 살펴보아라.

(가) $\{z : |z| \le 1\}$ (나) $\{z : \operatorname{Re} z \ge 0\}$
(다) $\{z : \operatorname{Im} z \ge 0\}$ (라) $\{z : 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}\}$

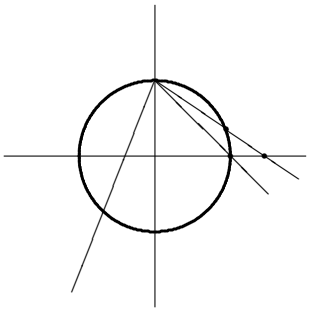
**문제** 1.3.6. 변환 $w = \dfrac{iz}{z-1}$ 에 의한 다음의 상을 구하여라.

(가) $|z| \le 1$ (나) $\operatorname{Re} z \ge 0$ (다) $\operatorname{Im} z \ge 0$

이제, 일차분수함수의 정의역 역할을 하는 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 을 기하학적으로 해석해 보자. 먼저 집합 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 이 단위원과 일대일대응이 됨을 바로 확인하자. 실제로 실수축 위에 있는 한 점 $(a, 0)$ 과 점 $(0, 1)$ 을 지나

는 직선은 단위원 위의 한 점 $(x, y)$ 와 만난다. 이 때, $a$ 와 $(x, y)$ 를 대응시키면 된다. 물론, $\infty$ 는 단위원 위의 점 $(0, 1)$ 과 대응된다.

**문제** 1.3.7. 실수 $a$ 와 단위원 위의 점 $(x, y)$ 사이의 관계식을 구하여라.



이제, 집합 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 도 꼭 같은 방법으로 단위구면과 일대일대응이 된다. 먼저 삼차원 직교좌표공간을 생각하고 단위구면 위의 한 점 $(x, y, h)$ 와 $xy$-평면 위의 점 $(a, b, 0)$, 그리고 점 $(0, 0, 1)$ 이 일직선에 오도록 하면 $(x, y, h)$ 와 $(a, b, 0)$ 사이에 일대일 대응을 얻을 수 있다. 구체적으로 관계식을 구해 보자. 먼저

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{h-1}{-1}$$

이 성립한다. 이 값을 $s$ 라 두면

$$1 = x^2 + y^2 + h^2 = (as)^2 + (bs)^2 + (1-s)^2$$

이므로 $s = \dfrac{2}{a^2+b^2+1}$ 임을 알 수 있다. 따라서, 복소수 $z = a + ib$ 는 단위구면 위의 점

$$\left(\frac{2a}{a^2+b^2+1}, \frac{2b}{a^2+b^2+1}, \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}\right)$$
$$= \left(\frac{2\mathrm{Re}\, z}{|z|^2+1}, \frac{2\mathrm{Im}\, z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

에 대응된다. 여기서 단위구면 위의 점 $(0,0,1)$ 은 이러한 방식으로 얻을 수 없고, $\infty$ 에 대응된다. 이와 같은 일대일대응에 의해서 단위구면을 집합 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 으로 볼 수 있는데, 이런 관점에서 본 단위구면을 **리만**(2)**구면**이라고 부른다.

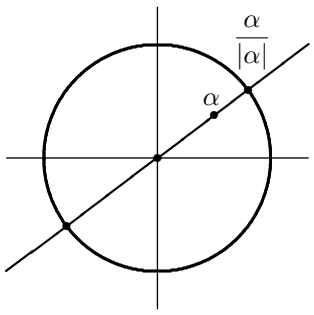
끝으로, 중요한 일차분수함수의 예를 한 가지 살펴보고 이 장을 마친다. 복소수 $|\alpha|<1$ 을 고정하고

$$\phi_\alpha(z)=\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$$

라 정의하자. 우선

$$\phi_\alpha\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)=\frac{\alpha}{|\alpha|},\qquad \phi_\alpha\left(-\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)=-\frac{\alpha}{|\alpha|},\qquad \phi_\alpha(1)=\frac{1-\alpha}{1-\overline{\alpha}}$$

인데, $\pm\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$, $\dfrac{1-\alpha}{1-\overline{\alpha}}$ 등은 모두 단위원 위의 점이므로 변환 $\phi_\alpha$ 는 단위원을 단위원으로 보낸다. 그런데 $\phi_\alpha$ 는 단위원 내부의 점 $\alpha$ 를 다시 단위원 내부의 점 $0$ 로 보내므로, $\phi_\alpha$ 는 단위원판 전체를 단위원판 전체로 보낸다. 이 변환 $\phi_\alpha$ 는 **뫼비우스**(3)**변환**이라 불리운다.




**문제** 1.3.8. 방정식 $\phi_\alpha(z)=z$ 를 만족하는 복소수는 $z=\pm\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$ 뿐임을 보여라.

(2) Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826∼1866), 독일 수학자. Göttingen 과 베를린에서 공부한 후 Göttingen 에서 활동하였다.

(3) August Ferdinand Möbius (1790∼1868), 독일 수학자, 천문학자. Göttingen 에서 공부하고 Leipzig 에서 활동하였는데, 뫼비우스띠로 유명하다.

## 1.4. 연습문제

1.4.1. 복소수 $\alpha \neq 1$ 에 대하여 등식

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}, \qquad \alpha \neq 1$$

이 성립함을 보여라. 이를 이용하여 $\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta$ 의 값을 구하여라.

1.4.2. 다음을 증명하여라.

(가) 만일 $|\alpha| < 1$ 이면 $|\mathrm{Im}\,(i - \overline{\alpha} + \alpha^2)| < 3$ 이 성립한다.

(나) 만일 $|\alpha| = 2$ 이면 $\left|\dfrac{1}{\alpha^4 - 4\alpha^2 + 3}\right| \leq \dfrac{1}{3}$ 이 성립한다.

(다) 만일 $|\alpha| < 1$ 이면 $\left|\mathrm{Arg}\,\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right| < \dfrac{\pi}{2}$ 이 성립한다.

1.4.3. 다음을 증명하여라.

(가) 만일 $|\alpha| < 1,\ |\beta| < 1$ 이면 $\left|\dfrac{\alpha - \beta}{1 - \overline{\alpha}\beta}\right| < 1$ 이 성립한다.

(나) 만일 $|\alpha| = 1$ 혹은 $|\beta| = 1$ (단, $\alpha \neq \beta$) 이면 $\left|\dfrac{\alpha - \beta}{1 - \overline{\alpha}\beta}\right| = 1$ 이 성립한다.

1.4.4. 만일 $|z| = 1$ 이면 다음 등식

$$|z^2 - 1| = 2|\mathrm{Im}\, z|$$

이 성립함을 보여라. 이를 이용하여, $\mathrm{Re}\, z$ 와 $\mathrm{Im}\, z$ 가 유리수이고 $|z| = 1$ 이면 $|z^{2n} - 1|$ 도 유리수임을 보여라.

1.4.5. 다음 방정식

$$az^2 + 2bz\overline{z} + c\overline{z}^2 = d$$

이 복소평면의 원, 타원, 포물선, 쌍곡선을 나타낼 실수 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 의 조건을 각각 구하여라.

1.4.6. 다음 방정식

$$(\alpha + \overline{\alpha})z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + (\gamma + \overline{\gamma}) = 0$$

이 복소평면 위의 원을 나타낼 복소수 $\alpha, \beta, \gamma$ 의 조건을 구하고, 이 때 원의 중심과 반지름을 구하여라.

1.4.7. 서로 다른 네 복소수 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 를 꼭지점으로 하는 사각형이 평행사변형일 필요충분조건이

$$\alpha - \beta + \gamma - \delta = 0$$

임을 보여라.

1.4.8. 서로 다른 세 복소수 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형이 정삼각형일 필요충분조건이

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0$$

임을 증명하라.

1.4.9. 등식 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0$ 을 만족하는 복소수 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 에 대하여 다음 세 명제

(가) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 은 방정식 $z^n - 1 = 0$ 의 근이다,

(나) $\{\alpha_i : i = 1, \ldots, n\} = \left\{\cos\dfrac{2(i-1)\pi}{n} + i\sin\dfrac{2(i-1)\pi}{n} : i = 1, \ldots, n\right\}$ 이다,

(다) $\alpha_i$ 중 하나가 1 이고, 각 $k = 2, \ldots, n-1$ 에 대하여 $\alpha_1^k + \alpha_2^k + \cdots + \alpha_n^k = 0$ 이다

가 서로 동치임을 보여라. [도움말: 각 $k = 1, 2, \ldots, n$ 에 대하여

$$\tau_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k, \qquad \sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k}$$

라 두자. 예를 들어, $n = 3$ 일 때,

$$\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \sigma_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3, \quad \sigma_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

이다. 이 때, $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_{n-1} = 0$ 이면 $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_{n-1} = 0$ 임을 이용하여라. 실제로, 각 $k = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 등식

$$k\sigma_k = \tau_1\sigma_{k-1} - \tau_2\sigma_{k-2} + \tau_3\sigma_{k-3} - \cdots + (-1)^{k-2}\tau_{k-1}\sigma_1 + (-1)^k\tau_k$$

이 성립한다.]

1.4.10. 복소수 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 에 대하여 (단, $n \ge 3$) 다음 등식

$$\frac{\alpha_1^k + \alpha_2^k + \cdots + \alpha_n^k}{n} = \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n}\right)^k, \qquad k = 2, \ldots, n-1 \quad (18)$$

을 생각하자.

(가) 등식 (18) 은 평행이동에 대하여 불변임을 보여라. 즉, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 이 등식을 만족한다는 것과 $\alpha_1 + \beta, \alpha_2 + \beta, \ldots, \alpha_n + \beta$ 가 등식을 만족한다는 것이 동치임을 보여라.

(나) 등식 (18) 은 회전 및 확대에 대하여 불변임을 보여라.
(다) 복소평면 위의 서로 다른 점 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 이 (단, $n \geq 3$) 정$n$각형의 꼭지점이 될 필요충분조건이 등식 (18) 임을 보여라. [도움말: 연습문제 1.4.9]

1.4.11. 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대하여 $\phi_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 라 정의하면

$$\phi_A \circ \phi_B = \phi_{AB}$$

가 성립함을 보여라. 여기서 $AB$ 는 두 행렬 $A$ 와 $B$ 의 곱이다.

1.4.12. 일차분수함수에 관한 다음 물음에 답하라.
(가) 반평면 $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ 을 열린 단위원판 $\{z : |z| < 1\}$ 으로 보내는 일차분수함수를 모두 찾아라.
(나) 반평면 $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ 을 반평면 $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ 으로 보내는 일차분수함수를 모두 찾아라.
(다) 열린 단위원판 $\{z : |z| < 1\}$ 을 열린 단위원판 $\{z : |z| < 1\}$ 으로 보내는 일차분수함수를 모두 찾아라.

1.4.13. 복소수 $\alpha$ 가 고정되어 있을 때 (단, $0 < |\alpha| < 1$), 평면 위의 직선 $L$ 들 가운데 $\phi_\alpha(L) = L$ 인 것들을 모두 찾아라.