

제 3 장 해석함수

이제부터 복소함수의 미적분을 본격적으로 공부한다. 먼저 실함수의 경우와 마찬가지로 뉴톤 몽을 이용하여 복소함수의 미분가능성과 도함수를 정의 한다. 이 때, 주어진 어느 점 근방의 모든 점에서 미분가능하면 이러한 함수를 해석함수라 한다. 복소함수는 정의역과 치역을 실수부와 허수부로 구별함으로써 정의역과 치역의 변수가 두 개인 다변수함수로 이해할 수 있다. 미분가능한 복소함수는 이에 상응하는 다변수함수의 편도함수들 사이에 특별한 관계식을 만족해야 한다. 다항함수나 분수함수의 미분은 실함수의 경우와 같이 계산하면 된다. 여기서는 멱급수로 정의된 함수는 항상 해석함수이고, 그 도함수는 마치 다항식의 도함수를 계산하듯이 하면 된다는 것을 보인다.

3.1. 복소함수의 극한과 미분

실함수의 미분을 생각할 때 그 정의구역을 보통 열린구간으로 잡는데, 그 첫째 이유는 양쪽 극한을 생각하기 위함이다. 임의의 $x \in (a, b)$ 에 대하여 $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (a, b)$ 가 만족하도록 양수 $\epsilon > 0$ 을 잡을 수 있다. 물론 닫힌구간 $[a, b]$ 를 생각하면 $a \in [a, b]$ 이지만 이러한 양수 $\epsilon > 0$ 을 잡는 것이 불가능한데, 이는 양쪽 극한을 생각할 수 없음을 뜻한다. 열린구간의 또 다른 특성은 연결되어 있다는 것이다. 즉, 열린구간 안에서 임의의 두점을 잡아도 두 점을 연결하는 선분이 원래의 구간 안

에 들어 있다. 이러한 점을 염두에 두고, 복소평면의 부분집합 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 가 다음 두 조건

- (영1) 임의의 $z \in \Omega$ 에 대하여 $D(z, r) \subset \Omega$ 를 만족하는 양수 $r > 0$ 이 존재한다,
- (영2) 임의의 두 점 $z, w \in \Omega$ 을 실수축 혹은 허수축과 평행하고 Ω 안에 있는 유한개의 선분으로 연결할 수 있다

을 만족할 때, Ω 를 복소평면의 영역이라 부른다. 지난 2.3 절에서 정의 하였듯이

$$D(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$$

이다.

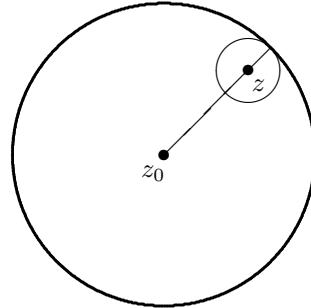
집합 $D(z_0, r)$ 은 영역이다. 먼저 (영1)을 보이기 위하여 $z \in D(z_0, r)$ 을 하나 잡자. 그러면 $|z_0 - z| < r$ 이므로 $s = r - |z_0 - z| > 0$ 이고, $D(z, s) \subset D(z_0, r)$ 이 성립한다. 실제로 $w \in D(z, s)$ 이면 $|z - w| < s$ 이다. 따라서,

$$|z_0 - w| \leq |z_0 - z| + |z - w| < |z_0 - z| + s = r$$

이므로 $w \in D(z_0, r)$ 이다. 즉, 다음

$$w \in D(z, s) \implies w \in D(z_0, r)$$

이 증명되었는데, 이는 곧 $D(z, s) \subset D(z_0, r)$ 이 성립함을 뜻한다.



문제 3.1.1. 집합 $D(z_0, r)$ 이 (영2)를 만족함을 보여라.

문제 3.1.2. 다음 집합들

$$\mathbb{C}, \quad \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \{z : |z| > 1\}, \quad \{z : 1 < |z| < 2\}$$

이 모두 영역임을 보여라.

영역 Ω 에서 정의된 복소함수 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 와 영역의 한 점 $z_0 \in \Omega$ 에 대하여 $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - \alpha| = 0$ 일 때

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha$$

라 쓰고, $f(z)$ 가 α 로 수렴한다고 말한다. 복소평면과 xy -좌표평면을

$$z = x_0 + iy_0 \longleftrightarrow (x_0, y_0)$$

에 의하여 같은 것으로 간주하면 $\lim_{z \rightarrow z_0}$ 와 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)}$ 는 같은 것으로 생각할 수 있다. 따라서, z_0 를 지나는 임의의 곡선을 따라서 z 가 z_0 로 가까이 갈 때 $f(z)$ 가 α 에 가까이 간다는 것과 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha$ 은 같은 말이다. 이제, $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$, $\operatorname{Im} f(z) = v(z)$ 라 두면 u, v 는 이변수 실 함수로 이해할 수 있다. 마찬가지로 $\alpha = a + ib$ 라 두면

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha \iff \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = a, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = b \end{cases} \quad (1)$$

임을 바로 확인할 수 있다.

문제 3.1.3. 명제 (1) 을 증명하여라.

이제, 영역 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 에서 정의된 복소함수 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 와 영역의 한 점 $z_0 \in \Omega$ 에 대하여 다음 극한값

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

이 존재할 때, 함수 $f(z)$ 가 $z = z_0$ 에서 미분 가능하다 말하고, 이 극한값을 $f'(z_0)$ 라 쓴다. 함수 $f(z)$ 가 영역 Ω 의 모든 점에서 미분 가능하면

함수 $z \mapsto f'(z)$ 를 생각할 수 있는데, 이 함수를 $f(z)$ 의 도함수라 하고,
 $f'(z)$ 혹은 $\frac{df}{dz}$ 라 쓴다.
예를 들어서 다항식의 미분법

$$\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$$

등의 미분 공식은 실함수의 경우와 꼭 같은 방법으로 증명된다.

문제 3.1.4. 다항식의 미분법을 증명하여라.

주어진 함수를 미분하는 데에 쓰이는 여러가지 공식 등도 그 증명
이 실함수의 경우와 같으므로 여기서는 생략한다. 예를 들어서, 함수
 $f(z)$ 와 $g(z)$ 가 미분가능하면 $f(z) + g(z)$, $f(z)g(z)$ 도 미분가능하고

$$(f + g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg'$$

등의 공식이 성립한다. 만일 $g(z_0) \neq 0$ 이면, $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ 도 $z = z_0$ 에
서 미분가능하고

$$h'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g'(z_0))^2}$$

이다. 연쇄법칙

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

도 물론 성립한다.

보기 1. 함수 $f(z) = \operatorname{Re} z$ 를 생각해 보자. 만일 $f(z)$ 가 $z = x_0 + iy_0$
에서 미분가능하다면

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{x - x_0}{(x + iy) - (x_0 + iy_0)}$$

의 극한이 존재해야 한다. 그런데, (x_0, y_0) 를 지나고 실수축 및 헤수축
에 평행한 직선 위에서 극한을 생각하면

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{x - x_0}{(x + iy) - (x_0 + iy_0)} = \begin{cases} 1, & y = y_0, \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$$

이므로 극한값이 존재하지 않고, 따라서 $f(z) = \operatorname{Re} z$ 는 어느 점에서도 미분가능하지 않다.

이제, 함수 $g(z) = z\operatorname{Re} z$ 를 생각해 보자. 우선

$$g'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z\operatorname{Re} z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Re} z = 0$$

이다. 만일 $g(z)$ 가 $z = z_0$ 에서 미분가능하다고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned} g'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z\operatorname{Re} z - z_0\operatorname{Re} z_0}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z + z_0)\operatorname{Re}(z + z_0) - z_0\operatorname{Re} z_0}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z_0 + z_0 \frac{\operatorname{Re} z}{z} \right) = \operatorname{Re} z_0 + z_0 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z} \end{aligned}$$

이다. 만일 $z_0 \neq 0$ 이면 극한값 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z} = f'(0)$ 이 존재하는데, 이는 모순이다. 따라서, 함수 $g(z)$ 는 원점에서 미분가능하고, 원점 이외의 모든 점에서 미분가능하지 않다. \square

영역 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 에서 정의된 복소함수 $f(z)$ 와 점 $z_0 \in \Omega$ 가 주어져 있다. 이 때, 다음 성질

$$z \in D(z_0, r) \implies f(z) \text{ 는 } z \text{ 에서 미분가능하다}$$

을 만족하는 양수 $r > 0$ 이 있으면 함수 $f(z)$ 가 $z = z_0$ 에서 해석적이라고 한다. 보기 1에서 살펴본 함수 $g(z) = z\operatorname{Re} z$ 는 원점에서 미분가능하지만 해석적이지는 않다. 만일 함수 $f(z)$ 가 영역 Ω 위의 모든 점에서 해석적이면 이를 Ω 에서 정의된 해석함수라 한다. 영역 위의 모든 점에서 미분가능한 함수는 자동적으로 그 영역에서 정의된 해석함수이다. 다항식으로 정의된 함수는 복소평면 위에서 해석함수이다. 또한, 다항식의 뒷으로 표시되는 유리함수는 그 정의역 위에서 해석함수이다. 예를 들어서 함수 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ 은 영역 $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 위에서 해석적이다.

만일 함수 $f(z)$ 가 $z = z_0$ 에서 미분가능할 때

$$h(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0), \quad \alpha = f'(z_0)$$

라 두면 다음

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \alpha(z - z_0) + h(z)(z - z_0), \\ \lim_{z \rightarrow z_0} h(z) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

이 성립한다.

문제 3.1.5. 만일 관계식 (2) 를 만족하는 복소수 $\alpha \in \mathbb{C}$ 와 함수 $h(z)$ 가 존재하면 $f(z)$ 는 $z = z_0$ 에서 미분가능하고 $f'(z_0) = \alpha$ 임을 증명하여라.

3.2. 코시-리만 방정식

영역 Ω 에서 정의된 복소함수 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 가 Ω 의 한 점 $z_0 = x_0 + iy_0$ 에서 미분가능하다고 가정하자. 그러면, 극한값

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

이 존재한다. 만일 점 z_0 를 지나고 실수축에 나란한 직선을 따라서 z 를 z_0 에 접근시키면

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

이다. 따라서, 편미분계수 $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$ 와 $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$ 가 존재하고 등식

$$f'(x_0 + iy_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \tag{3}$$

이 성립함을 알 수 있다. 한편, 점 z_0 를 지나고 헤수축에 나란한 직선을 따라서 z 를 z_0 에 접근시키면

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{i(y - y_0)} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - i \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} \end{aligned}$$

이 된다. 따라서, 편미분계수 $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$ 와 $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$ 가 존재하고 다음 등식

$$f'(x_0 + iy_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (4)$$

이 성립한다. 특히, 등식 (3) 과 (4) 에 의하여 다음

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (5)$$

이 성립하는데, 이를 코시⁽¹⁾-리만 방정식이라 한다. 지금까지 논의한 바를 정리하면 다음과 같다.

정리 3.2.1. 복소함수 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 가 점 $z_0 = x_0 + iy_0$ 에서 미분가능하면, u, v 의 편도함수가 존재하고 등식 (5) 가 성립한다.

보기 1. 함수 $f(z) = z^2$ 이 미분가능하고 그 도함수가 $f'(z) = 2z$ 임은 이미 알고 있는데, 이를 다변수함수

$$(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$$

로 이해하면

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy$$

(1) Augustin Louis Cauchy (1789~1857), 프랑스 수학자. 원래, 토목공학을 전공하여 하였으나, École Polytechnique의 라플라스 등이 권하여 수학을 하게 되었다. 1816년부터 École Polytechnique의 교수로 있으면서 수많은 논문과 저작을 남겼으나, 1830년 혁명 이후 정치적인 이유(왕당파)로 쫓겨 나기도 했다가 1848년 복귀하였다.

이다. 따라서

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

가 되어서 코시-리만 방정식을 만족한다. 이제 $u(x, y) = x^2 - y^2$ 일 때 $v(x, y)$ 를 어떻게 잡아야 복소함수 $u + iv$ 가 되는지 생각해 보자. 우선

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

이므로 $v(x, y) = 2xy + c(y)$ 꼴이어야 한다. 그런데

$$2x + c'(y) = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

이므로 $c(y)$ 는 상수함수임을 알 수 있다. 결국 $u(x, y) = x^2 - y^2$ 로 주어졌을 때 $u + iv$ 가 해석함수이기 위한 유일한 선택은 상수 차이를 무시하여 $v(x, y) = 2xy$ 이고, 이 때 $u + iv$ 는 해석함수 $w = z^2$ 이 된다. \square

문제 3.2.1. 함수 $f(z) = |z|$ 가 어떤 점에서 미분가능한지 살펴보아라.

문제 3.2.2. 다음 함수들이 어떤 점들에서 코시-리만 방정식을 만족하는지 살펴보아라. 또한, 어떤 점들에서 미분가능한지 살펴보아라.

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------|
| (가) $f(z) = \bar{z}^2$ | (나) $f(z) = x^2 - y^2$ |
| (다) $f(z) = 2xyi$ | (라) $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$ |
| (마) $f(z) = z\operatorname{Re} z$ | (바) $f(z) = z z $ |

문제 3.2.3. 다음 함수들이 복소평면 전체에서 해석함수가 될 상수 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 의 조건을 구하여라.

- | |
|---|
| (가) $f(z) = x + ay - i(bx + cy)$ |
| (나) $f(z) = ax^2 - by^2 + icxy$ |
| (다) $f(z) = e^x \cos ay + ie^x \sin(y + b)$ |
| (라) $f(z) = a(x^2 + y^2) + ibxy$ |

위 보기 1에서 보듯이 복소함수의 미분가능성과 그에 상응하는 이변수함수의 미분가능성은 매우 다른 개념이다. 해석함수 $u + iv$ 의 실수부와 허수부의 이계편도함수들이 연속인 함수라면⁽²⁾ $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

(2) 실제로 임의의 해석함수는 한없이 미분가능하다는 것을 뒤에 배우게 되는데, 이는 실함수의 미분과 극명하게 대비되는 부분이다.

가 성립하므로, 코시-리만 방정식에 의하여 다음 등식

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

이 성립한다. 물론 허수부 v 도 마찬가지이다. 일반적으로 이변수 실함수 u 의 일계 및 이계편도함수가 연속이고 다음 등식

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

을 만족할 때, u 를 조화함수라 부른다.

보기 2. 함수 $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ 은 조화함수이지만 함수 $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ 는 조화함수가 아니다. 따라서, $f(x+iy) = x^2 + y^2 + iv(x, y)$ 는 $v(x, y)$ 를 어떻게 정의해도 절대 해석함수가 될 수 없다. \square

문제 3.2.4. 다음 함수가 조화함수인지 살펴보고, 조화함수인 경우 $v(x, y)$ 를 어떻게 정의하여야 $u + iv$ 가 해석함수가 되는지 알아보아라.

- | | |
|---------------------------|-------------------------------------|
| (가) $u(x, y) = 2xy$ | (나) $u(x, y) = e^x \cos y$ |
| (다) $u(x, y) = x^3 - y^3$ | (라) $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ |

문제 3.2.5. 다음 함수들이 조화함수임을 보여라. 또한 $u + iv$ 가 해석함수가 되도록 함수 v 를 정하여라.

- (가) $u(x, y) = ax + by$ ($a, b \in \mathbb{R}$ 는 상수)
- (나) $u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \neq 0$
- (다) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$
- (라) $u(x, y) = \operatorname{Arg}(x+iy)$, $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$
- (마) $u(x, y) = e^{x^2-y^2} \cos 2xy$

코시-리만 방정식은 점 $x_0 + iy_0$ 을 지나면서 실수축 혹은 허수축과 나란한 직선 위에서 함수가 어떠한지 말하고 있기 때문에 함수의 연속성이거나 미분가능성에 대한 충분조건과는 거리가 멀다. 예를 들어서 함수 $f(z)$ 를 다음

$$f(x+iy) = \begin{cases} 1, & x=0 \text{ 혹은 } y=0 \\ 0, & x \neq 0, y \neq 0 \end{cases}$$

과 같이 정의하면, (5)에 나오는 편미분계수는 원점에서 모두 0이지만 함수 $f(z)$ 는 원점에서 불연속이다. 그러나, 편도함수의 연속성을 가정하면 정리 3.2.1의 역이 성립한다.

정리 3.2.2. 영역 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 에서 정의된 복소함수 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 의 성분함수 $u(x, y), v(x, y)$ 가 Ω 위에서 연속인 편도함수를 가지고 임의의 점 $z_0 \in \Omega$ 에서 등식 (5)가 성립하면, 함수 $f(z)$ 는 Ω 위에서 해석 함수이고 등식 (3)과 (4)가 성립한다.

증명: 편의상 $\ell = h + ik$ 라 두면

$$\begin{aligned} f(z + \ell) - f(z) &= f(x + h, y + k) - f(x, y) \\ &= [f(x + h, y + k) - f(x, y + k)] + [f(x, y + k) - f(x, y)] \\ &= h \frac{\partial f}{\partial x}(x + h_1, y + k) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + k_1) \end{aligned}$$

이 된다. 여기서, 일변수함수 $x \mapsto f(x, y + k)$ 에 평균값정리를 적용하면⁽³⁾ 0과 h 사이에 위 식을 만족하는 h_1 을 잡을 수 있고, k_1 도 마찬가지이다. 이제

$$\begin{aligned} e_1(\ell) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x + h_1, y + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ e_2(\ell) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + k_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

라 두자. 이제, 등식 $i \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ 을 이용하여 계산하면

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \ell) - f(z)}{\ell} &= \frac{1}{\ell} \left(h \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + e_1(\ell) \right] + k \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + e_2(\ell) \right] \right) \\ &= \frac{1}{\ell} \left[(h + ik) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + he_1(\ell) + ke_2(\ell) \right] \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{h}{\ell} e_1(\ell) + \frac{k}{\ell} e_2(\ell) \end{aligned}$$

(3) 함수 $x \mapsto f(x, y + k)$ 의 치역은 복소수이지만 실수부 u 와 허수부 v 에 각각 평균값정리를 적용하면 되고, 이 경우 u 와 v 에 대하여 잡는 h_1 은 각각 다른 값일 수 있지만 $h \rightarrow 0$ 일 때 $h_1 \rightarrow 0$ 이므로 증명에 별 지장이 없다.

이 된다. 그런데, $\left| \frac{h}{\ell} \right| \leq 1$, $\left| \frac{k}{\ell} \right| \leq 1$ 이고, 편도함수들의 연속성으로부터

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} e_1(\ell) = 0, \quad \lim_{\ell \rightarrow 0} e_2(\ell) = 0$$

이므로

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{f(z + \ell) - f(z)}{\ell} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

를 얻는다. 지금까지 논증은 임의의 $z \in \Omega$ 에 대하여 성립하므로 f 는 해석함수이다. \square

보기 3. 이변수 실함수

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) = \log |z|, \quad z = x + iy, \quad z \neq 0$$

을 생각하자. 우선 직접 계산하여 $u(x, y)$ 가 조화함수임을 바로 확인할 수 있다. 만일 $u + iv$ 가 해석함수라면

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

이어야 한다. 그런데,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\arctan \frac{y}{x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[-\arctan \frac{x}{y} \right] = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

이므로, 주어진 영역이 허수축을 포함하지 않는다면 $v(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ 로 두고, 실수축을 포함하지 않는다면 $v(x, y) = -\arctan \frac{x}{y}$ 로 두면 된다. 이제, 실함수 $t \mapsto \arctan t + \arctan \frac{1}{t}$ 의 도함수가 0 인데 이 함수의 정의역이 $(-\infty, 0)$ 과 $(0, \infty)$ 두 구간으로 나뉘어 있고, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ 및 $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\arctan \frac{y}{x} + \arctan \frac{x}{y} = \begin{cases} \pi/2, & xy > 0, \\ -\pi/2, & xy < 0 \end{cases}$$

이다. 따라서, 지난 2.3 절의 (15)에서 정의한 $\text{Log } z$ 는 다음

$$\text{Log } z = \begin{cases} \log |z| + i \arctan \frac{y}{x}, & \operatorname{Re} z > 0, \\ \log |z| + i \left(-\arctan \frac{x}{y} + \frac{\pi}{2} \right), & \operatorname{Im} z > 0, \\ \log |z| + i \left(-\arctan \frac{x}{y} - \frac{\pi}{2} \right), & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases} \quad (7)$$

과 같이 쓸 수 있고, 정리 3.2.2를 적용하면 $\text{Log } z$ 가 영역

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}$$

위에서 해석함수임을 알 수 있다. 한편 관계식 (3)을 적용하면, 임의의 $z \in \Omega$ 에 대하여

$$\frac{d}{dz} \text{Log } z = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z}$$

임을 알 수 있다. \square

문제 3.2.6. 등식 (7)을 증명하고, $\text{Log } z$ 가 해석함수임을 보여라.

만일 영역 $\Omega \subset C$ 위에서 $f' = 0$ 이면 실변수함수의 경우와 마찬가지로 $f(z)$ 는 상수함수이다. 이를 보이기 위하여 $f = u + iv$ 라 두면 $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 이다. 따라서, y 를 고정하면 함수 $x \mapsto u(x, y)$ 가 상수함수이다. 마찬가지로 함수 $y \mapsto u(x, y)$ 역시 상수함수이므로, 영역의 조건 (영2)에 의하여 함수 u 는 영역 Ω 위에서 상수함수이다. 마찬가지로 함수 v 역시 상수함수이고, 따라서 다음을 얻는다.

정리 3.2.3. 영역 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 위에서 정의된 해석함수의 도함수가 0이면 $f(z)$ 는 상수함수이다.

정리 3.2.4. 영역 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 위에서 정의된 해석함수의 절대값 $z \mapsto |f(z)|$ 이 상수함수이면 $f(z)$ 도 상수함수이다.

증명: 만일 $|f| = |u + iv| = C$ 이면 $u^2 + v^2 = C^2$ 이고, 이를 편미분하면

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

를 얻는다. 그런데, 코시-리만 방정식에 의하여

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

을 얻고, 이로부터 $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 을 알 수 있다. 나머지 편미분도 마찬가지 방법으로 모두 0 이 되므로, 정리 3.2.3에 의하여 $f = u + iv$ 는 상수함수이다. \square

문제 3.2.7. 정리 3.2.4의 증명을 마무리하여라.

3.3. 벡터수의 미분

지금까지 살펴본 다항식 함수나 유리함수 이외의 해석함수에 어떠한 것들이 있는가 알아보자. 그 첫번째 대상은 다항식 함수들의 극한으로 이해할 수 있는 벡터수로 표현된 함수이다. 벡터수 $\sum_n a_n z^n$ 의 수렴반경이 $R > 0$ 이면 영역 $D(0, R)$ 위에서 정의된 함수

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

를 생각할 수 있다. 이제 다항식 함수의 도함수를 생각하면, $f(z)$ 의 도함수가

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1} + \cdots$$

가 되리라는 것을 짐작할 수 있다. 우선 이 벡터수의 수렴반경 역시 $R > 0$ 임을 확인하자.

먼저 $|a_n z^{n-1}| \leq |na_n z^{n-1}|$ 이므로, $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ 이 절대수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$ 도 절대수렴하고, 따라서

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + z \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} \right)$$

도 절대수렴한다. 이제, $|z| < R$ 일 때 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ 가 절대수렴함을 보이면 된다. 먼저, $|z| < s < R$ 인 $s \in \mathbb{R}$ 를 잡는다. 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ 을 이용하면, 충분히 큰 자연수 N 에 대하여

$$n \geq N \implies n^{1/n} < \frac{s}{|z|}$$

임을 알 수 있다. 따라서, $n \geq N$ 이면

$$|na_n z^{n-1}| = |a_n| \frac{(n^{1/n} |z|)^n}{|z|} < \frac{1}{|z|} |a_n| s^n$$

인데 급수 $\sum |a_n| s^n$ 가 수렴하므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ 가 절대수렴함을 알 수 있다. 이 급수에 대하여 방금 한 이야기를 다시 적용하면 급수 $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}$ 역시 $|z| < R$ 일 때 절대수렴한다.

이제, 영역 $D(0, R)$ 위에서 함수 $f(z)$ 의 도함수가 $g(z)$ 임을 보이자. 우선

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - nz_0^{n-1} \right]$$

이다. 한편, 직접 계산하여 보면 $n = 2, 3, \dots$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - nz_0^{n-1} &= z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1} - nz_0^{n-1} \\ &= (z - z_0) [z^{n-2} + 2z^{n-3}z_0 + \cdots + (n-1)z_0^{n-2}] \end{aligned} \tag{8}$$

이다. 이제, $z_0 \in D(0, R)$ 를 고정하고, $|z_0| < r < R$ 인 양수 r 을 잡자.

만일 $|z| < r$ 이면

$$\left| \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - nz_0^{n-1} \right| \leq |z - z_0| \sum_{k=1}^{n-1} kr^{n-2} = |z - z_0| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}$$

이다. 따라서,

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) \right| \leq |z - z_0| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} |a_n| r^{n-2}$$

인데, 앞에서 살펴본 바와 같이 $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|r^{n-2}$ 이 유한값이므로

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = g(z_0)$$

임을 알 수 있다.

문제 3.3.1. 위 논증 과정에서 등식 (8) 을 증명하여라.

정리 3.3.1. 벡터수 $\sum_n a_n z^n$ 의 수렴반경이 $R > 0$ 이라 가정하자. 그러면 복소함수

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in D(0, R) \tag{9}$$

는 영역 $D(0, R)$ 위의 모든 점에서 미분가능하고

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad z \in D(0, R) \tag{10}$$

이다. 또한, 벡터수 $\sum_n n a_n z^{n-1}$ 의 수렴반경도 $R > 0$ 이다.

한 마디로 요약하면, 벡터수로 정의된 함수 (9) 는 영역 $D(0, R)$ 위에서 해석함수이다. 또한, 등식 (9) 와 (10) 에 $z = 0$ 을 넣으면

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1$$

임을 알 수 있다. 그런데 등식 (10) 도 수렴반경이 $R > 0$ 인 벽급수로 정의되어 있으므로 정리 3.3.1 을 다시 적용할 수 있다. 그러면

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}, \quad z \in D(0, R)$$

임을 알 수 있고, $f''(0) = 2!a_2$ 이다. 이와 같이 정리 3.3.1 을 반복하여 적용하면

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k}, \quad z \in D(0, R)$$

임을 알 수 있으며, 특히 등식

$$f^{(k)}(0) = k!a_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

을 얻는다. 따라서, 벽급수로 정의된 복소함수는 한없이 미분가능하고 다음 등식

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad z \in D(0, R) \quad (12)$$

을 만족한다.

다음 장에서 정리 3.3.1 의 역이 성립함을 보인다. 다시 말하여 임의의 해석함수는 벽급수로 표현할 수 있으며, 따라서 한없이 미분가능하고 등식 (12) 가 성립함을 보인다. 열린구간에서 미분가능하다고 하여 두번 미분가능하다는 보장이 없는 실함수의 경우와 비교하면 매우 큰 차이가 있음을 알게 된다. 벽급수로 정의된 함수는 수렴영역 안의 임의의 점에서 다시 벽급수로 표현된다는 것은 직접 보일 수 있는데, 이는 실함수의 경우와 마찬가지이다.⁽⁴⁾

만일 급수 $\sum_n a_n z^n$ 의 수렴반경이 양수이고 원점 근방 $D(0, \epsilon)$ 위에서 $\sum_n a_n z^n = 0$ 이면 등식 (11) 에 의하여 모든 계수가 0 을 알 수 있다. 따라서 다음을 얻는다.

(4) 참고문헌 [2], 정리 6.4.2 를 참조하라.

정리 3.3.2. 만일 두 벡터수 $\sum_n a_n z^n$ 와 $\sum_n b_n z^n$ 의 수렴반경이 양수이고, 적절한 양수 $\epsilon > 0$ 에 대하여 등식

$$\sum_n a_n z^n = \sum_n b_n z^n, \quad z \in D(0, \epsilon)$$

이 성립하면, 임의의 $n = 1, 2, \dots$ 에 대하여 $a_n = b_n$ 이다.

이 정리는 벡터수로 표현되는 두 함수 $f(z)$ 와 $g(z)$ 가 원점을 포함하는 작은 열린원판에서 함수값이 같으면 두 함수는 같은 함수임을 말해 준다. 함수 $f(z) - g(z)$ 에 대하여 생각하면, 이를 다음과 같이 달리 표현할 수 있다. 만일 벡터수로 표현되는 함수 $f(z)$ 에 대하여 집합 $N_f = \{z : f(z) = 0\}$ 이 작은 원판 $D(0, \epsilon)$ 을 포함하면 $f(z)$ 는 상수함수이다. 이 정리는 N_f 가 열린원판보다 더 ‘작은’ 집합이라도 성립한다. 이를 위하여, 벡터수로 표현되는 함수 $f(z) = \sum_n a_n z^n$ 에 대하여 N_f 안에서 0으로 수렴하는 수열 $\langle z_m \rangle$ 을 택할 수 있다고 하자(단, $z_m \neq 0$). 이제, $f \neq 0$ 라 가정하고 모순을 찾아보자. 만일 $f \neq 0$ 이면 a_n 가운데 0 아닌 것이 있을 텐데, 그 중 처음으로 0이 아닌 것을 a_k 라 하자. 그러면 함수 $f(z)$ 는 다음

$$f(z) = z^k (a_k + a_{k+1}z + \cdots + a_{k+n}z^n + \cdots)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 만일 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n} z^n$ 이라 두면, 각 $m = 1, 2, \dots$ 에 대하여 $g(z_m) = 0$ 이고 함수 $g(z)$ 가 연속이므로

$$a_k = g(0) = \lim_{m \rightarrow \infty} g(z_m) = 0$$

이 되어 모순이다. 따라서, 다음이 증명되었다.

정리 3.3.3. 벡터수로 표현되는 함수 $f(z) = \sum_n a_n z^n$ 가 주어져 있다. 만일 0으로 수렴하는 복소수열 $\langle z_m \rangle$ (단, $z_m \neq 0$) 위에서 $f(z_m) = 0$ 이면 $f(z) = 0$ 이다.

이 정리는 얼핏 보면 매우 놀라운 정리이다. 그러나, n 차 다항식을 결정하기 위하여 $n+1$ 개의 점 위에서 함수값만 알면 된다는 것을 생각하면 그리 놀라운 것은 아니다. 벡터로 표현되는 함수를 결정하기 위해서는 적어도 무한개의 점에서 함수값이 정해져야 한다는 것인데, 그 핵심은 그 무한개의 점들이 한 곳에 모여 있어야 한다는 것이다. 예를 들어 $\sin z$ 나 $\cos z$ 는 무한집합 위에서 함수값이 0이지만 그 점들이 수렴하지 않고 서로 떨어져 있으므로 정리 3.3.3이 적용되지 않는다.

지난 2.3 절에서 정의한 함수 e^z , $\cos z$, $\sin z$ 들의 미분을 구하면

$$\frac{de^z}{dz} = e^z, \quad \frac{d \cos z}{dz} = -\sin z, \quad \frac{d \sin z}{dz} = \cos z$$

등이 성립함을 바로 확인할 수 있다. 만일 복소수 $\alpha \in \mathbb{C}$ 를 고정하고 $f(z) = e^z e^{\alpha-z}$ 두면 $f'(z) = 0$ 이다. 그런데 $f(0) = e^\alpha$ 이므로 정리 3.2.3을 적용하면 임의의 $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여

$$e^z e^{\alpha-z} = e^\alpha, \quad z \in \mathbb{Z}$$

임을 알 수 있다. 이 식에서 $\alpha - z = w$ 라 두면 지난 2.3 절의 등식 (13), 즉 지수법칙 $e^{z+w} = e^z e^w$ 을 얻는다.

지금까지 모든 논의는 $\sum_n a_n z^n$ 형태의 벡터에 관하여 논하였지만, 이를 평행이동하면 $\sum_n a_n (z - z_0)^n$ 형태의 벡터에 대해서도 물론 꼭 같은 이야기를 할 수 있다.

보기 1. 지난 2.2 절의 보기 3에서 보았듯이

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1 \tag{13}$$

이 성립함을 알고 있다. 한편 $|z| = 1$ 이면 $\lim_n z^n \neq 0$ 이므로 $\sum_n z^n$ 은 수렴하지 않는다. 등식 (13)의 양변을 미분하면

$$1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1$$

임을 알 수 있고, 따라서 등식

$$z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \cdots = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1$$

를 얻는다. 예를 들어 $z = \frac{1}{2}$ 를 대입하면 등식 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$ 를 얻는다.
다시 양변을 미분하고 z 를 곱하면

$$z + 4z^2 + 9z^3 + 16z^4 + \cdots n^2 z^n + \cdots = \frac{z+z^2}{(1-z)^3}$$

을 얻는다. \square

문제 3.3.2. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}$ 와 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}$ 의 값을 구하여라.

보기 2. 벡급수

$$\Lambda(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} z^n = z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \cdots$$

의 수렴반경이 1 임은 바로 확인되는데, 이를 로그급수라 부른다. 로그
급수의 도함수는

$$\Lambda'(z) = 1 - z + z^2 - \cdots = \frac{1}{1+z}$$

로 주어진다. \square

문제 3.3.3. 열린원판 $|z| < 1$ 위에서 $\Lambda(z) = \text{Log}(1+z)$ 임을 보여라.

3.4. 연습문제

3.4.1. 영역 Ω 에서 정의된 복소함수 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 에 대하여 다음이 동치임을
보여라.

- (가) 복소함수 f 가 점 $\alpha \in \Omega$ 에서 미분가능하다.
- (나) 실함수 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ 가 점 $\alpha \in \Omega$ 에서 미분가능하고, $f'(\alpha) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 를
복소함수로 이해하였을 때 선형사상이다.

3.4.2. 미분가능함수 $f(z)$ 에 대하여 다음 등식

$$|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

이 성립함을 보여라.

3.4.3. 다음 극한이 존재하는지 살펴보고, 존재하는 경우 그 극한값을 구하여라.

$$\begin{array}{ll} (\text{가}) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{3z} & (\text{나}) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{|z|} \\ (\text{다}) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \sin z}{e^z - 1} & (\text{라}) \lim_{z \rightarrow 0} z \sin \frac{1}{z} \end{array}$$

3.4.4. 함수 $f(z) = \sqrt{|z^2 - \bar{z}^2|}$ 는 원점에서 코시-리만 방정식을 만족함을 보여라. 이 함수가 원점에서 미분가능한가 살펴보아라.3.4.5. 함수 $u(x, y) = ax^2y - y^3 + xy$ 가 조화함수가 될 실수 $a \in \mathbb{R}$ 의 조건을 구하여라. 또한, 이 때 $u + iv$ 가 해석함수가 되도록 함수 v 를 정하여라.3.4.6. 이변수함수 u 와 v 가 각각 조화함수이고 복소함수 $u + iv$ 가 해석함수라 하자. 이 때, 두 함수의 곱 uv 가 조화함수임을 보여라. 또한 두 조화함수의 곱이 조화함수가 되기 위한 일반적인 조건이 무엇인지 알아보아라.3.4.7. 지난 2.2 절의 보기 2에서 정의한 이항급수 $B_\alpha(z)$ 를 생각하자.

(가) 이항급수 $B_\alpha(z)$ 의 도함수가

$$B'_\alpha(z) = \alpha B_{\alpha-1}(z) = \frac{\alpha}{1+z} B_\alpha(z), \quad |z| < 1$$

로 주어짐을 보여라.

(나) 이항급수와 로그급수 사이에 다음 관계식

$$B_\alpha(z) = e^{\alpha \Lambda(z)}, \quad |z| < 1$$

이 성립함을 보여라.

(다) 관계식

$$B_\alpha(z) = (1+z)^\alpha$$

이 어떤 방식으로 성립하는지 살펴보아라.

3.4.8. 멱급수

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 - \dots$$

가 주어져 있다.

- (가) 이 급수의 수렴반경과 도함수를 구하여라.
 (나) 원점을 중심으로 하는 적절한 열린원판 위에서 다음 등식

$$A(\tan z) = z$$

이 성립함을 보여라.

- (다) 등식

$$A(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{1+iz}{1-iz}, \quad |z| < 1$$

이 성립함을 보여라.

- (라) 집합 $\{A(z) : |z| < 1\}$ 을 구하여라.
 (마) 등식

$$\tan(A(z)) = z, \quad |z| < 1$$

이 성립함을 보여라.

3.4.9. 벡급수

$$J(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} z^n$$

의 수렴반경을 구하여라. 또한, 이 벡급수가 등식

$$z^2 J''(z) + z J'(z) + z^2 J(z) = 0$$

을 만족함을 보여라.

3.4.10. 다음 두 조건

- 임의의 $z, w \in \mathbb{C}$ 에 대하여 $f(z)f(w) = f(z+w)$ 이다,
- 임의의 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $f(x) = e^x$ 이다

을 만족하는 해석함수 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 는 $f(z) = e^z$ 뿐임을 보여라.

3.4.11. 임의의 $z \in \{z : |z| < 1\}$ 에 대하여 부등식

$$|\operatorname{Log}(1+z) - z| < \frac{|z|^2}{2(1-|z|)}, \quad |z| < 1$$

이 성립함을 보여라. 이를 이용하여 다음 등식

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z, \quad z \in \mathbb{C}$$

이 성립함을 보여라.

- 3.4.12. 등식 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 이 열린원판 $D = \{z : |z| < 1\}$ 위에서 성립하고, $z = e^{i\theta}$ 에서 급수 $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ 가 수렴한다고 가정하자.

(가) 만일 $\sigma_n = \sum_{k=0}^n a_k e^{ik\theta}$ 라 두면, 임의의 $z \in D$ 에 대하여 다음 등식

$$\frac{1}{e^{i\theta} - z} = e^{-i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\theta} z^n, \quad \frac{f(z)}{e^{i\theta} - z} = e^{-i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n e^{-in\theta} z^n$$

이 성립함을 보여라.

(나) 임의의 $z \in D$ 에 대하여 등식

$$f(z) - \sigma = e^{-i\theta} (e^{i\theta} - z) \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_n - \sigma) e^{-in\theta} z^n$$

이 성립함을 보여라.

(다) 다음 등식

$$\sigma = \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}, z \in D} f(z)$$

이 성립함을 보여라.⁽⁵⁾

(라) 임의의 $z \in D$ 에 대하여 등식

$$-\operatorname{Log}(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$$

이 성립함을 보여라.

(마) 연습문제 2.4.6 을 이용하여 다음 무한합을 구하여라 (단, $e^{i\theta} \neq 1$).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\theta, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\theta$$

3.4.13. 먹급수로 정의된 해석함수

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$$

을 생각하자.

(5) 이를 아벨 정리라 부르는데, 여러 가지 급수의 합을 계산하는 데에 요긴하게 쓰인다.

Niels Henrik Abel (1802~1829), 노르웨이에서 태어나 수학은 거의 독학으로 공부하고 베를린과 파리에 유학하였다. 대수학과 해석학에서 당시 최고의 수학자였으나, 당대에 별로 인정받지 못하고 고향으로 돌아온 뒤 2년만에 요절하였다. 오차 이상 방정식이 대수적으로 풀리지 않는다는 것을 증명하였다.

(가) 등식

$$zf'(z) = -\operatorname{Log}(1-z), \quad |z| < 1$$

이 성립함을 보여라.

(나) 영역 Ω 를 $\Omega = \{z : |z| < 1, |1-z| < 1\}$ 으로 정의하자. 이 때, 적절한 복소수 $\alpha \in \mathbb{C}$ 에 대하여 다음 등식

$$f(z) + f(1-z) = \alpha - \operatorname{Log} z \operatorname{Log}(1-z), \quad z \in \Omega$$

이 성립함을 보여라.

(다) 연습문제 3.4.12 (다) 를 이용하여 다음 등식

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \alpha - (\log 2)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 2^{n-1}$$

을 증명하여라.⁽⁶⁾

3.4.14. 유리식

$$q(z) = \sum_{k=-m}^n a_k z^k = \frac{a_{-m}}{z^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

와 양수 $r > 0$ 이 주어져 있다. 이 때, 임의의 $|z| = r$ 에 대하여 $|q(z)| \leq M$ 이 라 가정하자.(가) 각 정수 $n \in \mathbb{Z}$ 대하여 $e^{in\theta} \neq 1$ 이 되도록 $\theta \in \mathbb{R}$ 를 잡을 수 있음을 보여라.(나) 위에서 잡은 $\theta \in \mathbb{R}$ 에 대하여 다음 등식

$$\sum_{k=0}^{N-1} q(re^{ki\theta}) = N a_0 + \sum_{k \neq 0, k=-m}^n a_k r^k \frac{1 - e^{Nki\theta}}{1 - e^{ki\theta}}$$

이 임의의 $N = 1, 2, \dots$ 에 대하여 성립함을 보여라.

(다) 다음 부등식

$$|a_0| \leq M + \frac{1}{N} \sum_{k \neq 0, k=-m}^n |a_k| \frac{2r^k}{|1 - e^{ki\theta}|}$$

이 임의의 $N = 1, 2, \dots$ 에 대하여 성립함을 보여라.(라) 부등식 $|a_0| \leq M$ 이 성립함을 보여라.

(6) 급수 $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 의 값은 5.4 절을 참조하라. 또한 $|z| = 1$ 일 때 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ 의 값에 관해서는 연습문제 5.5.15 를 참조하라.

(마) 구멍뚫린 열린원판 $D(0, R) \setminus \{0\}$ 위에서 정의된 해석함수

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k z^k = \frac{a_{-m}}{z^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

가 주어져 있다. 각 $r \in (0, R)$ 에 대하여

$$M_r = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$$

이라 두면 부등식

$$|a_n| \leq \frac{M_r}{r^n}, \quad n = -m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$$

이 성립함을 보여라.⁽⁷⁾ [도움말: 먼저 $n = 0$ 인 경우를 생각한다. 임의의 양수 $\epsilon > 0$ 대하여 $\max \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \right| : |z| = r \right\} < \epsilon$ 을 만족하는 자연수 n 을 잡을 수 있음이 잘 알려져 있다.]

(7) 이 부등식은 코시 부등식이라 부르는데, 다음 장에서 적분을 이용하여 공부할 핵심 내용이다. 이 연습문제의 방법은 바이어슈트라스가 제시한 것이다.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815~1897), 독일 수학자. 김나지움 교사로 있다가 40세가 넘어 베를린 대학에 초빙되어 그 곳에서 죽을 때까지 활동하였다. 그는 해석학 전반에 걸쳐서 이루 헤아릴 수 없이 많은 업적을 남겼는데, 특히 $\epsilon-\delta$ 를 이용한 극한의 정의는 그가 확립한 것이다.