제 4 장 코시 적분공식

이 장에서는 복소함수론의 핵심이라 할 수 있는 선적분을 공부한다. 선적분을 이용하면 해석함수의 원시함수를 정의할 수 있는데, 이 때 선적분의 값이 그 경로에 의존하지 않아야 한다. 코시–구르사 정리는 해석함수의 경우 선적분의 값이 그 경로에 의존하지 않음을 말해 준다. 이를 이용하여 임의의 해석함수를 적분 형태로 나타낼 수 있고, 특히 임의의 해석함수는 멱급수로 표현할 수 있음을 보이게 된다. 지난 3 장에서 공부한 내용과 합하여 보면 주어진 함수가 해석적이란 말은 멱급수전개가 가능하다는 말과 동치임을 알게 된다. 해석함수를 적분 형태로 나타내는 코시 적분공식은 해석함수의 성질을 살펴보는 데에 큰 역할을 하는데, 그 중 대수학의 기본정리 등 대표적인 것을 몇 가지 알아본다. 복소함수의 선적분은 이러한 이론적인 측면 뿐 아니라 실제 실적분의 값을 구하는 데에도 큰 역할을 한다.

4.1. 선적분

실변수 복소수값 함수 f 의 실수부와 허수부를 각각 u 와 v 로 두면, $f = u + iv$ 이다. 이때 u 와 v 가 동시에 적분가능하면 f 가 적분가능하다고 한다. 미분에 대해서도 마찬가지로 정의하며 f 의 적분과 미분을 각각 다음

$$\int f = \int u + i \int v, \qquad f' = u' + iv'$$

과 같이 정의한다. 그러면 실변수 실수값 함수의 미적분에 대하여 성립하는 기본공식들이 실변수 복소수값 함수에 대해서도 그 의미가 있는 경우 그대로 성립함을 쉽게 확인할 수 있다. 특히 부등식

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f| \tag{1}$$

도 성립하는데, 이를 증명하여 보자. 함수 $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ 가 주어져 있을 때, 적분값을 극형식 $\displaystyle\int_a^b f = re^{i\theta}$ 으로 쓰자. 만일 $e^{-i\theta}f$ 의 실수부를 u 라 두면 $u \le |e^{-i\theta}f| = |f|$ 이므로,

$$\left|\int_a^b f\right| = e^{-i\theta}\int_a^b f = \int_a^b e^{-i\theta}f = \int_a^b u \le \int_a^b |f|$$

을 얻는다.

문제 4.1.1. 등식 $\displaystyle\int(\alpha f) = \alpha\int f$ 이 성립함을 증명하여라.

이제 곡선을 따른 복소변수 함수의 선적분에 대해서 알아보는데 먼저 곡선의 의미를 분명히 하자. 복소평면의 영역 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 가 주어져 있을 때, 구간 $[a,b]$ 에서 정의된 연속함수 $\Gamma : [a,b] \to \Omega$ 를 영역 Ω 안에 있는 **곡선**이라 한다. 만일 함수 Γ 의 실수부와 허수부가 모든 C^1-함수이면, 즉 미분가능하고 그 도함수가 연속이면, 이를 C^1-**곡선**이라 한다. 앞으로, 구간 $[a,b]$ 를 유한개의 부분구간으로 나누어서 각 부분구간 위에서 C^1-곡선이고 전체 구간 $[a,b]$ 위에서 연속인 곡선을 **조각** C^1-**곡선**이라 부른다. 앞으로 이 책에서 **곡선**이라 하면 항상 조각 C^1-곡선을 의미한다.

이제 복소함수의 선적분을 정의하자. 영역 Ω 위에서 정의된 복소함수 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 와 영역 Ω 안의 곡선 $\Gamma : [a,b] \to \Omega$ 에 대하여 **선적분** $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz$ 을 다음

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(\Gamma(t))\Gamma'(t)dt$$

과 같이 정의한다.

보기 1. 복소평면 위의 네 점 $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$ 을 시계반대방향으로 연결하는 정사각형 R 의 둘레는

$$\Gamma(t) = \begin{cases} (-t+1)+i, & 0 \le t \le 2, \\ -1+i(-t+3), & 2 \le t \le 4, \\ (t-5)-i, & 4 \le t \le 6, \\ 1+i(t-7), & 6 \le t \le 8 \end{cases}$$

로 주어질 수 있다. 한편, 단위원을 시계반대방향으로 도는 곡선은

$$\gamma(t) = e^{it}, \qquad -\pi \le t \le \pi$$

로 주어질 수 있다. 만일 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ 이라면

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz &= \int_0^2 \frac{-dt}{(-t+1)+i} + \int_2^4 \frac{-idt}{-1+i(-t+3)} \\ &\qquad + \int_4^6 \frac{dt}{(t-5)-i} + \int_6^8 \frac{idt}{1+i(t-7)} \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{-1}{-t+i} + \frac{-i}{-1-it} + \frac{1}{t-i} + \frac{i}{1+it} \right) dt \\ &= 4\int_{-1}^1 \frac{t+i}{1+t^2}\,dt \end{aligned}$$

이다. 그런데 $y = \dfrac{t}{1+t^2}$ 은 기함수이므로

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz = 4i\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2\pi i$$

이고, 또한

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\,dt = 2\pi i$$

이다. 한편

$$\int_\gamma z dz = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} \cdot ie^{it} dt = 0$$

이다. □

문제 4.1.2. 보기 1 의 곡선 Γ 에 대하여 적분값 $\int_\Gamma z dz$ 를 구하여라.

문제 4.1.3. 다음 곡선을 따라서 적분값 $\int_\Gamma \bar{z} dz$ 을 구하여라.
(가) $\Gamma(t) = e^{it}, \quad -\pi \le t \le \pi$
(나) $\Gamma(t) = e^{-it}, \quad -\pi \le t \le \pi$
(다) $\Gamma(t) = e^{it} + 3, \quad 0 \le t \le \pi$

곡선 $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ 에서 $\Gamma(a)$ 를 **시작점**이라 하고 $\Gamma(b)$ 를 **끝점**이라 한다. 곡선 $\Gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ 의 끝점과 곡선 $\Gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ 의 시작점이 같을 때, 새로운 곡선 $\Gamma_1 + \Gamma_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \to \mathbb{C}$ 를 다음

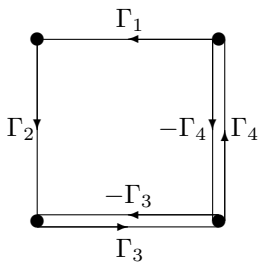
$$(\Gamma_1 + \Gamma_2)(t) = \begin{cases} \Gamma_1(t), & t \in [a_1, b_1] \\ \Gamma_2(t + a_2 - b_1) & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

과 같이 정의한다. 또한, $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ 에 대하여 곡선 $-\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ 를 다음

$$(-\Gamma)(t) = \Gamma(b + a - t), \qquad t \in [a, b]$$

과 같이 정의한다. 다시 말하여, $\Gamma_1 + \Gamma_2$ 는 붙어 있는 두 곡선 Γ_1 과 Γ_2 를 하나로 연결하여 보는 것이고, $-\Gamma$ 는 Γ 의 방향을 바꾸는 것이다.

보기 2. 복소평면 위의 점 $z_1 = 1+i, z_2 = -1+i, z_3 = -1-i, z_4 = 1-i$ 가 주어져 있을 때, 점 z_i 에서 z_{i+1} 까지 가는 선분을 Γ_i 라 두자. 여기서 $z_5 = z_1$ 이라 두면 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ 가 정의된다. 그러면 $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ 는 바로 보기 1 에서 정의된 곡선 Γ 이다. 또한, $\Gamma_1 + \Gamma_2$ 나 $(-\Gamma_4) + (-\Gamma_3)$ 은 모두 z_1 에서 z_3 까지 가는 곡선이다. □



곡선 $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ 이 주어져 있을 때, 각 $i = 1, 2, \ldots, n-1$ 에 대하여 곡선 Γ_i 의 끝점과 Γ_{i+1} 의 시작점이 같으면 $\Gamma_1 + \cdots + \Gamma_n$ 은 귀납적으로 자연스레 정의된다. 이 경우 다음 등식

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\cdots+\Gamma_n} f(z)dz &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i} f(z)dz \\ \int_{-\Gamma} f(z)dz &= -\int_{\Gamma} f(z)dz \end{aligned} \tag{2}$$

이 성립한다.

문제 4.1.4. 등식 (2) 를 증명하여라.

문제 4.1.5. 곡선 $\Gamma : [a,b] \to \Omega$ 와 C^1-함수 $g : [c,d] \to [a,b]$ 에 대하여 (단, $g(c) = a,\ g(c) = d$) 등식 $\displaystyle\int_{\Gamma\circ g} f(z)dz = \int_{\Gamma} f(z)dz$ 이 성립함을 보여라.

양끝점이 일치하는 곡선을 **닫힌곡선**이라 한다. 특히, 주어진 닫힌 곡선 $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ 가 구간 $[a,b)$ 위에서 단사함수일 때, 이를 **단일폐곡선**이라 부른다. 앞으로, 단일폐곡선을 따라서 선적분할 때에는 별도의 언급이 없는 한 항상 시계반대방향으로 곡선이 주어진 것으로 간주한다. 이 경우, 보기 1 에 주어진 곡선 γ 는 간단히 $|z| = 1$ 로 나타낼 수 있다. 만일 복소평면의 네 점 $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$ 을 꼭지점으로 하는 정사각형을 R 이라 두면 보기 1 에 주어진 곡선 Γ 는 사각형 R 의 **경계** ∂R 로 나타낼 수 있다.

보기 3. 양수 $r > 0$ 과 정수 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 에 대하여

$$\int_{|z|=r} z^n dz = \int_{-\pi}^{\pi} (re^{it})^n ire^{it} dt = ir^{n+1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)t} dt$$

이다. 그런데 $n+1 \neq 0$ 이면

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)t} dt = \left. \frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)t} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

이므로

$$\int_{|z|=r} z^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

임을 알 수 있다. □

문제 4.1.6. 다음 적분값을 구하여라.

(가) $\displaystyle\int_{|z|=2} \operatorname{Re} z dz$ (나) $\displaystyle\int_{|z|=2} \overline{z} dz$ (다) $\displaystyle\int_{|z|=2} |z| dz$

영역 Ω 에서 복소함수 F 가 미분가능하고 $F' = f$ 일 때, 함수 F 를 f 의 **원시함수**라 한다.

정리 4.1.1. 영역 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 위에서 정의된 연속복소함수 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 가 원시함수 F 를 가진다고 하자. 그러면 임의의 곡선 $\Gamma : [a, b] \to \Omega$ 에 대하여 등식

$$\int_\Gamma f(z)dz = F(\Gamma(b)) - F(\Gamma(a))$$

이 성립한다.

증명: 연쇄법칙에 의하여 $\dfrac{d}{dt}(F(\Gamma(t)) = F'(\Gamma(t))\Gamma'(t)$ 이므로, 미적분학의 기본정리에 의하여 다음 등식

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma F'(z)dz = \int_a^b F'(\Gamma(t))\Gamma'(t)dt = F(\Gamma(b)) - F(\Gamma(a))$$

이 성립한다. □

정리 4.1.1 의 핵심은 적분값 $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz$ 가 곡선 Γ 의 양끝점 $\Gamma(a)$ 와 $\Gamma(b)$ 에 의하여 결정된다는 점이다. 따라서, 연속함수 f 가 원시함수를 가지면 임의의 닫힌곡선 위에서 선적분이 항상 0 이다. 따라서, 보기 3 에서 $n \neq -1$ 일 때 $\displaystyle\int_{|z|=r} z^n dz = 0$ 이 되는 이유를 바로 알 수 있다. 그러나, $n = -1$ 이면 정의역 전체에서 원시함수를 잡을 수 없다.

곡선 $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ 를 실수부와 허수부로 나누어 $z(t) = x(t) + iy(y)$ 로 쓰면, 이 곡선의 **길이**는

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \int_a^b |x'(t) + iy'(t)|dt = \int_a^b |\Gamma'(t)|dt$$

로 주어진다. 선적분 $\int_\Gamma f(z)dz$ 의 정의에서 $dz = \Gamma'(t)dt$ 이듯이 앞으로 $|dz| = |\Gamma'(t)|dt$ 로 표시한다. 다음 정리는 선적분의 절대값의 범위를 제한하는 데에 유용하게 쓰인다.

정리 4.1.2. 만일 길이가 L 인 곡선 Γ 위에서 함수 f 가 $|f(z)| \le M$ 를 만족하면 부등식

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \le \int_\Gamma |f(z)|\,|dz| \le ML$$

이 성립한다.

증명: 부등식 (1) 을 이용하여 계산하면

$$\begin{aligned}\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| &= \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\right| \le \int_a^b |f(z(t))|\,|z'(t)|dt \\ &= \int_\Gamma |f(z)|\,|dz| \le M\int_\Gamma |dz| = ML\end{aligned}$$

이 된다. □

문제 4.1.7. 다음 적분값을 구하여라.

(가) $\int_{|z|=2} z|dz|$ (나) $\int_{|z|=2} \overline{z}|dz|$ (다) $\int_{|z|=2} |z|\,|dz|$

4.2. 코시–구르사 정리

복소해석의 꽃이라 할 수 있는 코시–구르사 정리는 열린원판 위에서 정의된 해석함수는 임의의 닫힌곡선 위에서 선적분이 0 이라는 것이다. 그 증명은 정리 4.1.1 에 의하여 원시함수가 있다는 것을 보이면 된다. 원시함수의 후보는 당연히 원판의 중심에서 점 z 까지 선분을 긋고 이 위에서 선적분한 값을 $F(z)$ 로 정하는 것이다. 이러한 함수가 정말 원시함수가 되는지 증명하기 위하여 다음 정리가 필수적이다.

정리 4.2.1. (코시–구르사[1]) 복소함수 f 가 직사각형 R 을 포함하는 영역 위에서 해석적이면

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

이 성립한다.

증명: 직사각형 R 의 각 변을 이등분함으로써 직사각형 R 을 사등분하여 이를 각각 R^1, R^2, R^3, R^4 라 하자. 그러면 부등식

$$\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right| = \left|\sum_{i=1}^{4}\int_{R^i} f(z)dz\right| \le \sum_{i=1}^{4}\left|\int_{R_i} f(z)dz\right|$$

이 성립하므로, 네 사각형 R^1, R^2, R^3, R^4 중 적어도 어느 하나 (이를 R_1 이라 이름붙이자) 는 다음 부등식

$$\left|\int_{\partial R_1} f(z)dz\right| \ge \frac{1}{4}\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right|$$

을 만족해야 한다. 직사각형 R_1 에 대하여 같은 작업을 반복하여 R_2 를 얻고, 이를 계속하면 직사각형 $R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_n \supset \cdots$ 을 얻는데, 다음 성질을 가진다:

(가) 직사각형 R_{n+1} 은 직사각형 R_n 을 사등분한 것들 중 하나이다,

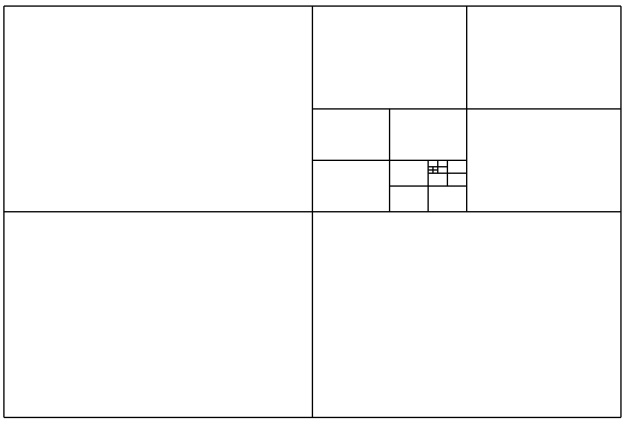
(나) 부등식 $\left|\int_{\partial R_{n+1}} f(z)dz\right| \ge \frac{1}{4}\left|\int_{\partial R_n} f(z)dz\right|$ 이 성립한다.

이러한 사각형들은 R 의 한 점 z_0 로 수렴하게 된다.[2]

---

(1) Edouard Jean-Baptiste Goursat (1858∼1936), 프랑스 수학자. Ecole Normale Supérieure 에서 공부하고, 같은 대학과 파리대학에서 활동하였다. 코시는 원래 함수 f 의 도함수가 연속이라는 조건 하에서 이를 증명하였으나, 구르사는 이 가정이 없어도 됨을 보였다. 연습문제 4.4.1 을 참조하라.

(2) 이 부분은 좀 더 세밀한 증명을 요하지만 본질적으로 실수의 완비성공리와 마찬가지 주장이 된다. 참고문헌 [2].



이제, 함수 $f(z)$ 가 $z = z_0$ 에서 미분가능하므로, 지난 3.1 절의 (2) 에 의하여 함수 $f(z)$ 를 다음

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)h(z)$$

과 같이 쓸 수 있다. 여기서 $\lim_{z \to z_0} h(z) = 0$ 이다. 그런데 정리 4.1.1 에 의하여 $\int_{\partial R_n} dz = \int_{\partial R_n} z dz = 0$ 이므로 (나) 에 의하여

$$\frac{1}{4^n}\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right| \le \left|\int_{\partial R_n} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial R_n} (z - z_0)h(z)dz\right|$$

임을 알 수 있다. 이제, 사각형 R 의 둘레를 L 이라 하면 사각형 R_n 의 둘레는 $\frac{L}{2^n}$ 이 된다. 그리고 사각형 R 의 대각선의 길이를 D 라 하면 사각형 R_n 의 대각선의 길이는 $\frac{D}{2^n}$ 가 되므로, ∂R_n 위에서 $|z - z_0| \le \frac{D}{2^n}$ 이다. 또한 ∂R_n 위에서 $|h(z)|$ 의 최대값을 M_n 이라 하면 정리 4.1.2 에 의하여

$$\frac{1}{4^n}\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right| \le \left|\int_{\partial R_n} (z - z_0)h(z)dz\right| \le \frac{D}{2^n} M_n \frac{L}{2^n} = \frac{DLM_n}{4^n}$$

이 성립한다. 따라서

$$\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right| \le DLM_n$$

인데 $\lim_{z\to z_0} h(z) = 0$ 에서 $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$ 이므로 증명이 끝난다. □

이제 열린원판 $D = D(z_0, r)$ 위에서 해석함수 $f(z)$ 가 정의되어 있다고 하자. 영역 D 의 한 점 $z = x + iy \in D$ 가 주어지면 이 점과 중심 $z_0 = x_0 + iy_0$ 을 꼭지점으로 하는 직사각형이 결정된다. 이 직사각형의 경계를 따라서 z_0 에서 z 까지 가는 곡선을 만들되, 수평선을 먼저 지나는 것을 Γ_1 이라 하고 수직선을 먼저 지나는 것을 Γ_2 라 한다. 그러면

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{x_0}^{x} f(t + iy_0)dt + \int_{y_0}^{y} f(x + it)dt$$

임을 알 수 있다. 또한,

$$\int_{\Gamma_2} f(z)dz = \int_{y_0}^{y} f(x_0 + it)dt + \int_{x_0}^{x} f(t + iy)dt$$

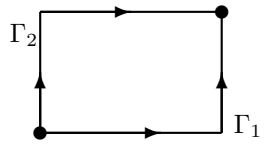
이다. 정리 4.2.1 은 이 두 적분값이 같음을 말해 주는데, 그 공통값을 $F(z)$ 라 하자. 그러면 처음 등식에서

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{y_0}^{y} f(x + it)idt\right) = if(x + iy) = if(z)$$

를 얻고, 두번째 등식에서

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{x_0}^{x} f(t + iy)idt\right) = f(x + iy) = f(z)$$

을 얻는다. 그런데, f 는 연속함수이므로 정리 3.2.2 에 의하여 F 는 미분가능하고 f 의 원시함수임을 알 수 있다.



정리 4.2.2. 열린원판 위에서 정의된 해석함수는 원시함수를 가진다.

이제, 정리 4.1.1 에 의하여 다음을 얻는다.

정리 4.2.3. (코시) 함수 f 가 열린원판 D 위에서 정의된 해석함수라 하자. 그러면 D 안에 있는 임의의 닫힌곡선 Γ 에 대하여

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

이 성립한다.

보기 1. 해석함수 $f(z) = e^{-z^2}$ 에 코시정리를 적용하여 보자. 만일 다음 곡선들

$$\begin{aligned} \Gamma_1(t) &= t, & 0 \le t \le a \\ \Gamma_2(t) &= a + it, & 0 \le t \le a \\ \Gamma_3(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)t, & 0 \le t \le a\sqrt{2} \end{aligned}$$

을 생각하면 (단, $a > 0$)

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz = \int_{\Gamma_3} f(z)dz \tag{3}$$

임을 알 수 있다. 그러면

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_0^a e^{-t^2}dt, \qquad \int_{\Gamma_3} f(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\int_0^{a\sqrt{2}} e^{-it^2}dt$$

이다. 한편, 곡선 Γ_2 위에서 $\left|e^{-(a+it)^2}\right| = e^{-a^2+t^2} \le e^{-a^2+at}$ 이므로

$$\begin{aligned} \left|\int_{\Gamma_2} f(z)dz\right| &= \left|i\int_0^a e^{-(a+it)^2}dt\right| \\ &\le e^{-a^2}\int_0^a e^{at}dt = \frac{1}{a}(1-e^{-a^2}) \le \frac{1}{a} \end{aligned}$$

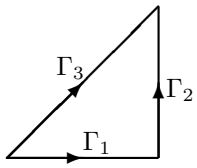
임을 알 수 있다. 이제 등식 (3) 에서 극한 $\lim\limits_{a\to\infty}$ 를 취하면

$$\int_0^\infty e^{-it^2}dt = \frac{\sqrt{2}}{1+i}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{2}}{1+i}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1-i)$$

을 얻는다. 이 식에서 실수부와 허수부를 각각 비교하면 등식

$$\int_0^\infty \cos t^2 dt = \int_0^\infty \sin t^2 dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

을 얻는다. □



문제 4.2.1. 다음 곡선들

$$\begin{aligned} \Lambda_1(t) &= t, & 0 \le t \le a \\ \Lambda_2(t) &= ae^{it}, & 0 \le t \le \frac{\pi}{4} \\ \Lambda_3(t) &= e^{\pi i/4} t, & 0 \le t \le a \end{aligned}$$

에 대하여 보기 1 과 같은 계산을 해 보아라.

지금까지 논의 과정에서 함수 f 의 영역으로 설정한 열린원판의 역할이 무엇이었는지 살펴보자. 정리 4.2.1 의 증명을 살펴보면, 직사각형들의 극한점에서 함수 f 가 미분가능하다는 점이 핵심이었다. 즉, 직사각형 내부의 모든 점에서 함수 f 가 미분가능해야 정리 4.2.1 의 증명이 성립한다. 따라서, 정리 4.2.3 의 핵심은 영역의 두 점을 실수축 혹은 허수축과 평행한 선분으로 연결하는 여러 가지 방법을 생각하였을 때 생기는 직사각형 내부의 모든 점에서 함수 f 가 미분가능하다는 것이다. 즉, 이러한 직사각형들의 내부가 다시 영역의 내부에 포함된다는 것이다. 이러한 성질을 만족하는 영역에서는 정리 4.2.3 이 그대로 성립하는데, 이러한 영역을 **단순연결영역**이라 부른다. 만일 다음 영역들

$$\{z : z \neq 0\}, \qquad \{z : 1 < |z| < 2\}, \qquad \{z : |z| > 1,\ |z-3| > 1\}$$

처럼 영역 내부에 '구멍'이 있으면 단순연결영역이 아니다. 주어진 영역 Ω 가 단순연결일 필요충분조건은 그 여집합 $\mathbb{C} \setminus \Omega$ 가 연결집합임이다. 함수 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ 가 미분가능함수임에도 불구하고

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz \neq 0$$

인 이유는 주어진 곡선의 내부에 미분불가능한 점이 있기 때문이다. 만일 단일폐곡선 Γ 가 그 '내부'에 원점을 포함하지 않으면

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z}\, dz = 0$$

이 된다.

이제 닫힌곡선 내부에서 함수 $f(z)$ 의 미분불가능한 점이 있을 때, 코시 정리를 적용하는 방법을 생각하여 보자. 단순연결영역 Ω 안에 시계 반대 방향의 단일폐곡선 Γ 가 주어져 있고, Γ 내부에 한 점 z_0 가 있다고 하자. 함수 $f(z)$ 가 영역 $\Omega \setminus \{z_0\}$ 위에서 해석적일 때 적분 $\displaystyle\int_{\Gamma} f(z)dz$ 를 계산하기 위하여 단일폐곡선 Γ 내부에 원 $|z - z_0| = r$ 를 잡으면 등식

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{|z-z_0|=r} f(z)dz \tag{4}$$

이 성립한다. 이를 보이기 위하여 원의 중심 z_0 를 지나는 직선을 긋고, 이 직선이 원과 만나는 두 점을 각각 A, B 라 하자. 점 z_0 를 출발하는 A 방향의 반직선은 적어도 한 점에서 곡선 Γ 를 만나는데, 그 중 A 에 가장 가까운 점을 C 라 하자. 마찬가지로 B 방향으로 가장 먼저 Γ 와 만나는 점을 D 한다. 점 C, D 는 곡선 Γ 를 두 부분으로 나누는데, C 에서 D 까지를 Γ_1 이라 두고, D 에서 C 까지를 Γ_2 라 둔다. 마찬가지로 A 에서 B 까지 원을 따라가는 곡선을 C_1 이라 하고 B 에서 A 까지 원을 따라가는 곡선을 C_2 라 하자. 마지막으로 점 A 에서 C 로 가는 선분을 L_1, 점 B 에서 D 까지 가는 선분을 L_2 라 이름짓는다. 그러면 다음 두

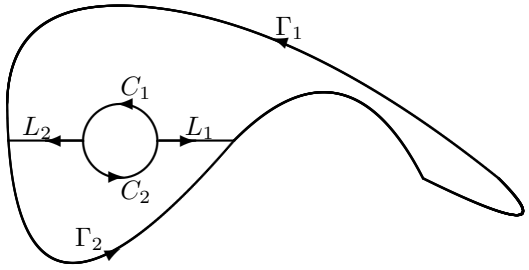
곡선

$$L_1 + \Gamma_1 + (-L_2) + (-C_1), \qquad (-L_1) + (-C_2) + L_2 + \Gamma_2$$

은 모두 닫힌곡선이고, 그 내부에서 함수 $f(z)$ 가 해석함수이다. 따라서, 코시 정리에 의하여

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{L_1+\Gamma_1+(-L_2)+(-C_1)} f + \int_{(-L_1)+(-C_2)+L_2+\Gamma_2} f \\ &= \int_{L_1} f + \int_{\Gamma_1} f - \int_{L_2} f - \int_{C_1} f - \int_{L_1} f - \int_{C_2} f + \int_{L_2} f + \int_{\Gamma_2} f \\ &= \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} f - \int_{C_1+C_2} f = \int_{\Gamma} f - \int_{C} f \end{aligned}$$

가 되어 등식 (4) 를 얻는다.



보기 2. 만일 $|a| < r$ 이면 원점은 원 $|z-a| = r$ 의 내부에 있게 된다. 따라서, $0 < s < r - |a|$ 인 $s \in \mathbb{R}$ 을 잡으면

$$\int_{|z-a|=r} \frac{dz}{z} = \int_{|z|=s} \frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ise^{i\theta}}{se^{i\theta}}\, d\theta = 2\pi i$$

이다. □

문제 4.2.2. 다음 함수들에 대하여 적분값 $\int_{|z-1|=3} f(z)dz$ 을 구하여라.

(가) $f(z) = z^2 + 3$ (나) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

(다) $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2}$ (라) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$

문제 4.2.3. 원 C 가 다음과 같이 주어졌을 때, 적분값 $\int_C \frac{dz}{1+z^2}$ 을 구하여라.

(가) $|z-i|=1$ (나) $|z+i|=1$
(다) $|z|=2$ (라) $|z-1|=2$
(마) $|z-1|=1$

4.3. 코시 적분공식과 멱급수

이제, 이 책 전체를 통하여 가장 중요한 역할을 하는 코시의 적분공식을 쓰고 증명하자.

정리 4.3.1. (코시 적분공식) 함수 $f(z)$ 가 단순연결영역 Ω 안에서 해석함수이고, 단일폐곡선 Γ 가 Ω 안에 있다. 그러면 Γ 내부의 임의의 점 z_0 에 대하여 다음 등식

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

이 성립한다.

증명: 먼저 Γ 내부에 들어가는 원 $C_r : |z-z_0| = r$ 을 하나 잡자. 그러면 등식 (4) 에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\end{aligned}$$

인데, 4.1 절의 보기 3 과 같이 직접 계산하면 $\int_{C_r} \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i$ 이다. 따라서, 등식

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz$$

을 얻는다. 이제, 원 C_r 위에서 $|f(z)-f(z_0)|$ 의 최대값을 M_r 이라 하면 $\left|\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \le \dfrac{M_r}{r}$ 이므로

$$\left|\int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \le \frac{M_r}{r}\,(2\pi r) = 2\pi M_r$$

이다. 그런데, 함수 $f(z)$ 는 점 $z=z_0$ 에서 연속이므로 $\lim\limits_{r\to 0} M_r = 0$ 이고, 따라서 원하는 등식을 얻는다. □

보기 1. 코시 적분공식을 이용하면

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz = e^0 = 1$$

임을 바로 알 수 있다. 또한, $\dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{z-i} - \dfrac{1}{z+i}\right)$ 이므로

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\int_{|z|=2} \frac{dz}{z-i} - \int_{|z|=2} \frac{dz}{z+i}\right) = 0$$

임을 알 수 있다. □

문제 4.3.1. 다음 적분값을 구하여라.

(가) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3-1}{z+i}\,dz$ (나) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{2z-3i}\,dz$

(다) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{z^4-1}\,dz$

코시 적분공식의 우변은 곡선 Γ 위에서 함수 $f(z)$ 가 어떤 값을 가지는가에 의하여 결정된다. 따라서, 단일폐곡선 위에서 해석함수의 값이 정해지면 그 내부에서의 함수값은 자동적으로 정해짐을 알 수 있다. 이제, 코시 적분공식에 나오는 다음 형태

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \tag{5}$$

로 주어진 함수 $F(z)$ 의 성질을 살펴보자. 여기서 Γ 는 닫힌곡선이고 함수 f 는 곡선 위에서 정의된 연속함수이다. 다음 정리의 목적은 이

러한 꼴로 정의된 함수는 자동적으로 멱급수전개가 가능하다는 것이다. 그러면 코시 적분공식에 의하여 임의의 해석함수는 멱급수전개가 가능함을 알게 되고, 이는 바로 정리 3.3.1 의 역이 성립함을 말해 주는 것이다. 앞으로 곡선 $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ 가 주어지면 곡선 위의 점집합 $\{\Gamma(t) : a \le t \le b\}$ 도 그냥 Γ 라 쓴다.

우선 개략적인 계산을 하여 보자. 먼저 닫힌곡선 내부에 있으면서 곡선 Γ 와 만나지 않는 원 $|z - z_0| = r$ 을 잡고 $z \in D(z_0, r)$ 을 고정하자. 그러면 임의의 $\zeta \in \Gamma$ 에 대하여 $\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1$ 이다. 따라서

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

이므로, 등식

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

을 얻는다. 만일 여기서 무한합과 적분의 순서를 바꿀 수 있으면 다음 등식

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^n$$

을 얻는데, 이는 함수 $F(z)$ 를 멱급수 꼴로 쓸 수 있음을 말한다.

정리 4.3.2. 곡선 Γ 와 연속함수 $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ 에 대하여 함수 $F(z)$ 를 등식 (5) 로 정의하자. 이 때, 각 $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ 에 대하여

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

라 두면 Γ 와 만나지 않는 열린원판 $D(z_0, r)$ 위에서 다음 등식

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad z \in D(z_0, r)$$

이 성립한다.

증명: 먼저 Γ 와 만나지 않는 원 $|z-z_0|=r$ 와 점 $z\in D(z_0,r)$ 를 고정하자. 그러면

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} &= \frac{1}{\zeta-z_0}\,\frac{1-\left(\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{N+1}}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\\ &= \frac{1}{\zeta-z}\left[1-\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{N+1}\right]\end{aligned}$$

이므로 등식

$$\frac{1}{\zeta-z}-\sum_{n=0}^{N}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}=\frac{1}{\zeta-z}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{N+1}$$

을 얻는다. 따라서

$$\left|F(z)-\sum_{n=0}^{N}a_n(z-z_0)^n\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{N+1}\right||dz|$$

임을 알 수 있다. 이제

$$M_1=\max\{|f(\zeta)|:\zeta\in\Gamma\},\qquad M_2=\min\{|\zeta-z|:\zeta\in\Gamma\}$$

라 두고 Γ 의 길이를 L 이라 두면

$$\left|F(z)-\sum_{n=0}^{N}a_n(z-z_0)^n\right|\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M_1}{M_2}\cdot\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^{N+1}\cdot L$$

이다. 그런데 $\dfrac{|z-z_0|}{r}<1$ 이므로 원하는 멱급수전개를 얻는다. □

이제 (5) 에 의하여 정의된 함수 $F(z)$ 가 멱급수 꼴로 나타나므로, 이는 정리 3.3.1 에 의하면 $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ 의 모든 점에서 미분가능함수이다. 특히, $F(z)$ 는 한없이 미분가능하며 그 n-번째 도함수가 3.3 절의 등식 (11) 에 의하여

$$F^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta,\qquad n=0,1,2,\ldots$$

으로 주어진다.

이제 함수 $f(z)$ 가 점 $z = z_0$ 에서 해석적이라 하자. 그러면 정의에 의하여 함수 $f(z)$ 는 적절한 열린원판 $D(z_0, R)$ 위에서 해석함수이다. 이제 $r \in (0, R)$ 을 하나 잡고 원 $|z - z_0| = r$ 에 대하여 코시 적분정리와 정리 4.3.2 를 적용하면 함수 $f(z)$ 는 멱급수 꼴로 쓰여질 수 있음을 알게 되고, 그 n-번째 미분계수가

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

으로 주어지는데, 이 역시 **코시 적분공식**이라 부른다. 특히, 해석함수는 한없이 미분가능하다. 따라서 영역 위에서 미분가능한 함수는 자동적으로 한없이 미분가능하고, 실함수에서 사용하는 C^1-함수, C^∞-함수라는 용어가 복소함수에서는 무의미하다.

보기 2. 적분값 $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3 + 2z - 3}{(z-i)^2}\, dz$ 를 구하려면 $f(z) = z^3 + 2z - 3$ 라 두고 공식 (6) 을 적용하여

$$\int_{|z|=2} \frac{z^3 + 2z - 3}{(z-i)^2}\, dz = 2\pi i f'(i) = -2\pi i$$

임을 알 수 있다. □

문제 4.3.2. 다음 적분값을 구하여라.

(가) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^4}{(z-2)^3}\, dz$ (나) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^4}{(z-2)^3}\, dz$

(다) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{e^z \sin z}{(z-2)^3}\, dz$

문제 4.3.3. 곡선 Γ 가 $\pm 2 \pm 2i$ 를 꼭지점으로 하는 사각형일때 다음 적분값을 구하여라.

(가) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{-z}\, dz}{z - \frac{\pi i}{2}}$ (나) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\, dz$ (다) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z\, dz}{2z+1}$

(라) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\tan \frac{z}{2}}{(z-i)^2}\, dz$ (마) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\sin z}{z^4}\, dz$

문제 4.3.4. 곡선 Γ 가 다음과 같이 주어졌을 때, 적분 $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z}{(16-z^2)(z+i)}\,dz$ 의 값을 구하여라.

(가) $|z| = 2$ (나) $|z-4| = 2$ (다) $|z+4| = 2$

(라) $|z| = \dfrac{1}{2}$ (마) $|z| = 5$

지금까지 살펴본 바에 의하면 주어진 함수가 어느 점 근방에서 미분가능하다는 말과 멱급수전개가 가능하다는 말은 사실상 동치임을 알았다. 사실 연속함수에 대해서는 지금까지 공부한 코시–구르사 정리의 역도 성립할 뿐 아니라, 코시 적분공식에 의하여 정의된 함수도 당연히 해석함수이다. 이를 체계적으로 정리하자.

정리 4.3.3. 단순연결영역 Ω 위에서 정의된 연속함수 $f(z)$ 에 대하여 다음은 동치이다.(3)

(가) 함수 $f(z)$ 가 Ω 위에서 미분가능하다.

(나) 임의의 직사각형 $R \subset \Omega$ 에 대하여 $\displaystyle\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ 이다.

(다) 미분가능함수 F 가 존재하여 $F' = f$ 이다.

(라) 임의의 원판 $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ 에 대하여 등식

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad z \in D(z_0, r)$$

이 성립한다.

(마) 임의의 원판 $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ 에 대하여

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \qquad z \in D(z_0, r)$$

이 성립하는 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 을 잡을 수 있다.

먼저 (가) $\Longrightarrow$ (라) $\Longrightarrow$ (마) 는 코시 적분공식과 정리 4.3.2 에서 논의한 바 있으며 (마) $\Longrightarrow$ (가) 는 바로 정리 3.3.1 이다. 따라서, (가),

(3) 코시–구루사 정리의 역인 (나) $\Longrightarrow$ (가) 는 보통 모레라 정리라 부른다. Giacinto Morera (1856∼1909), 이탈리아 수학자, 물리학자.

(라), (마) 가 서로 동치이다. 이제 (가) $\Longrightarrow$ (나) $\Longrightarrow$ (다) 는 지난 4.2 절의 코시–구루사 정리, 정리 4.2.2 등에서 이미 논의하였다. 한편 (다) 를 가정하면 F 가 미분가능함수이고 방금 증명한 (가) $\Longrightarrow$ (마) 와 정리 4.3.2 에 의하여 $f = F'$ 도 Ω 위에서 미분가능하다. 이 정리의 (마) 에서 계수는 물론 미분계수와 적분공식 두 가지

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

로 표현할 수 있다. 정리 4.3.3 (나) 는 단순연결영역 위에서 정의된 해석함수 $f(z)$ 를 적분할 때, 그 값은 곡선의 시작점 z_0 와 z_1 에 의하여 결정됨을 말해 주는데, 그 선적분의 값을 앞으로

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$$

로 쓴다.

문제 4.3.5. 다음 적분값을 구하여라.

(가) $\displaystyle\int_{-\pi i}^{\pi i} e^{-z} dz$ (나) $\displaystyle\int_{0}^{\pi+i} e^{iz} dz$

(다) $\displaystyle\int_{1}^{3+i} (z^2 + 3z - 2) dz$

정리 4.3.3 의 (마) 는 해석함수가 모든 점 근방에서 국소적으로 멱급수로 표현됨을 말해 준다. 이제, 멱급수에 관한 정리 3.3.3 을 다시 생각해 보자. 영역 Ω 에서 정의된 해석함수 $f(z)$ 와 영역의 한 점 $z \in \Omega$ 대하여 다음 세 명제

(항1) z 로 수렴하는 수열 $\langle \zeta_n \rangle$ 을 $\Omega \setminus \{z\}$ 안에서 잡아

$$f(\zeta_1) = f(\zeta_2) = \cdots = f(\zeta_n) = \cdots = 0$$

이 되도록 할 수 있다,

(항2) 임의의 열린원판 $D = D(z, r) \subset \Omega$ 에 대하여 $f|_D \equiv 0$ 이다,

(항3) 적절한 열린원판 $D = D(z,r) \subset \Omega$ 에 대하여 $f|_D \equiv 0$ 이다

를 생각하자. 정리 3.3.3 은 (항1) $\Longrightarrow$ (항2) 가 성립한다는 것이다. 물론 (항2) $\Longrightarrow$ (항3) $\Longrightarrow$ (항1) 은 당연하기 때문에 이 세 명제는 모두 동치가 된다. 또한, 명제 (항1) 은 다음

(항4) 임의의 구멍뚫린 원판 $D' = D(z,r) \setminus \{z\}$ 안에서 $f(\zeta) = 0$ 인 $\zeta \in D'$ 를 찾을 수 있다.

과 같이 바꾸어 쓸 수 있다. 실제로, $\zeta_n \to z$ 이면 처음 유한개를 제외한 ζ_n 이 원판 $D(z,r)$ 에 들어가므로 (항1) $\Longrightarrow$ (항4) 는 당연하다. 만일 (항4) 가 성립하면, 각 자연수 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $f(\zeta_n) = 0$ 인 $\zeta_n \in D(z, \frac{1}{n}) \setminus \{z\}$ 를 잡으면 (항1) 에서 요구하는 성질을 만족하게 된다. 이제 동치인 위 조건들을 만족하는 점 $z \in \Omega$ 들의 집합을 A 라 하자. 만일 (항4) 의 부정인 다음 명제

- 적절한 구멍뚫린 열린원판 $D' = D(z,r) \setminus \{z\} \subset \Omega$ 에 대하여 $f|_{D'} \neq 0$ 이다

를 만족하는 $z \in \Omega$ 들의 집합을 B 라 하면 영역 Ω 는 당연히 A 와 B 로 나뉘어진다. 즉, $\Omega = A \cup B$ 이고 $A \cap B = \emptyset$ 이다.

영역 Ω 의 점들로 이루어진 수열 $\langle \zeta_n \rangle$ 이 Ω 의 한 점 z 로 수렴한다고 가정하면, 위 논의로부터 다음

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdots \in A \implies z \in A, \qquad \zeta_1, \zeta_2, \cdots \in B \implies z \in B \tag{8}$$

이 성립함을 쉽게 알 수 있다. 이제 함수 $h : \Omega \to \mathbb{R}$ 를 다음

$$h(z) = \begin{cases} 1, & z \in A \\ 0, & z \in B \end{cases}$$

과 같이 정의하면 (8) 에 의하여 연속이다. 그런데, A 와 B 모두 공집합이 아니면 영역 Ω 의 모든 점들이 곡선에 의하여 연결되므로 함수 h 가

연속일 수 없다. 결국 A 와 B 중 하나는 공집합이어야 하는데, 지금까지 논의한 바를 함수 $f(z)-g(z)$ 에 적용하면 다음 정리를 얻는다. 이 정리에서는, $A \neq \emptyset$ 이라 가정하면 $B=\emptyset$, 즉 $A=\Omega$ 임을 말하고 있다.

정리 4.3.4. (항등정리) 영역 Ω 안의 수열 $\langle z_m \rangle$ 이 $z_0 \in \Omega$ 로 수렴하고 (단, $z_m \neq z_0$), Ω 에서 정의된 해석함수 $f(z)$ 와 $g(z)$ 가 주어져 있다. 만일 각 $m=1,2,\ldots$ 에 대하여 $f(z_m)=g(z_m)$ 이면, $f(z)=g(z)$ 이다.

이 정리가 뜻하는 바는 해석함수의 경우 극히 작은 집합에서의 함수값이 전체 영역에서의 함수값을 결정한다는 것이다.

문제 4.3.6. 영역 Ω 의 점들로 이루어진 수열 $\langle \zeta_n \rangle$ 이 Ω 의 한 점 z 로 수렴한다고 할 때, (8) 이 성립함을 보여라.

함수 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ 가 영역 Ω 위에서 해석함수라 하자. 그러면 그 원시함수 $F(z)$ 의 멱급수는

$$F(z)=F(z_0)+a_0(z-z_0)+\frac{a_1}{2}(z-z_0)^2+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n}(z-z_0)^n+\cdots \quad (9)$$

로 주어진다. 이를 보이려면 양변을 미분하고 정리 3.2.3 을 적용하면 된다.

문제 4.3.7. 등식 (9) 를 증명하여라.

보기 3. 함수 $f(z)=\sin^2 z$ 의 멱급수전개를 구해 보자. 우선

$$\begin{aligned} f'(z) &= 2\sin z\cos z = \sin 2z \\ &= 2z-\frac{1}{3!}(2z)^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}(2z)^{2n-1}+\cdots \end{aligned}$$

이므로

$$\sin^2 z=\frac{2}{2!}z^2-\frac{2^3}{4!}z^4+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}+\cdots$$

을 얻는다. 물론 정리 2.2.4 를 이용하여 계산할 수도 있다. □

문제 4.3.8. 정리 2.2.4 를 이용하여 $f(z) = \sin^2 z$ 의 멱급수전개를 구하여라.

보기 4. 분수함수 $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$ 를 $z = i$ 에서 멱급수로 전개하여 보자. 우선 이 멱급수의 수렴반경은 두 점 1 과 i 의 거리인 $\sqrt{2}$ 이다. 한 가지 방법은 지난 3.3 절의 (11) 을 이용하는 것이다. 이 경우, 이미 함수 $f(z)$ 가 열린원판 $D(i, \sqrt{2})$ 위에서 해석함수임을 알고 있으므로 3.3 절의 등식 (12) 가 자동적으로 성립한다. 실함수의 경우 C^∞-함수임에도 불구하고 3.3 절의 등식 (12) 가 성립하지 않는 경우가 있는 것과 비교되는 점이다.

두 번째 방법은 등비급수를 이용하는 것이다. 주어진 함수를 등비급수의 합으로 보이도록 변형하면

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(i-1)+(z-i)} = \frac{1}{i-1} \cdot \frac{-1}{1 - \dfrac{z-i}{1-i}}$$

이 된다. 따라서, $\left|\dfrac{z-i}{1-i}\right| < 1$ 이면 등식

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(1-i)^{n+1}} (z-i)^n, \qquad |z-i| < \sqrt{2}$$

을 얻는다. 이번 경우에는 등식이 성립함을 이미 알고 있으므로, 정리 3.3.2 에 의하여 이 급수가 바로 우리가 찾는 멱급수임을 알 수 있다. □

문제 4.3.9. 보기 4 에서 제시한 첫번째 방법으로 함수 $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$ 를 $z = i$ 에서 멱급수로 전개하여라.

문제 4.3.10. 함수 $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ 를 다음에 주어진 점에서 멱급수로 전개하고 수렴반경을 구하여라.

(가) $z = 0$ (나) $z = 1$ (다) $z = 3$

보기 5. 지난 2.2 절에서 살펴본 바와 같이 멱급수끼리 곱할 수 있는데, 이를 이용하여 나누기를 할 수도 있다. 예를 들어서 $\cos 0 \neq 0$ 이므

로 $\dfrac{1}{\cos z}$ 는 원점에서 해석함수이고, 따라서 멱급수전개를 할 수 있다. 만일 $\dfrac{1}{\cos z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 이라면

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots)(1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \cdots) = 1$$

에서

$$\begin{aligned} &a_0 = 1, \qquad a_1 = 0, \qquad -\frac{a_0}{2!} + a_2 = 0, \qquad -\frac{a_1}{2!} + a_3 = 0, \\ &\frac{a_0}{4!} - \frac{a_2}{2!} + a_4 = 0, \qquad \ldots \end{aligned}$$

을 얻고, 따라서 $\dfrac{1}{\cos z} = 1 + \dfrac{1}{2}z^2 + \dfrac{5}{24}z^4 + \cdots$ 임을 알 수 있다. □

문제 4.3.11. 원점에서 다음 함수들의 멱급수전개를 구하여라.

(가) $e^z \sin z$ (나) e^{z+z^2} (다) $e^{z/1-z}$

(라) $\dfrac{2z+1}{(z^2+1)(z+1)^2}$ (마) $\cos(z^2 - 1)$

4.4. 코시 적분공식의 응용

해석함수 $f(z)$ 가 만일 원 $|z - z_0| = r$ 위에서 $|f(z)| \le M$ 이면, 코시 적분공식 (6) 에 의하여 부등식

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &\le \frac{n!}{2\pi} \int_C \left| \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \right| |dz| \\ &\le \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{n!M}{r^n} \end{aligned} \tag{10}$$

을 얻는데, 이를 **코시 부등식**이라 한다.

이 부등식의 첫 응용으로서 리우비유 정리를 소개하는데, 복소평면 전체에서 정의된 해석함수는 유계함수가 될 수 없다는 것이다. 여

기서 물론 상수함수는 제외한다. 실함수의 경우, 삼각함수 등 $\mathbb{R}$ 전체에서 정의된 유계 해석함수가 많음을 생각하면 매우 놀라운 정리이다.

정리 4.4.1. (리우비유[4]) 복소평면 전체에서 정의된 유계 해석함수는 상수함수이다.

만일 복소평면 위에서 $|f(z)| \leq M$ 이라면, 원 $|z - z_0| = r$ 위에서 코시 부등식을 적용하여

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}$$

이 성립한다. 그런데 이 부등식이 임의의 양수 $r > 0$ 에 대하여 성립하므로 $f'(z_0) = 0$ 이다. 여기서 z_0 는 임의의 복소수였으므로 $f(z)$ 의 도함수는 0 임을 알 수 있고, 정리 3.2.3 을 적용하면 $f(z)$ 가 상수함수임을 알 수 있다.

정리 3.2.3 을 적용하지 않고 $f(z)$ 의 멱급수전개를 이용하여 증명할 수도 있다. 이 경우, 코시 부등식에 의하여

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{M}{r^n}$$

이 임의의 양수 $r > 0$ 과 자연수 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 성립한다. 따라서, $f(z)$ 의 멱급수전개 $\sum_n a_n z^n$ 에서 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$ 이고 $f(z) = a_0$ 이다.

리우비유 정리는 코시 부등식을 쓰지 않고 코시 적분공식에서 바로 증명할 수도 있다. 먼저 $z \in \mathbb{C}$ 를 고정하고 $r > |z|$ 이면

$$\begin{aligned} f(z) - f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) f(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{z}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)\zeta} d\zeta \end{aligned}$$

(4) Joseph Liouville (1809∼1882), 프랑스 수학자. École Polytechnique 에서 공부하고, 같은 대학과 Collège de France 에서 활동하였다.

를 얻는다. 만일 $r > 2|z|$ 이면 원 $|\zeta| = r$ 위에서 $|(\zeta - z)\zeta| \geq r^2$ 이므로

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{|z|}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^2} \cdot 2\pi r = \frac{M|z|}{r}$$

임을 알 수 있다. 따라서, $f(z) = f(0)$ 이다.

리우비유 정리를 사용하여 **대수학의 기본정리**를 증명할 수 있다. 이 정리는 임의의 복소다항식이 근을 가진다는 것이다. 만일 복소다항식 $p(z)$ 가 근을 가지지 않는다고 가정하면 $q(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ 가 복소평면 전체에서 해석함수이다. 만일 $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ 이라면

$$\begin{aligned} |p(z)| &= \left| z^n \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + a_n \right) \right| \\ &\leq |z|^n \left(\frac{|a_0|}{|z|^n} + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \cdots + |a_n| \right) \end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{|z| \to \infty} |p(z)| = \infty$$

임을 알 수 있다. 따라서 $\lim\limits_{|z| \to \infty} q(z) = 0$ 인데, $q(z)$ 가 연속함수이므로 복소평면 전체에서 유계함수가 된다. 따라서 리우비유 정리에 의하여 $q(z)$ 가 상수함수이고, 따라서 $p(z)$ 도 상수함수인데 이는 모순이다.

문제 4.4.1. 다항식함수에 의한 복소평면의 상은 복소평면 전체가 됨을 보여라.

코시 적분공식 (6) 에서, $n = 0$ 인 경우 원을 $z(t) = z_0 + re^{i\theta}$ 로 매개화하면 등식

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \quad (11)$$

을 얻는데, 이를 **가우스 평균값정리**라 부른다. 이 식의 우변은 원 위에서 함수값을 평균한 것이고, 좌변은 원 중심에서 함수값이다. 이로부터 다음 부등식

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \leq \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\} \quad (12)$$

을 얻는다. 다음 정리는 이 부등식의 간단한 응용이다.

정리 4.4.2. 원판 $\overline{D} = \overline{D}(z_0, r)$ 을 포함하는 영역 Ω 위에서 정의된 해석함수 $f(z)$ 가 다음 부등식

$$|f(z_0)| < \min\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}$$

을 만족하면 $f(z)$ 은 열린원판 $D = D(z_0, r)$ 안에서 근을 가진다.

증명: 우선 임의의 $z \in \partial D$ 에 대하여 $|f(z)| > 0$ 이다. 만일 함수 $f(z)$ 가 열린원판 D 안에서 근을 가지지 않는다면 원판 $\overline{D}$ 안에서도 근을 가지지 않으며, 함수 f 의 연속성에 의하여 적절한 열린원판 $D(z_0, r+\epsilon) \subset \Omega$ 안에서도 근을 가지지 않는다. 따라서, 함수 $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ 는 $D(z_0, r+\epsilon)$ 위에서 해석함수이고, 부등식 (12) 에 의하여

$$\frac{1}{|f(z_0)|} = |g(z_0)| \leq \max_{z \in \partial D} |g(z)| = \max_{z \in \partial D} \frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{\min\limits_{z \in \partial D} |f(z)|}$$

이다. 즉, $|f(z_0)| \geq \min\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}$ 이 되어 모순이다. □

이제, 항등정리의 의미를 다시 한번 생각해 보자. 이 정리에 의하면 상수함수가 아닌 해석함수 f 가 주어졌을 때, 정의역 내부의 한 점으로 수렴하는 수열의 상은 결코 한 점일 수 없다는 것이다. 물론 열린원판이나 영역의 상은 더더욱 한 점일 수 없다. 정리 3.2.4 는 상수함수가 아닌 해석함수의 상이 원의 일부분이 될 수 없을 말해 준다. 이러한 정리들은 모두 해석함수에 의한 영역의 상이 '상당히' 큰 집합이어야 함을 말하고 있다. 영역을 정의할 때 나오는 성질 (영1) 을 만족하는 집합을 **열린집합**이라 한다.

정리 4.4.3. (열린사상정리) 영역 Ω 에서 정의된 해석함수 $f(z)$ 가 상수함수가 아니면, 열린집합 $U \subset \Omega$ 의 상

$$f(U) = \{f(z) : z \in U\}$$

도 열린집합이다.

증명: 점 $z_0 \in U$ 를 잡으면 항등정리의 증명에서 보듯이

$$z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\} \implies f(z) \neq f(z_0)$$

를 만족하는 열린원판 $D = D(z_0, r) \subset \Omega$ 을 잡을 수 있다. 여기서 U 가 열린집합이므로 $r > 0$ 을 충분히 작게 하면 $D \subset U$ 이다. 그러면

$$\epsilon = \frac{1}{2} \min\{|f(z) - f(z_0)| : z \in \partial\overline{D}\} > 0$$

임을 알 수 있다. 만일 $D(f(z_0), \epsilon) \subset f(D)$ 을 보이면 $f(D) \subset f(U)$ 이므로 $f(U)$ 가 (영1) 을 만족함이 증명된다.

이제 $w_0 \in D(f(z_0), \epsilon)$ 이라 가정하면 $|w_0 - f(z_0)| < \epsilon$ 이다. 그런데, $w_0 \in f(D)$ 를 보인다는 것은 $f(z) = w_0$ 를 만족하는 $z \in D$ 를 찾으라는 말과 마찬가지이고, 이는 $g(z) = f(z) - w_0$ 의 근을 D 안에서 찾으라는 말과 같으므로 정리 4.4.2 를 적용하려 한다. 만일 $|w_0 - f(z_0)| < \epsilon$ 이면, 임의의 $z \in \partial D$ 에 대하여

$$\begin{aligned} |g(z)| = |f(z) - w_0| &\geq |f(z) - f(z_0)| - |w_0 - f(z_0)| \\ &> 2\epsilon - \epsilon = \epsilon > |g(z_0)| \end{aligned}$$

이다. 따라서,

$$|g(z_0)| < \min\{|g(z)| : z \in \partial D\}$$

이므로 정리 4.4.2 가 적용된다. □

문제 4.4.2. 열린사상정리를 이용하여 정리 3.2.4 를 증명하여라.

만일 Ω 가 영역이면 집합 $f(\Omega)$ 가 어떤 방식으로 (영2) 를 만족하는지 살펴보자. 만일 $f(\Omega)$ 의 두 점 $f(z_0)$ 와 $f(z_1)$ 이 주어지면 먼저 z_0 과 z_1 을 잇는 곡선 $\Gamma : [a, b] \to \Omega$ 를 잡는다. 그러면 $f \circ \Gamma : [a, b] \to f(\Omega)$ 는 $f(z_0)$ 와 $f(z_1)$ 을 잇는 곡선이 된다. 이 곡선 위의 각 점에서는 그 점을 중심으로 하는 원판을 $f(\Omega)$ 안에 넣을 수 있으므로 이 곡선을 수평선과 수직선으로 변형하여 두 점을 연결할 수 있다. 결국 임의의 해석

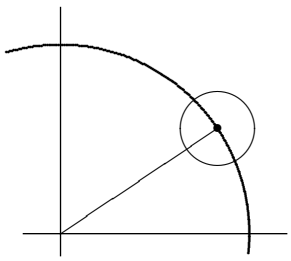
함수는 영역을 영역으로 보내던가 아니면 한 점으로 보낸다. 실해석함수에서는 $f(x) = \sin x$ 에서 보듯이 열린집합 $(-2\pi, 2\pi)$ 의 상 $[-1, 1]$ 은 열린집합이 아니다.

문제 4.4.3. 만일 해석함수 $f(z)$ 의 실수부 $\operatorname{Re} f(z)$ 가 상수함수이면 $f(z)$ 도 상수함수임을 보여라.

영역 Ω 에서 정의된 해석함수 $f(z)$ 에 대하여 실함수

$$z \mapsto |f(z)| : \Omega \to \mathbb{R}$$

를 생각하자. 이 함수가 $z = z_0$ 에서 극대값을 가진다면 적절한 열린 원판 $D = D(z_0, r)$ 위에서 이 함수는 최대값을 가진다. 그러면 $f(D)$ 는 원판 $D(0, |f(z_0)|)$ 안에 들어가야 하는데 이렇게 되면 점 $f(z_0)$ 를 중심으로 원판을 아무리 작게 잡아도 $f(D)$ 안에 들어갈 수 없다. 즉, $f(D)$ 가 열린집합이 아니므로 열린사상정리에 의하여 $f(z)$ 는 상수함수이다. 따라서, 상수함수가 아닌 해석함수의 절대값은 극대값을 가질 수 없다. 이로부터 다음 정리를 얻는다.



정리 4.4.4. (최대절대값정리) 함수 $f(z)$ 가 유계영역 Ω 에서 해석적이고 집합 $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ 에서 연속이면, 다음

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial\Omega\}$$

이 성립한다.

최대절대값정리는 열린사상정리를 사용하지 않고 가우스 평균값 정리와 정리 3.2.4 를 이용하여 증명할 수도 있다. 만일 해석함수 $f(z)$ 가 $z_0 \in \Omega$ 에서 극대값을 가진다고 가정하자. 그러면 적절한 원판 $D(z_0, r) \subset \Omega$ 위에서 다음

$$z \in D(z_0, r) \implies |f(z)| \le |f(z_0)|$$

이 성립한다. 따라서, $0 < \rho < r$ 이면 부등식 (12) 로부터

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| d\theta \le |f(z_0)|$$

를 얻고,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(|f(z_0)| - |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| \right) d\theta = 0, \quad |f(z_0)| - |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| \ge 0$$

이 성립함을 알 수 있다. 그런데 $\theta \mapsto |f(z_0)| - |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|$ 이 연속함수이므로

$$|f(z_0)| - |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| = 0, \qquad \theta \in [-\pi, \pi],\ 0 < \rho < r$$

이 성립한다. 즉, 함수 $z \mapsto |f(z)|$ 가 열린원판 $D(z_0, r)$ 위에서 상수함수이므로 정리 3.2.4 에 의하여 $f(z)$ 가 열린원판 위에서 상수함수이고 항등정리를 적용하면 영역 Ω 에서 상수함수가 된다.

문제 4.4.4. 해석함수의 절대값 $f(z)$ 가 $z = z_0$ 에서 극소값을 가지면 $f(z_0) = 0$ 이거나 f 는 상수함수임을 증명하여라.

문제 4.4.5. 함수 $z \mapsto |z^2(z-1)^2|$ 의 극점을 모두 찾고, 그 극점들이 극대인지, 극소인지, 안장점인지 판별하여라.

문제 4.4.6. 영역 $\left\{ z : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2} \right\}$ 위에서 함수 $|e^{e^z}|$ 의 값이 한없이 커짐을 보여라. 영역의 경계 위에서 이 함수의 값이 어떻게 변하는지 살펴보아라.

4.5. 연습문제

4.5.1. 영역 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 에서 정의된 벡터장 $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ 와 곡선 $\Gamma : [a, b] \to \Omega$ 에 대하여 선적분을

$$\int_\Gamma F = \int_a^b F(\Gamma(t)) \cdot \Gamma'(t) dt$$

라 정의한다. 만일 $F = (P, Q)$ 이고 $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ 이면

$$\int_\Gamma = \int_a^b [P(\Gamma(t))x'(t) + Q(\Gamma(t))y'(t)]dt$$

이므로 이 적분을 $\int_\Gamma Pdx + Qdy$ 로 표시하기도 한다. 단일폐곡선 Γ 및 그 내부 A 를 포함하는 영역 Ω 에서 정의된 벡터장 $F = (P, Q)$ 의 편도함수들이 연속이면 다음 등식

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

이 성립한다.(5) 이를 이용하여 해석함수 $f(z)$ 의 도함수 $f'(z)$ 가 연속일 때 코시–구루사 정리를 증명하여라.

4.5.2. 임의의 다항식 $p(z)$ 와 $z_0 \in \mathbb{C}$ 및 $r > 0$ 에 대하여 등식

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \overline{p(z)} dz = r^2 \overline{p'(z_0)}$$

이 성립함을 보여라.

4.5.3. 단일폐곡선 Γ 및 그 내부 A 를 포함하는 영역 Ω 에서 정의된 해석함수 $f(z)$ 가 단사함수라 하자. 그러면 f 에 의한 A 의 상 $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ 의 넓이가 다음 적분값

$$\frac{1}{2i} \int_\Gamma \overline{f(z)} f'(z) dz$$

으로 주어짐을 보여라.

4.5.4. 멱급수 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 의 수렴반경이 R 이라 하자.

(가) 임의의 $r < R$ 에 대하여 등식

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

이 성립함을 보여라.

(5) 이를 그린 정리라 한다.
George Green (1793∼1841), 영국 수학자. 수학을 거의 독학으로 공부하였다.

(나) 위 등식을 함수

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

에 적용하여 다음 등식

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\theta/2}{\sin \theta/2} \right)^2 d\theta = 2\pi n$$

을 보여라.

4.5.5. 멱급수 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 의 수렴반경이 1 보다 크고, 단위원판 $\overline{D} = \overline{D}(0,1)$ 위에서 단사함수라 가정하자.

(가) 이 때, $f(\overline{D}) = \{f(z) : z \in \overline{D}\}$ 의 넓이가

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2$$

으로 주어짐을 보여라.

(나) 만일 각 $|z| = 1$ 에 대하여 $|f(z)| > 1$ 이면 $f(\overline{D})$ 의 넓이가 π 보다 큼을 보여라.

4.5.6. 복소수 $z = re^{i\theta}$ (단, $r > 0,\ -\pi < \theta < \pi$) 에 대하여 1 부터 r 까지 가는 직선을 Γ_1 이라 하고 r 부터 $re^{i\theta}$ 까지 짧은 원호를 따라가는 곡선을 Γ_2 라 하자. 이 때,

$$\operatorname{Log} z = \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{1}{\zeta}\, d\zeta$$

임을 보여라.

4.5.7. 영역 $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z : \operatorname{Re} z = 0,\ |\operatorname{Im} z| \geq 1\}$ 위에서

$$\arctan z = \int_{[0,z]} \frac{1}{1 + \zeta^2}\, d\zeta, \qquad z \in \Omega$$

라 정의하자. 여기서 $[0, z]$ 는 0 에서 z 까지 가는 선분을 나타낸다.

(가) 이 함수는 연습문제 3.4.8 에서 정의한 멱급수

$$A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \cdots$$

와 열린원판 $D(0,1)$ 위에서 일치함을 보여라. 열린원판 $D(0,1)$ 의 경계점 z 들 가운데 이 급수가 수렴하는 것들을 모두 찾아라.

(나) 다음 등식

$$\frac{4}{\pi}\mathrm{Re}\,\arctan e^{i\theta} = \begin{cases} 1, & 0 \le |\theta| < \pi/2 \\ -1, & \pi/2 < |\theta| \le \pi \end{cases}$$

이 성립함을 보여라.

4.5.8. 영역 Ω 에서 정의된 해석함수 $f(z)$ 가 임의의 $z \in \Omega$ 에 대하여 부등식 $|f(z) - 1| < 1$ 를 만족하면, 임의의 닫힌곡선 $\Gamma \subset \Omega$ 에 대하여 등식

$$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$$

이 성립함을 보여라.

4.5.9. 영역 $\mathbb{C} \setminus [0,1]$ 에 들어가는 임의의 닫힌곡선 Γ 에 대하여

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z(z-1)} = 0$$

임을 보여라.

4.5.10. 적분값

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-\alpha)^m (z-\beta)^n}$$

을 구하여라. 단, $|\alpha| < 1 < |\beta|$ 이다.

4.5.11. 함수 $\dfrac{1}{z}$ 를 적절한 곡선 위에서 적분함으로써 등식

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^\theta} = \frac{2\pi}{ab}$$

이 성립함을 보여라.

4.5.12. 열린원판 $D(0,r)$ (단, $r > 1$) 위에서 정의된 해석함수 $f(z)$ 가 주어져 있다.

(가) 다음 선적분

$$\int_{|z|=1} \left[2 \pm \left(z + \frac{1}{z}\right)\right] \frac{f(z)}{z}\,dz$$

을 계산하고, 이를 이용하여 다음 등식

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)dt = f(0) + \frac{1}{2}f'(0)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)dt = f(0) - \frac{1}{2}f'(0)$$

이 성립함을 보여라.

(나) 만일 $f(0) = 1$ 이고 임의의 $z \in \overline{D}(0,1)$ 에 대하여 $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ 이면 $-2 \leq \operatorname{Re} f'(0) \leq 2$ 임을 보여라.

4.5.13. 다음 선적분

$$\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$$

을 계산하고, 이를 이용하여

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = 2\pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$$

임을 보여라.

4.5.14. 단위원 $C_1 : |z| = 1$ 과 원 $C_2 : |z+1| = \epsilon$ 이 만나는 두 점 가운데 $\operatorname{Im} z < 0$ 안에 들어가는 것을 A 라 두고 그렇지 않은 것을 B 라 두자. 점 A 에서 출발하여 원 C_1 을 따라서 시계반대방향으로 B 까지 가는 곡선을 Γ_ϵ 이라 두고, 다시 B 에서 C_2 를 따라서 시계방향으로 A 까지 가는 곡선을 γ_ϵ 이라 하고, 다음 적분값

$$\int_{\Gamma_\epsilon + \gamma_\epsilon} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{iz} dz$$

을 생각하자.

(가) 다음 등식

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{iz} = 0$$

을 증명하여라.

(나) 다음 등식

$$\int_0^{2\pi} \log|1 + e^{i\theta}| d\theta = 0, \qquad \int_0^{\pi} \log \sin \theta d\theta = -\pi \log 2$$

을 증명하여라.

4.5.15. 영역 Ω 위에서 정의된 $f(z)$ 와 $g(z)$ 가 $f(z)g(z) \equiv 0$ 이면, 영역 Ω 위에서 $f(z) \equiv 0$ 또는 $g(z) \equiv 0$ 임을 증명하라.

4.5.16. 열린원판 $D(0,1)$ 위에서 정의된 해석함수 $f(z)$ 에 대하여 다음 세 성질

(가) 임의의 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $f(x) \in \mathbb{R}$ 이다,

(나) 임의의 $z \in D(0,1)$ 에 대하여 $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ 이다,

(다) 함수 $f(z)$ 를 원점에서 멱급수전개하였을 때 모든 계수가 실수이다

이 동치임을 보여라.

4.5.17. 함수 $\dfrac{1}{\cos z}$ 의 멱급수전개를 다음

$$\frac{1}{\cos z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

과 같이 쓰자.(6)

(가) 이 멱급수의 수렴반경을 구하여라.

(나) 각 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 등식

$$E_{2n} - \binom{2n}{2n-2} E_{2n-2} + \binom{2n}{2n-4} E_{2n-4} + \cdots + (-1)^n \binom{2n}{2} E_2 + (-1)^n = 0$$

이 성립함을 보여라.

(다) E_2, E_4, E_6, E_8 의 값을 구하여라.

4.5.18. 단순연결영역 Ω 에서 정의된 해석함수 $f(z)$ 가 $f \neq 0$ 이라 하자. 그러면 $e^{g(z)} = f(z)$ 를 만족하는 해석함수 $g(z)$ 가 Ω 위에서 정의됨을 보여라.

4.5.19. 최대절대값정리를 이용하여 대수학의 기본정리를 증명하여라.

4.5.20. n 차 다항식 $p(z)$ 의 근이 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 라 하자.

(가) 다음 등식

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z - c_1} + \frac{1}{z - c_2} + \cdots + \frac{1}{z - c_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z} - \overline{c}_k}{|z - c_k|^2}$$

이 성립함을 보여라.

(나) 다항식 $p'(z)$ 의 근은 $c_1, c_2 \ldots, c_n$ 들의 볼록결합으로 쓸 수 있음을 보여라. 즉, $p'(c) = 0$ 이면 다음 성질

$$c = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$$

을 만족하는 $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ 을 잡을 수 있음을 보여라.

4.5.21. 복소평면 전체에서 정의된 해석함수 $f(z)$ 가 모든 $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 부등식 $|f(z)| \leq |e^z|$ 을 만족하면, 적절한 상수 $C \in \mathbb{C}$ 에 대하여 $f(z) = Ce^z$ 임을 보여라.

4.5.22. 임의의 실계수 다항식은 실수를 계수로 하는 일차식과 이차식으로 인수분해됨을 보여라. 이를 이용하여, 임의의 실계수 분수함수의 원시함수는 분수함수, log, arctan 를 이용하여 나타낼 수 있음을 설명하여라.

---

(6) 여기에서 나오는 E_{2n} 들을 **오일러수**라고 부른다.