제 5 장 로랑급수와 유수계산

코시 적분정리의 최대 응용은 해석함수를 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 로 전개할 수 있다는 것이고, 특히, 계수 a_n 들을 적분 형태로 쓸 수 있다는 것이다. 그런데 해석함수가 아니더라도 다음

$$\cdots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$$

과 같이 전개할 수 있으며, 각 계수들은 코시 적분공식에 나오는 계수를 그대로 쓰면 된다는 것이 로랑 정리이다. 코시 적분공식을 $n=-1$ 인 경우 살펴보면 그대로 적분값이 된다. 따라서, 이는 적분값을 구하는 데에 큰 도움이 되는데, 이를 이용한 적분 계산을 유수 계산이라 한다. 유수 계산은 선적분을 통하여 원시함수를 구할 수 없는 함수들의 정적분을 구하는 데에 큰 도움이 될 뿐 아니라, 주어진 곡선 내부에 있는 근의 개수를 구하는 등 이론적인 측면에서도 매우 중요한 역할을 한다.

5.1. 특이점과 로랑급수

함수 $f(z)$ 가 어떤 점에서 해석함수가 아닐 때, 이 점을 $f(z)$ 의 **특이점**이라 한다. 만일 함수 $f(z)$ 가 z_0 에서 해석적이지 않으나 적절한 영역 $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ 위에서 해석적이면 z_0 를 $f(z)$ 의 **고립특이점**이라

부른다. 예를 들어서 $z = \pm 1$ 은 함수 $\dfrac{1}{z^2-1}$ 의 고립특이점이고, $z = 0$ 은 $e^{1/z}$ 의 고립특이점이다.

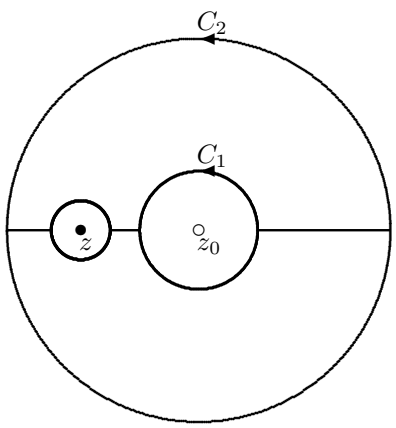
지난 4 장에서 공부한 코시 적분공식은 곡선의 내부를 포함하는 영역에서 주어진 함수가 해석적인 경우에 한하여 적용할 수 있었는데, 이 절에서는 곡선 내부에 특이점이 있는 경우 어떻게 되는지 알아보자. 영역 $\{z : r < |z - z_0| < R\}$ 위에서 해석함수 $f(z)$ 가 정의되어 있을 때 (단, $0 \le r < R$), 이 안에 있는 두 원

$$C_1 : |z - z_0| = R_1, \qquad C_2 : |z - z_0| = R_2, \qquad (r < R_1 < R_2 < R)$$

을 생각하자. 그러면, 지난 4.2 절의 등식 (4) 를 증명하는 과정과 꼭 같은 과정을 거치고 코시 적분정리를 적용하면 두 원 C_1 과 C_2 사이에 있는 임의의 점 z 에 대하여 다음 등식

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{1}$$

이 성립함을 바로 알 수 있다.



이제부터는 정리 4.3.2 의 증명과정과 같은 방식을 따른다. 우선, ζ 가 원 C_2 위에 있으면 $|z-z_0|<|\zeta-z_0|$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta-z}&=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\\&=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\end{aligned}$$

이 된다. 만일 ζ 가 원 C_1 위에 있으면 $|\zeta-z_0|<|z-z_0|$ 이므로 같은 방식으로 계산하면

$$-\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^m}{(z-z_0)^{m+1}}$$

임을 알 수 있다. 이 두 식을 (1) 에 넣고 무한합과 적분의 순서를 바꾸어 계산하면

$$\begin{aligned}f(z)=&\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\right](z-z_0)^n\\&+\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}f(\zeta)(\zeta-z_0)^m d\zeta\right]\frac{1}{(z-z_0)^{m+1}}\end{aligned}\tag{2}$$

이 된다. 위 등식에 나오는 적분은 원 C_1, C_2 를 영역 $r<|z-z_0|<R$ 안에 있으면서 z_0 가 내부에 들어가는 단일폐곡선 Γ 로 바꾸어도 변하지 않는다. 따라서, 각 $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ 에 대하여

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\tag{3}$$

라 두면, 다음 등식

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{m=0}^{\infty}a_{-m-1}(z-z_0)^{-m-1}\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\end{aligned}$$

이 성립함을 알 수 있다. 이 급수를 점 z_0 를 중심으로 한 함수 $f(z)$ 의 로랑[(1)]급수라 부른다.

정리 5.1.1. 영역 $\{z : r < |z - z_0| < R\}$ 위에서 정의된 해석함수 $f(z)$ 에 대하여 a_n 을 (3) 과 같이 놓으면 다음 등식

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad r < |z - z_0| < R$$

이 성립한다.

문제 5.1.1. 정리 4.3.2 의 증명방법을 참고하여, 등식 (2) 를 증명하는 과정에서 무한합과 적분의 순서를 바꿀 수 있음을 보여라.

로랑급수를 구할 때 그 계수를 (3) 과 같이 적분으로 구할 필요는 없다. 대부분의 경우 멱급수전개를 이용하거나 등비급수를 이용하면 된다.

보기 1. 함수 $f(z) = \dfrac{2z}{z^2 - 1}$ 은 $\mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ 위에서 해석함수이다. 다음 영역들

$$0 < |z - 1| < 2, \qquad 2 < |z - 1|, \qquad 1 < |z|$$

에서 함수 $f(z)$ 의 로랑급수를 구해 보자. 우선 $f(z) = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z+1}$ 로 변형하자. 점 $z = 1$ 을 중심으로 하는 영역의 경우 $\dfrac{1}{z-1}$ 은 고칠 것이 없다. 먼저 $0 < |z - 1| < 2$ 의 경우 $\left|\dfrac{z-1}{2}\right| < 1$ 을 염두에 두고 등비급수를 이용한다. 그러면

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{z-1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n$$

(1) Pierre Alphonse Laurent (1813∼1854), 프랑스 토목기사. 그의 논문은 사후에 출판되었다.

을 얻는다. 따라서,

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n, \qquad 0 < |z-1| < 2 \tag{4}$$

임을 알 수 있다. 이제 영역 $2 < |z-1|$ 에서는 $\left|\frac{2}{z-1}\right| < 1$ 이므로

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z-1}} = \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{z-1}\right)^n$$

이다. 따라서,

$$f(z) = \frac{2}{z-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{(z-1)^n}, \qquad |z-1| > 2 \tag{5}$$

이 된다.

영역 $|z| > 1$ 에서는 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ 이므로

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n, \qquad \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^n$$

이므로

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{z^{2n+1}}, \qquad |z| > 1 \tag{6}$$

임을 알 수 있다. □

문제 5.1.2. 영역

$$|z| < 1, \qquad 0 < |z+1| < 2, \qquad 2 < |z+1|$$

위에서 $f(z) = \frac{2}{z^2-1}$ 의 로랑급수를 구하여라.

문제 5.1.3. 함수 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 에 대하여, 다음 영역에서 로랑급수를 구하여라.

(가) $|z| < 1$ (나) $1 < |z| < 2$ (다) $2 < |z|$

문제 5.1.4. 함수 $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z^2+4)}$ 에 대하여, 다음 영역에서 로랑급수를 구하여라.

(가) $1 < |z| < 2$ (나) $|z| > 2$ (다) $|z| < 1$

보기 2. 만일 $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ 라면, $\sin z$ 의 멱급수전개를 이용하여 영역 $|z| > 0$ 위에서

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{1}{3!}\,z^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\,z^{2n} + \cdots, \qquad |z| > 0 \quad (7)$$

임을 알 수 있다. 마찬가지로,

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,z^{-n}, \qquad |z| > 0 \quad (8)$$

이다. □

보기 3. 삼각함수 $\sin z$ 는 $z = 0$ 에서 근을 가지므로 함수 $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ 는 $z = 0$ 에서 고립특이점을 가지는데, 이 함수의 로랑급수를 구해 보자. 우선 $\dfrac{\sin z}{z}$ 는 등식 (7) 에서 보듯이 멱급수전개가 가능하므로 $z = 0$ 에서 함수값을 1이라 두면 사실상 해석함수라 할 수 있고, $\dfrac{z}{\sin z}$ 역시 $z = 0$ 에서 해석함수이다. 이 함수의 멱급수전개가 $\sum_n a_n z^n$ 이라면 등식 (7) 에 의하여

$$\left(1 - \frac{1}{3!}\,z^2 + \frac{1}{5!}\,z^4 + \cdots\right)(a_0 + a_1 z + a_2 + z^2 + \cdots) = 1$$

이 성립해야 한다. 따라서,

$$\begin{aligned} &a_0 = 1 \\ &a_1 - \frac{1}{3!}a_0 = 0 \\ &a_2 - \frac{1}{3!}a_1 + \frac{1}{5!}a_0 = 0 \\ &\cdots \end{aligned}$$

이 성립해야 하고, 이로부터

$$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{6},\ a_2 = \frac{7}{360},\ \cdots$$

를 얻는다. 따라서,

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^2 + \cdots\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{6} + \frac{7}{360}z + \cdots$$

임을 알 수 있다. □

로랑급수는 (7) 에서 보듯이 경우에 따라서 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 의 꼴이 된다. 이 경우, $f(z_0) = a_0$ 라 정의하면 $f(z)$ 는 사실상 해석함수이다.

정리 5.1.2. (리만) 점 $z = z_0$ 에서 고립특이점을 가지는 해석함수 $f(z)$ 의 로랑급수가 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 으로 주어질 때, 다음은 동치이다.

(가) 각 $n = -1, -2, \cdots$ 에 대하여 $a_n = 0$ 이다,

(나) 함수 $f(z)$ 는 z_0 의 적절한 근방 위에서 유계이다,

(다) $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = 0$ 이다.

증명: 먼저 (가) $\Longrightarrow$ (나) $\Longrightarrow$ (다) 는 당연하므로, (다) 를 가정하고 (가) 를 증명하면 된다. 이를 위하여, 함수 $g(z)$ 와 $h(z)$ 를 다음

$$g(z) = \begin{cases} (z-z_0)f(z), & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0 \end{cases} \qquad h(z) = (z-z_0)g(z)$$

과 같이 정의한다. 그러면

$$h'(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} g(z) = 0$$

이므로 $h(z)$ 는 z_0 에서 해석적이다. 그런데 $h(0) = h'(0) = 0$ 이므로, z_0 의 근방에서 멱급수전개

$$h(z) = a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$$

를 가진다. 따라서,

$$g(z) = a_2(z-z_0) + a_3(z-z_0)^2 + \cdots + a_{n+1}(z-z_0)^n + \cdots$$
$$f(z) = a_2 + a_3(z-z_0) + \cdots + a_{n+2}(z-z_0)^n + \cdots$$

이다. □

한편 (4) 에서 보듯이 로랑급수가 다음 형태

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \qquad a_{-n} \neq 0 \quad (9)$$

로 주어지는 경우가 있다. 이 경우

$$\begin{aligned} g(z) &= (z-z_0)^n f(z) \\ &= a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + a_0(z-z_0)^n \cdots \end{aligned} \quad (10)$$

는 $g(z_0) \neq 0$ 인 해석함수이고

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}, \qquad g(z_0) \neq 0 \quad (11)$$

을 만족한다. 이 때, 함수 $f(z)$ 는 $z = z_0$ 에서 n-**중극**을 가진다고 말한다. 혹은 그냥 간단히 $z = z_0$ 에서 **극**을 가진다고 말한다. 이는 근, 혹은 n-중근에 대비되는 개념이다. 함수 $f(z)$ 가 $z = z_0$ 에서 n-**중근**을 가진다는 말은

$$f(z) = (z-z_0)^n g(z), \qquad g(z_0) \neq 0$$

을 만족하는 해석함수 $g(z)$ 가 존재한다는 뜻이다. 이 경우, $f(z)$ 의 멱급수는

$$f(z) = a_n(z-z_0)^n + a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \cdots, \qquad a_n \neq 0 \quad (12)$$

로 주어진다. 앞으로, 1-중극 및 1-중근은 각각 **단극** 및 **단근**이라 부른다.

만일 함수 $f(z)$ 가 $z = z_0$ 에서 n-중극을 가지면 등식 (11) 에 의하여 $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$ 이 성립하는데, 다음 정리에서는 그 역이 성립함을 증명한다. 일반적으로 $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$ 이 성립할 때, 복소함수 $f(z)$ 가 ∞ 로 **수렴**한다 말하고 이를

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$

라 쓴다. 만일 함수의 변역을 리만구면 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 으로 생각하면, 이는 z 가 z_0 에 가까워짐에 따라 $f(z)$ 가 리만구면의 한 점 ∞ 에 가까워짐을 의미한다.

정리 5.1.3. 해석함수 $f(z)$ 가 점 $z = z_0$ 에서 고립특이점을 가질 때, $z = z_0$ 에서 극일 필요충분조건은 $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ 이다. 또한, n-중극이 될 필요충분조건은

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A, \qquad A \neq 0,\ A \neq \infty$$

이다.

증명: 만일 $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ 이면, z_0 의 적절한 근방에서 $\frac{1}{f(z)}$ 는 유계이므로 정리 5.1.2 에 의하여 멱급수전개 $\sum_n a_n(z - z_0)^n$ 를 가지는데, $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$ 이므로 $a_0 = 0$ 이다. 따라서, 처음으로 0 아닌 a_n 를 잡으면

$$\frac{1}{f(z)} = a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots, \qquad a_n \neq 0$$

임을 알 수 있다. 이제

$$\frac{1}{(z - z_0)^n f(z)} = a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \cdots, \qquad a_n \neq 0$$

이므로 그 역수인 $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$ 가 $g(z_0) \neq 0$ 인 해석함수이고, 따라서 $f(z)$ 는 $z = z_0$ 에서 n-중극을 가진다. □

문제 5.1.5. 다음 함수들의 특이점을 찾고, 고립특이점인지, 극인지 살펴보아라.

(가) $\tan z$ (나) $\dfrac{1}{e^{1/z}+i}$ (다) $\dfrac{1}{\sin z - \cos z}$

(라) $\dfrac{1}{(1-z)^3}$ (마) $\operatorname{Log}\dfrac{1-z}{1+z}$

로랑급수의 계수 (3) 에서, 특히 $n=-1$ 인 경우를 보면

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i a_{-1}$$

이므로 이는 바로 적분값을 구하는 데에 큰 도움이 된다.

보기 4. 지금까지 살펴본 바에 의하면 등식 (4), (5), (6) 으로부터

$$\int_{|z-1|=1} \frac{2z\,dz}{z^2-1} = 2\pi i,\ \int_{|z-1|=3} \frac{2z\,dz}{z^2-1} = 4\pi i,\ \int_{|z|=2} \frac{2z\,dz}{z^2-1} = 4\pi i$$

등을 얻는다. □

문제 5.1.6. 다음 적분값을 계산하여라.

(가) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz$ (나) $\displaystyle\int_{|z|=1} e^{1/z} dz$

(다) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{\sin z}\, dz$

5.2. 유수정리와 편각원리

만일 함수 $f(z)$ 가 $z=z_0$ 에서 고립특이점을 가지면 적절한 영역 $D(z_0, r+\epsilon)\setminus\{z_0\}$ 위에서 함수가 해석적이고,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\, d\zeta, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

라 두면 로랑급수

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \qquad 0 < |z-z_0| < r$$

를 얻는다. 이 때 나오는 계수 a_{-1} 를 $z = z_0$ 에서 함수 $f(z)$ 의 **유수**라 하고, 이를 $\mathrm{Res}\,(f; z_0)$ 로 표시한다. 만일 Γ 가 z_0 를 한 바퀴 둘러싸는 단일폐곡선이고 그 내부에 또 다른 특이점이 없다면

$$\mathrm{Res}\,(f; z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)\,dz \tag{13}$$

이다. 앞의 5.1 절의 보기 4 에서 보았듯이 곡선 Γ 내부에 또다른 특이점이 있으면 위 등식 (13) 은 성립하지 않는다.

보기 1. 앞의 5.1 절에서 살펴본 보기 1, 보기 2, 보기 3 에 의하면

$$\mathrm{Res}\left(\frac{2}{z^2-1}; 1\right) = 1, \qquad \mathrm{Res}\left(\frac{\sin z}{z}; 0\right) = 0$$

임을 알 수 있다. 한편

$$\mathrm{Res}\left(e^{1/z}; 0\right) = 1, \qquad \mathrm{Res}\left(\frac{1}{\sin z}; 0\right) = 1$$

이다. □

많은 경우, 특히 $z = z_0$ 에서 극을 가지는 경우 로랑급수를 모두 계산하지 않고도 유수를 계산할 수 있다. 함수 $f(z)$ 가 $z = z_0$ 에서 n-중극을 가지고 그 로랑급수가 (9) 와 같이 주어지면 함수 $g(z)$ 를 (10) 으로 정의하자. 그러면

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\, g^{(n-1)}(z_0)$$

임을 알 수 있다. 따라서, 함수 $f(z)$ 가 $z = z_0$ 에서 n-중극을 가지면 다음 공식

$$\mathrm{Res}\,(f; z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right] \tag{14}$$

을 얻는다.

보기 2. 적분값 $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{z^4+z^3+5}{(z-1)^3}\,dz$ 를 계산하여 보자. 먼저 코시 적분공식을 이용할 수 있다. 이 경우 $g(z) = z^4+z^3+5$ 라 두면 $g''(1) = 18$ 이므로 구하는 적분값은

$$\int_{|z-1|=1} \frac{g(z)}{(z-1)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}g''(1) = 18\pi i$$

이다. 한편, 유수를 먼저 계산하면

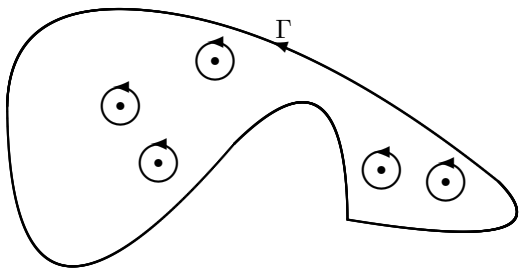
$$\operatorname{Res}(f;1) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1} g''(z) = \frac{1}{2}g''(1) = 9$$

이므로 (13) 에 의하여 같은 결과를 얻는다. □

이제부터 단일폐곡선 Γ 내부에 고립특이점 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 이 있는 경우를 생각한다. 이 경우 점 z_i 를 중심으로 하는 원 $C_i : |z-z_i| = r$ 를 그렸을 때, $r > 0$ 을 충분히 작게 하여 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 이 서로 겹치지 않고 Γ 내부에 있도록 할 수 있다. 이제, 지난 4.2 절의 등식 (4) 를 증명하는 것과 같은 방법을 사용하면

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{|z-z_i|=r} f(z)dz$$

이므로, (13) 에 의하여 다음 정리를 얻는다.



정리 5.2.1. (유수정리) 단일폐곡선 Γ 가 영역 Ω 안에 놓여 있다. 함수 $f(z)$ 가 Γ 내부에 있는 고립특이점 $z_1, z_2, \ldots z_n$ 을 제외한 Ω 위에서 해석함수라 하자. 그러면 등식

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f; z_k)$$

이 성립한다.

보기 3. 함수 $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2(z-2)}$ 의 선적분을 여러 곡선에 대하여 구해 보자. 먼저 유수를 구하면 $z=0$ 에서 $f(z)$ 는 2-중극을 가지므로

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,(f;0) &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z+1}{z-2}\right) = -\frac{3}{4}\\ \mathrm{Res}\,(f;2) &= \frac{1}{0!}\lim_{z\to 1}\frac{z+1}{z^2} = 2\end{aligned}$$

이다. 따라서,

$$\begin{aligned}\int_{|z-2|=1}\frac{z+1}{z^2(z-2)}dz &= 2\pi i\mathrm{Res}\,(f;2) = 4\pi i\\ \int_{|z|=1}\frac{z+1}{z^2(z-2)}dz &= 2\pi i\mathrm{Res}\,(f;0) = -\frac{3}{2}\pi i\\ \int_{|z|=3}\frac{z+1}{z^2(z-2)}dz &= 2\pi i(\mathrm{Res}\,(f;0)+\mathrm{Res}\,(f;1)) = \frac{5}{2}\pi i\end{aligned}$$

를 얻는다. □

문제 5.2.1. 다음 적분값을 구하여라.

(가) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\,dz$ (나) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z^2+1}{z(z-2)}\,dz$

보기 4. 적분값 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{dz}{z(e^z-1)}$ 을 구해보자. 우선 e^z-1 의 근은 $2\pi i$ 의 정수배이므로 $|z|=1$ 내부의 특이점은 $z=0$ 뿐이다. 그런데

$$z(e^z-1) = z^2 + \frac{1}{2!}z^3 + \frac{1}{3!}z^4 + \cdots$$

이므로 $\dfrac{1}{z(e^z-1)}$ 는 $z=0$ 에서 2-중극을 가진다. 따라서, 구하는 적분값은

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z(e^z-1)} = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{e^z-1}\right) = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{e^z-1-ze^z}{(e^z-1)^2}$$

인데, 이 극한값을 구하기가 번거로우면 바로 로랑급수를 구할 수도 있다. 실제로

$$\frac{1}{z(e^z-1)} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^2+\cdots} = \frac{1}{z^2}\left(1-\frac{1}{2}z+\cdots\right)$$

이므로

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z(e^z-1)} = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

이다. □

문제 5.2.2. 다음 적분값을 구하여라.

(가) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{\cos z}\,dz$ (나) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{\cos z}\,dz$

문제 5.2.3. 곡선 $|z|=2$ 를 따라 다음 함수들을 적분하여라.

(가) $\dfrac{e^{-z}}{z^3}$ (나) $z^4e^{z^{-2}}$ (다) $\dfrac{z+1}{z^2-z}$

(라) $\dfrac{z^6}{1-z^3}$ (마) $\dfrac{1}{1+z^3}$

점 $z=z_0$ 에서 함수 $f(z)$ 의 로랑급수 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 를 구하였을 때, 그 계수 $\{a_n : n=-1,-2\ldots\}$ 가운데 0 아닌 것이 유한개 뿐이라 하자. 이 때,

$$\mathrm{Ord}\,(f;z_0) = \min\{n\in\mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$$

이라 둔다. 만일 함수 $f(z)$ 가 $z=z_0$ 에서 n-중극을 가지면 등식 (9) 에서 보듯이 $\mathrm{Ord}\,(f;z_0)=-n$ 이다. 한편, 함수 $f(z)$ 가 $z=z_0$ 에서 n-중근을 가지면 등식 (12) 에서 보듯이 $\mathrm{Ord}\,(f;z_0)=n$ 이다.

이제 함수 $\mathrm{Ord}\,(f; z_0) = m$ 이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} f(z) &= a_m(z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \cdots \\ &= a_m(z-z_0)^m\,[1+g(z)] \end{aligned}$$

로 쓸 수 있다. 여기서, $g(z)$ 는 $g(z_0) = 0$ 인 해석함수이다. 직접 계산하면

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{1+g(z)}$$

을 얻는다. 따라서,

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}; z_0\right) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{m}{z-z_0}\,dz = m = \mathrm{Ord}\,(f; z_0) \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 여기서 물론 Γ 는 z_0 를 제외하면 그 내부에 극이나 근이 없도록 잡는다. 유수정리를 이용하면 다음을 얻는다.

정리 5.2.2. (편각 원리) 단일폐곡선 Γ 가 영역 Ω 안에 놓여 있다. 함수 $f(z)$ 가 Γ 내부에 있는 고립특이점 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 을 제외한 Ω 위에서 해석함수이고, 모든 고립특이점에서 극을 가진다고 하자. 또한, 함수 $f(z)$ 는 Γ 내부의 점 $z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots, z_{n+m}$ 에서 근을 가진다고 하자. 그러면 등식

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{m+n} \mathrm{Ord}\,(f; z_k)$$

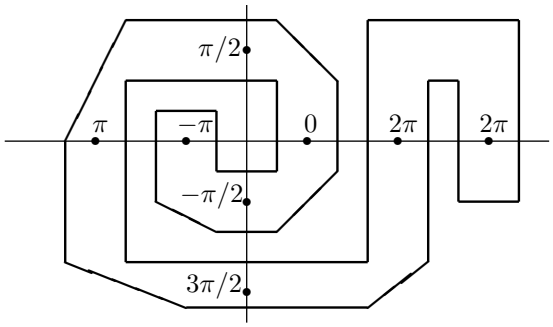
이 성립한다.

편각 원리는 다음과 같이 쉽게 풀어 쓸 수 있다. 단일폐곡선 Γ 의 내부에 근이 N 개 있고 극이 P 개 있으면

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P$$

라는 것이다. 여기서, n-중근은 물론 n 개의 근으로 간주하며 n-중극도 마찬가지이다.

여기서 이 적분값이 항상 정수가 되는데, 이제 편각원리가 뜻하는 바를 알아보자. 우선 Ω 가 원점을 포함하지 않는 단순연결영역이라 하자. 그러면 Ω 에 속하는 각각의 z 에 편각을 하나씩 대응시켜주는 연속함수가 존재한다. 이러한 연속함수를 Ω 에 정의된 **편각의 가지**라고 부르며 보통 $\arg^*$ 로 표기한다. 편각의 가지는 $2\pi i$ 의 정수배 차이를 무시했을 때 유일하게 존재한다. 지난 3.2 절의 등식 (7) 에서 보는 바와 같이 $\operatorname{Arg} z$ 는 복소평면에서 원점 및 음의 실수축을 제거한 영역에 정의된 편각의 가지 가운데 하나이다.



문제 5.2.4. 위 논의에서 영역 Ω 가 원점을 포함하지 않는 단순연결영역이라는 가정이 왜 필요한가 설명하여라.

원점을 포함하지 않는 단순연결영역 Ω 에서 함수 $\log^* z$ 를 다음

$$\log^* z = \log|z| + i \arg^* z, \qquad z \in \mathbb{Z}$$

과 같이 정의한다. 지난 3.2 절의 보기 3 에서 살펴보았듯이 $\arg^* z$ 는 주어진 점 근방에서 $\arctan \dfrac{y}{x}$ 혹은 $-\arctan \dfrac{x}{y}$ 의 상수차로 표시될 수 있기 때문에 $\log^* z$ 는 $\operatorname{Log} z$ 의 경우와 같이 해석함수이다. 이렇게 정의된 $\log^* z$ 를 Ω 에 정의된 **로그의 가지**라고 부른다. 편각의 가지와 마찬가

지로 로그의 가지도 $2\pi i$ 의 정수배 차이를 무시했을 때 유일하게 존재한다. 또한 지난 3.2 절의 보기 3 에서 살펴본 $\operatorname{Log} z$ 의 경우와 마찬가지로 다음 등식

$$e^{\log^* z} = z, \quad \frac{d}{dz}\log^* z = \frac{1}{z}, \qquad z \in \Omega,$$

이 성립함은 바로 확인된다.

단순연결일 필요가 없는 일반적인 영역 Ω 에서 정의된 해석함수 $f(z)$ 와 곡선 $\Gamma : [a,b] \to \Omega$ 가 주어져 있고, $f(z)$ 에 의한 곡선 Γ 의 상이 원점을 포함하지 않는 단순연결영역 $\widetilde{\Omega}$ 에 포함된다고 가정하자. 그러면 연쇄법칙에 의하여

$$\frac{d}{dz}\log^* f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \qquad z \in \Omega$$

가 성립하므로, 정리 4.1.1 에 의하여 다음 등식

$$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \log^* f(\Gamma(b)) - \log^* f(\Gamma(a))$$

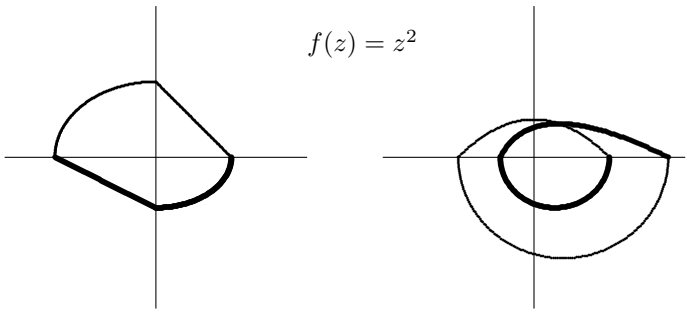
이 성립한다. 즉, 이 적분의 실수부와 허수부는 각각 곡선 Γ 를 따라 점 z 가 이동함에 따른 $\log|f(z)|$ 와 $\arg^* f(z)$ 의 변화량이다. 만일 Γ 가 닫힌곡선이면 이 적분의 실수부는

$$\log|f(\Gamma(b))| - \log|f(\Gamma(a))| = 0$$

이 된다. 또한, 곡선의 정의역을 잘게 나눔으로써, 곡선 $f \circ \Gamma$ 의 각 부분이 단순연결영역에 들어가도록 할 수 있다. 따라서, 이 적분의 값

$$i\,[\arg^* f(\Gamma(b)) - \arg^* f(\Gamma(a))]$$

은 z 가 곡선 Γ 를 따라 한 바퀴 돎에 따른 $f(z)$ 의 편각의 변화량에 i 를 곱한 것이다. 그런데, Γ 가 닫힌곡선이면 이 편각의 변화량은 원점을 지나지 않는 닫힌곡선 $f \circ \Gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ 이 원점을 시계반대방향으로 감은 횟수에 2π 를 곱한 값이다.



따라서 편각원리가 뜻하는 바는, 정리에 주어진 조건을 가정하고 단일폐곡선 Γ 의 내부에서 함수 f 가 가지는 근과 극의 개수를 각각 N, P 라 하면, 곡선 $f \circ \Gamma$ 이 원점을 시계반대방향으로 $N - P$ 번 감는다는 것이다. 편각 원리는 근의 분포를 알아내는 데에 매우 유용하게 쓰인다.

정리 5.2.3. (루셰[(2)]) 단일폐곡선 Γ 가 영역 Ω 안에 놓여 있고, 함수 $f(z)$ 와 $g(z)$ 가 Ω 위에서 해석적이다. 만일 곡선 Γ 위의 모든 점 $z \in \Gamma$ 에 대하여 부등식

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \qquad z \in \Gamma$$

이 성립하면, Γ 내부에서 $f(z)$ 와 $g(z)$ 는 같은 수의 근을 가진다.

증명: 먼저 $h(z) = \dfrac{g(z)}{f(z)}$ 라 두면

$$\frac{h'}{h} = \frac{f}{g} \cdot \frac{g'f - gf'}{f^2} = \frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}$$

이다. 따라서, $\Gamma : [a, b] \to \Omega$ 이면

$$\int_\Gamma \frac{g'}{g} - \int_\Gamma \frac{f'}{f} = \int_\Gamma \frac{h'}{h} = \int_a^b \frac{h'(\Gamma(t))}{h(\Gamma(t))}\Gamma'(t)dt = \int_{h\circ\Gamma} \frac{1}{z}\, dz$$

(2) Eugène Rouché (1832∼1910), 프랑스 수학자

이다. 그런데 가정에 의하면 $|h(\Gamma(t))-1| = \left|\dfrac{g(\Gamma(t))}{f(\Gamma(t))}-1\right| < 1$ 이다. 이는 곡선 $h\circ\Gamma$ 가 열린원판 $D(1,1)$ 위에 있음을 말한다. 그런데 함수 $\dfrac{1}{z}$ 는 $D(1,1)$ 위에서 해석적이므로

$$\int_\Gamma \frac{g'}{g} - \int_\Gamma \frac{f'}{f} = \int_{h\circ\Gamma} \frac{1}{z}\,dz = 0$$

이고, 편각 원리로부터 원하는 결론을 얻는다. □

루셰 정리를 이용하면 대수학의 기본 정리를 증명하는 데에 그치지 않고 근의 절대값이 어느 정도까지 커질 수 있는지 알아볼 수 있는데, 기본적인 방법은 함수 z^n 이 n-중근을 가진다는 사실을 이용하는 것이다. 먼저

$$p_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n = p_{n-1}(z) + a_n z^n$$

라 두자 (단, $a_n \neq 0$). 만일 $|z| > 1$ 이면

$$\begin{aligned}\left|\frac{p_{n-1}(z)}{a_n z^n}\right| &\le \frac{1}{|a_n||z|^n}(|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|)|z|^{n-1}\\ &= \frac{1}{|a_n||z|}(|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|)\end{aligned}$$

이다. 이제, $R = \max\left\{1, \dfrac{1}{|a_n|}(|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|)\right\}$ 라 두면,

$$|z| = R+\epsilon \implies |a_n z^n - p_n(z)| = |p_{n-1}(z)| < |a_n z^n|$$

이므로 루셰 정리에 의하여 $p_n(z)$ 는 원 $|z| = R+\epsilon$ 내부에 $a_n z^n$ 과 같은 n 개의 근을 가진다. 여기서, $\epsilon > 0$ 은 임의의 양수이므로 $p_n(z)$ 는 원판 $\overline{D}(0,R)$ 위에서 n 개의 근을 가진다.

보기 5. 다항식 $p(z) = z^5 + 6z^3 + 2z + 10$ 의 근의 위치를 살펴보자. 먼저 $|z| = 1$ 에서

$$|p(z) - 10| = |z^5 + 6z^3 + 2z| \le |z|^5 + 6|z|^3 + 2|z| < 10$$

이므로 $p(z)$ 는 함수 $f(z) = 10$ 과 같은 개수의 근을 가진다. 그런데 $|z| = 1$ 내부에서 $f(z) = 10$ 이 근을 가지지 않으므로 $p(z)$ 도 $|z| < 1$ 에서 근을 가지지 않는다. 이제 $|z| = 3$ 에서

$$|p(z) - z^5| = 6|z|^3 + 2|z| + 10 = 6 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 + 10 < 3^5 = |z^5|$$

이므로 $p(z)$ 는 원 $|z| = 3$ 내부에서 z^5 와 마찬가지로 다섯개의 근을 가진다. 단위원 $|z| = 1$ 에서는 $|p(z)| \geq 10 - |z^5 + 6z^3 + 2z| \geq 1$ 이므로 근을 가질 수 없다. 결국 다항식 $p(z)$ 의 모든 근은 영역 $1 < |z| < 3$ 위에 있음을 알 수 있다. □

문제 5.2.5. 영역 $1 < |z| < 2$ 안에 다항식 $2z^5 - 6z^2 + z + 1$ 의 근이 몇 개 있는지 살펴보아라.

문제 5.2.6. 영역 $|z| < 1$ 안에 다음 다항식의 근이 몇 개 있는지 살펴보아라.
(가) $z^4 - 5z + 1$ (나) $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$

5.3. 실적분의 계산

실함수 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 은 $\arctan x$ 의 도함수이므로

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi$$

임을 잘 알고 있다. 이 적분값을 복소적분을 이용하여 구해 보자. 이를 위하여 각 양수 $R > 0$ 에 대하여 다음

$$C_R(t) = Re^{i\theta}\ (0 \leq \theta \leq \pi), \qquad L_R(t) = t\ (-R \leq t \leq R)$$

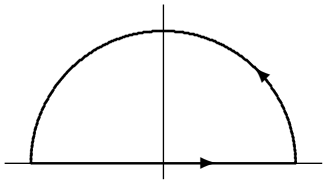
과 같이 정의된 반원 C_R 과 선분 L_R 을 생각하자. 이제 함수 $\dfrac{1}{1+z^2}$ 를 $C_R + L_R$ 을 따라서 선적분하는데, 반평면 $\operatorname{Im} z \geq 0$ 에서 $z = i$ 가 유일한 특이점이고 $\operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{1+z^2}; i\right) = \dfrac{1}{2i}$ 이므로 $R > 1$ 이면

$$\pi = \int_{C_R+L_R} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^2} + \int_{L_R} \frac{dz}{1+z^2} \tag{15}$$

이다. 그런데 $\displaystyle\int_{L_R} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2}$ 이고

$$\left|\int_{C_R} \frac{dz}{1+z^2}\right| \le \int_{C_R} \frac{1}{|1+z^2|}\,|dz| \le \frac{1}{R^2-1}\cdot \pi R$$

이므로 (15) 에 $\lim\limits_{R\to\infty}$ 를 취하면 원하는 결론을 얻는다.



위에서 사용한 방법은 매우 전형적인 것이다. 만일 함수 $f(z)$ 가 반평면 $\operatorname{Im} z \ge 0$ 을 포함하는 영역에서 유한개의 특이점을 제외한 부분에서 해석함수이고 실직선 $\operatorname{Im} z = 0$ 에서 특이점을 가지지 않는다고 하자. 만일 곡선 $C_R + L_R$ 안에 모든 특이점이 들어갈 정도로 $R > 0$ 을 크게 잡으면

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum \{\operatorname{Res}(f;z) : \operatorname{Im} z > 0\}$$

이 된다. 만일 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$ 이면,

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le \lim_{R\to\infty} \pi R \max\{|f(z)| : z \in C_R\} = 0$$

이다. 특히, 2 차 이상의 다항식 $p(z)$ 가 실근을 가지지 않으면

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p(x)}\,dx = 2\pi i \sum \{\operatorname{Res}\left(\frac{1}{p(z)};z\right) : \operatorname{Im} z > 0\} \tag{16}$$

임을 알 수 있다.

보기 1. 예를 들어서 $p(z) = 1 + z^4$ 이라 두면

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{p(z)};e^{\pi i/4}\right) + 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{p(z)};e^{3\pi i/4}\right)$$

이다. 여기서 $p(z)$ 를 인수분해하여 유수를 구하기란 매우 번거로운 일이다. 일반적으로 해석함수 $f(z)$ 가 $z = z_0$ 에서 단근을 가지면 (14) 에 의하여

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{f(z)}; z_0\right) = \lim_{z\to z_0} \frac{z - z_0}{f(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

이다. 그런데, $p'(e^{\pi i/4}) = 4e^{3\pi i/4}$, $p'(e^{3\pi i/4}) = 4e^{\pi i/4}$ 이므로

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i\left(\frac{1}{4}e^{-3\pi i/4} + \frac{1}{4}e^{-\pi i/4}\right) = \frac{\pi i}{2}\cdot(-\sqrt{2}i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

이다. □

문제 5.3.1. 적분값 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$ 를 구하여라.

문제 5.3.2. 다음 적분값을 구하여라.

(가) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ (나) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

(다) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)}$ (라) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$

다음에 계산할 특이적분

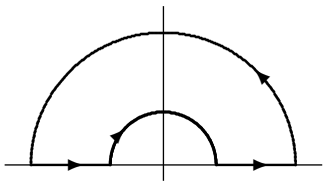
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \tag{17}$$

은 푸리에급수를 공부할 때 매우 중요한 역할을 한다.(3) 이 적분의 피적분함수는 x 가 증가함에 따라서 양수와 음수값을 번갈아 취하는 함수로서, 이 특이적분은 수렴한다.

보기 2. 함수 $\dfrac{e^{iz}}{z}$ 의 허수부가 실수축 위에서 우리가 원하는 함수 $\dfrac{\sin x}{x}$ 이다. 이 함수는 원점에서 극을 가지므로 이를 피하기 위하여, R 에서 $-R$ 까지 시계반대방향으로 반원 C_R 을 따라가고, $-R$ 부터 $-r$ 까

(3) 선적분을 사용하지 않고 등식 (17) 을 계산하는 방법은 참고문헌 [2], 8.1 절을 참조하라. 또 다른 방법으로 다음에 나오는 5.4 절을 참조하라.

지 선분을 따라가고 (단, $0 < r < R$), $-r$ 부터 r 까지 시계방향으로 반원 C_r 을 따라가고, 마지막으로 r 에서 R 까지 선분을 따라가는 단일폐곡선 Γ 를 생각하자.



그러면

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz \\ &= \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,dx \end{aligned} \tag{18}$$

이다. 우선

$$\begin{aligned} \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,dx &= \int_r^R \left(\frac{e^{ix}}{x} - \frac{e^{-ix}}{x}\right)\,dx \\ &= 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx \end{aligned}$$

이다. 이제 $\left|e^{iRe^{i\theta}}\right| = e^{-R\sin\theta}$ 이므로

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| \le \int_0^\pi e^{-R\sin\theta}d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}d\theta$$

임을 알 수 있다. 그런데 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 위에서 $\sin\theta \ge \frac{2}{\pi}\theta$ 이므로

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi}d\theta = \frac{\pi}{R}\left(1 - e^{-R}\right)$$

을 얻고, 따라서 $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$ 이다. 이제 선적분 $\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$ 를 계산할 차례인데, 보다 일반적으로 함수 $f(z)$ 가 $z = 0$ 에서 단극을 가

질 때 $\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)dz$ 를 계산해 보자. 이를 위하여

$$f(z) = \frac{\mathrm{Res}\,(f;0)}{z} + g(z), \qquad g(z) \text{ 는 원점에서 해석함수}$$

로 써 보면, 원점 근방에서 $g(z)$ 는 연속이므로 $|g(z)| \le M$ 이다. 따라서, $\left|\int_{C_r} g(z)dz\right| \le M\cdot \pi r$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)dz &= \mathrm{Res}\,(f;0)\int_{C_r}\frac{dz}{z} + \lim_{r\to 0}\int_{C_r} g(z)dz \\ &= -\pi i\,\mathrm{Res}\,(f;0)\end{aligned}$$

이다. 이제 $\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z};0\right) = 1$ 이므로, 지금까지 계산을 (18) 에 넣으면

$$0 = -\pi i + 2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

이 되고, 이로부터 등식 (17) 을 얻는다. □

이제 $Q(x,y)$ 가 이변수 유리식일 때, $\int_{-\pi}^{\pi} Q(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ 를 구해 보자. 지난 2.3 절의 (9) 를 고려하여

$$f(z) = \frac{1}{iz}\,Q\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$$

라 두자. 그러면

$$\int_{|z|=1} f(z)dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\,ir^{i\theta}\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} Q(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$$

가 된다. 따라서, $Q(x,y)$ 가 단위원 위에서 연속이면

$$\int_{-\pi}^{\pi} Q(\cos\theta,\sin\theta)d\theta = 2\pi i\sum\{\mathrm{Res}\,(f;z) : |z|<1\} \tag{19}$$

임을 일 수 있다.

보기 3. 적분값 $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}$ 를 계산해 보자. 여기서 $a+b\cos\theta \ne 0$ 일 필요충분조건은 $|a| > |b|$ 이므로 $a > |b| > 0$ 를 가정한다. 우선

$Q(x,y) = \dfrac{1}{a+bx}$ 이므로

$$f(z) = \frac{1}{iz} \cdot \frac{1}{a + b \cdot \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \frac{-2i}{bz^2 + 2az + b}$$

이다. 함수 $f(z)$ 는

$$z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \qquad z_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

에서 단극을 가지는데, 이 중 z_1 만이 단위원 안에 들어간다. 이 때

$$\operatorname{Res}(f; z_1) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = \lim_{z \to z_1} \frac{-2i}{b(z - z_2)} = -\frac{i}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

이므로

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = 2\pi i \operatorname{Res}(f; z_1) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \qquad a > |b|$$

임을 알 수 있다. □

문제 5.3.3. 치환 $z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$ 을 이용하여

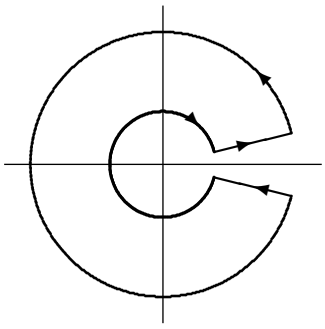
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = -2i \int_{|z|=1} \frac{dz}{bz^2 + 2az + b}$$

를 유도하여라.

무리함수가 포함되는 정적분의 값을 구할 때에는 매우 조심하여야 한다. 예를 들어서 $z^a = e^{a \log z}$ 는 한 가지 값만 취하는 것이 아니기 때문에 $\log z$ 가 한 가지 값을 취하도록 편각을 잘 제한해 주어야 한다. 예를 들어서 $\operatorname{Log} z$ 는 $\mathbb{C} \setminus \{z : \operatorname{Re} z \le 0,\ \operatorname{Im} z = 0\}$ 위에서 해석함수이다. 그러나, 피적분함수의 극점이 음의 실수축에 있는 경우에는 로그함수의 정의역을 이렇게 잡는 것이 적절하지 못할 수 있다.

보기 4. 적분값 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt$ 을 구하기 위하여 $f(z) = \dfrac{z^{a-1}}{1+z}$ 라 두자 (단, $0 < a < 1$). 이제 작은 편각 $\sigma > 0$ 를 고정하고 $Re^{i\sigma}$ 에서 $R^{-i\sigma}$ 까

지 시계반대방향으로 도는 원을 C_1 이라 한다. 또한 $0 < r < 1 < R$ 이라 하고, 계속하여 $R^{-i\sigma}$ 부터 $re^{-i\sigma}$ 까지 가는 선분을 L_-, 그리고 $re^{-i\sigma}$ 부터 $re^{i\sigma}$ 까지 시계방향으로 도는 원을 C_2 라 한다. 끝으로, $re^{i\sigma}$ 에서 $Re^{i\sigma}$ 까지 가는 선분을 L_+ 라 하자.



먼저 주어진 단일폐곡선의 내부를 포함하는 영역에서 로그함수가 해석함수가 되도록

$$\log z = \log|z| + i\arg z, \qquad 0 < \arg z < 2\pi$$

라 둔다. 우선 $|z^{a-1}| = |e^{(a-1)\log z}| = e^{(a-1)\log|z|} = |z|^{a-1}$ 이므로, 다음

$$|z| = R \implies \left|\int_{C_1} \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz\right| \le \frac{R^{a-1}}{R-1}\cdot 2\pi R$$
$$|z| = r \implies \left|\int_{C_2} \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz\right| \le \frac{r^{a-1}}{1-r}\cdot 2\pi r$$

을 얻는다. 따라서 σ 의 값에 관계없이

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz = \lim_{r\to 0}\int_{C_2} \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz = 0 \tag{20}$$

임을 알 수 있다. 이제, 곡선 $L+$ 와 L_- 에서 선적분을 계산하는데

$$(te^{i\sigma})^{a-1} = e^{(a-1)(\log t + i\sigma)} = t^{a-1}\,e^{i(a-1)\sigma}$$

이므로

$$\lim_{\sigma\to 0}\int_{L_+} f(z)dz = \lim_{\sigma\to 0}\int_r^R \frac{t^{a-1}e^{i(a-1)\sigma}}{1+te^{i\sigma}}\, e^{i\sigma}dt = \int_r^R \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt \qquad (21)$$

이다. 한편 곡선 L_- 위에서는

$$(te^{-i\sigma})^{a-1} = e^{(a-1)(\log t + i(2\pi-\sigma))} = t^{a-1}\, e^{i(a-1)(2\pi-\sigma)}$$

이므로

$$\lim_{\sigma\to 0}\int_{L_-} f(z)dz = \int_R^r \frac{t^{a-1}\, e^{2\pi i(a-1)}}{1+t}\, dt = -e^{2\pi ia}\int_r^R \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt \qquad (22)$$

를 얻는다. 따라서,

$$\lim_{\sigma\to 0}\int_{L_+ + L_-} \frac{z^{a-1}}{1+z}\, dz = (1-e^{2\pi ia})\int_r^R \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt$$

이다. 그런데

$$\text{Res}\ (f(z); -1) = (-1)^{a-1} = e^{(a-1)\log(-1)} = e^{(a-1)\pi i} = -e^{\pi ai}$$

이므로, $\Gamma = C_1 + L_- + C_2 + L_+$ 라 두면

$$-2\pi i\, e^{\pi ai} = \int_\Gamma f(z)dz = \int_{C_1+C_2} \frac{z^{a-1}}{1+z}\, dz + \int_{L_+ + L_-} \frac{z^{a-1}}{1+z}\, dz$$

에서 $\lim\limits_{\sigma\to 0}$ 을 취하면

$$-2\pi i\, e^{\pi ai} = \int_{C_1+C_2} \frac{z^{a-1}}{1+z}\, dz + (1-e^{2\pi ia})\int_r^R \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt$$

이다. 여기서, $\lim\limits_{R\to\infty}$ 과 $\lim\limits_{r\to 0}$ 를 취하면 (20) 에 의하여

$$-2\pi i\, e^{\pi ai} = (1-e^{2\pi ia})\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt$$

이 된다. 따라서,

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt = \frac{-2\pi i e^{\pi ai}}{1-e^{2\pi ia}} = \frac{-2\pi i}{e^{-\pi ai}-e^{\pi ai}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

을 얻는다. □

5.4. 무한급수의 미분과 적분

멱급수의 미분을 계산하는 정리 3.3.1 은 본질적으로 극한과 미분의 순서를 바꿀 수 있다는 것이다. 특별한 적분 꼴로 표시된 함수를 멱급수로 전개할 수 있다는 정리 4.3.2 의 증명도 그 핵심은 결국 극한과 적분의 순서를 바꾸는 것이었다. 이는 로랑급수를 얻는 정리 5.1.1 의 증명에서도 마찬가지였다. 바로 앞 5.3 절의 보기 4 에서도 등식 (21), (22) 에서 극한과 적분의 순서를 바꾸었다. 이 절에서는 좀 더 일반적인 상황에서 극한과 미분, 극한과 적분의 순서를 바꾸는 문제를 생각한다. 이런 문제는 좀 뒤로 미루고 우선 한 가지 계산의 예를 들어 보기로 하자.

복소함수

$$f(z) = \pi \cot \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$$

는 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ 위에서 해석함수이고, 각 점 $n \in \mathbb{Z}$ 에서 단극을 가지는데, 그 유수는 $\operatorname{Res}(f; n) = 1$ 이다. 이 함수는 다음

$$2f(2z) = f(z) + f(z + \frac{1}{2}) \tag{23}$$

과 같은 특별한 성질을 가진다. 이제 다음

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right) \tag{24}$$

과 같이 정의된 급수를 생각하자. 이 급수가 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ 위에서 해석함수임을 보이는 것은 극한과 미분의 순서를 바꾸는 문제이므로 잠시 뒤로 미룬다. 이제 $g(z)$ 가 각 $n \in \mathbb{Z}$ 위에서 단극을 가지고 $f(z)$ 와 마찬가지로 $\operatorname{Res}(g; n) = 1$ 이므로 함수 $h(z) = f(z) - g(z)$ 는 복소평면 위에서 해석함수이다. 그런데 $g(z)$ 역시 등식 (23) 을 만족하므로 함수 $h(z)$ 는 등식 (23) 을 만족하는 해석함수이다.

문제 5.4.1. 함수 $f(z)$ 와 $g(z)$ 가 등식 (23) 을 만족함을 보여라.

이제 원판 $\overline{D} = \overline{D}(0, R)$ 을 생각하자. 우선 $h(z)$ 가 만족하는 등식 (23) 을 미분하고 z 대신에 $\frac{1}{2}z$ 를 넣으면

$$4|h'(z)| \le \left|h'\left(\frac{1}{2}z\right)\right| + \left|h'\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\right)\right|$$

가 성립한다. 만일 $R > 1$ 이면

$$z \in \overline{D} \implies \frac{1}{2}z \in \overline{D},\ \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\overline{D}$$

이므로, $M = \max\{|h'(z)| : z \in \overline{D}\}$ 라 두면 $4M \le M + M$ 이 되어 $M = 0$ 이다. 결국 D 위에서 $h'(z) = 0$ 이므로 상수함수인데 $h(0) = 0$ 이므로 $f = g$ 이다. 항등정리를 적용하면 다음 등식

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right) \tag{25}$$

을 얻는다. 이제 $\dfrac{d\cot z}{dz} = -\dfrac{1}{\sin^2 z}$ 이므로, 극한과 미분의 순서를 바꿀 수 있다면

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{(z+n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$$

인데, z 대신에 $\dfrac{z}{\pi}$ 를 넣으면 등식

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi^2}{(z+n\pi)^2} \tag{26}$$

을 얻게 된다. 등식 $\sin(z + n\pi) = (-1)^n \sin z$ 를 이용하면

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(z+n\pi)}{(z+n\pi)^2}$$

이다. 한편

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(t+n\pi)}{(t+n\pi)^2}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$$

이므로, 만일 극한과 적분의 순서를 바꿀 수 있으면

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2} \tag{27}$$

임을 알 수 있다. 여기서 부분적분을 이용하면

$$\int_0^A \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = -\frac{\sin^2 A}{A} + \int_0^{2A} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

이므로, 이미 알고 있는 등식

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

을 얻게 된다.

복소함수 $\pi\cot\pi z$ 는 각 $z=0$ 에서 단극을 가지고 그 유수가 1 이므로 $\pi\cot\pi z - \dfrac{1}{z}$ 는 $z=0$ 에서 해석함수이다. 이제, 등식 (25) 를 이용하여 이 함수의 멱급수전개를 구해 보자. 각 $n=1,2,\ldots$ 에 대하여

$$\frac{2z}{z^2-n^2} = -\frac{1}{n^2}\cdot\frac{2z}{1-\dfrac{z^2}{n^2}} = -\frac{2z}{n^2}\sum_{k=1}^\infty \frac{z^{2k-2}}{n^{2k-2}}$$

이다. 만일 무한급수의 순서를 바꿀 수 있으면

$$\pi\cot\pi z - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^\infty \frac{2z}{z^2-n^2} = \sum_{k=1}^\infty \left[-\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{2}{n^{2k}}\right)\right] z^{2k-1} \tag{28}$$

을 얻는다.

이제, 원래 $\cot z$ 의 정의에 의하여 멱급수전개를 구해 보자. 등식

$$\cot z = i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = i\,\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = i\left(1-\frac{2}{1-e^{2iz}}\right) \tag{29}$$

을 염두에 두고

$$h(z) = \frac{z}{e^z-1}$$

에서 시작하자. 함수 $e^z - 1$ 은 2π 의 정수배에서 근을 가진다. 특히, $z = 0$ 에서 단근을 가지므로 $h(0) = 1$ 이라 정의하면 $h(z)$ 는 열린원판 $D(0, 2\pi)$ 위에서 해석함수이다. 따라서, 이 함수는 멱급수전개

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0} \frac{B_k}{k!} z^k$$

를 가지는데, 그 계수 B_k 를 구해 보자. 우선 $\dfrac{e^z - 1}{z} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}$ 이므로

$$1 = \left(1 + \frac{1}{2!} z + \cdots + \frac{1}{3!} z^2 + \frac{1}{(k+1)!} z^k + \cdots\right) \cdot \left(B_0 + \frac{B_1}{1!} z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \cdots + \frac{B_k}{k!} z^k + \cdots\right)$$

에서 $B_0 = 1$ 및 점화식

$$\binom{n+1}{0} B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \binom{n+1}{2} B_2 + \cdots + \binom{n+1}{n} B_n = 0$$

을 얻는다. 처음 몇 항을 구해 보면

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},$$
$$B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_7 = 0,\ B_8 = -\frac{1}{30}, \ldots$$

를 얻는데, 이러한 수들을 **베르누이**(4)**수**라 부른다. 함수 $\dfrac{z}{e^z - 1}$ 이 $z = \pm 2n\pi i$ $(n = 1, 2, \ldots)$ 에서 특이점을 가지므로 멱급수전개의 수렴반경이 2π 이다. 따라서, $\langle B_n \rangle$ 은 유계수열이다.

문제 5.4.2. 멱급수 $\sum_n \dfrac{a_n}{n!} z^n$ 에서 $\langle a_n \rangle$ 이 유계수열이면 수렴반경이 ∞ 임을 보여라.

문제 5.4.3. 짝함수의 멱급수전개에서 홀수차 항의 계수가 모두 0 임을 보여라. 각 $n = 3, 5, 7, \ldots$ 에 대하여 $B_n = 0$ 임을 보여라.

(4) Jacob Bernoulli (1654∼1705), 스위스 수학자. Basel 에서 공부하고 활동하였다. 그의 동생 Johann Bernoulli (1667∼1748) 및 조카인 Johann 의 아들들도 수학자였다.

이제, 함수 $h(z)$ 의 정의와 관계식 (29) 에 의하여

$$\begin{aligned}\cot z &= i + \frac{1}{z}\,h(2iz)\\ &= i + \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{2}\,(2iz) + \frac{B_2}{2!}\,(2iz)^2 + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k)!}\,(2iz)^{2k} + \cdots\right)\end{aligned}$$

이므로 등식

$$\cot z - \frac{1}{z} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{4^k B_{2k}}{(2k)!}\,z^{2k-1} \tag{30}$$

을 얻는다. 이 등식은 다음

$$\frac{1}{2}\,z\cot\frac{1}{2}\,z = 1 - \frac{B_2}{2!}\,z^2 + \frac{B_4}{4!}\,z^4 + \cdots + (-1)^n\frac{B_{2n}}{(2n)!}\,z^{2n} + \cdots$$

과 같이 보기 좋게 쓸 수도 있다.

이제 등식 (28) 과 (30) 을 비교하면

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{2k}} = (-1)^k\frac{4^k B_{2k}\pi^{2k}}{(2k)!}$$

이고, 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

을 얻는데, 이는 지난 2.3 절에서 정의한 리만제타함수의 값 $\zeta(2k)$ 이다. 앞에서 얻은 B_k 의 값들을 넣으면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

등을 얻는다.

이제, 지금까지 계산이 옳은지 확인할 수 있는 이론적인 틀을 살펴본다. 먼저 해석함수들의 무한합이 언제 해석함수인지 알아보고, 이 경우 멱급수로 전개하였을 때 그 계수가 어떻게 되는지 알아본다.

정리 5.4.1. (바이어슈트라스) 각 자연수 $k = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 복소함수 $f_k(z)$ 가 열린원판 $D = D(z_0, R)$ 에서 해석함수라 하자. 또한 모든 자연수 $k = 1, 2, \ldots$ 와 $z \in D$ 에 대해서 부등식 $|f_k(z)| \le M_k$ 가 성립하며 급수 $\sum_k M_k$ 가 수렴한다고 가정하자. 그러면 다음이 성립한다.

(가) $f(z) = \sum_k f_k(z)$ 는 D 위에서 해석함수이다.

(나) $f^{(n)}(z) = \sum_k f_k^{(n)}(z)$ 이 성립한다.

(다) 만일 각 $k = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $f_k(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}(z - z_0)^n$ 이면, 함수 $f(z)$ 의 멱급수전개는

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right) (z - z_0)^n \tag{31}$$

으로 주어진다.

증명: 점 $z \in D$ 를 고정하고, 원 $C : |\zeta - z_0| = r$ 를 잡되 (단, $r < R$) 점 z 가 이 원의 내부에 들어가도록 하자. 우선 $\zeta \in C$ 에 대하여

$$\left| f(\zeta) - \sum_{k=1}^{K} f_k(\zeta) \right| = \left| \sum_{k=K+1}^{\infty} f_k(z) \right| \le \sum_{k=K+1}^{\infty} M_k$$

인데 $\sum_k M_k$ 가 수렴하므로, $\epsilon_K = \displaystyle\sum_{k=K+1}^{\infty} M_k$ 이라 두면 $\displaystyle\lim_{K\to\infty} \epsilon_K = 0$ 이다. 이제, $n = 1, 2, \ldots$ 를 고정하면

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=1}^{K} \int_C \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta - \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \right| \\ &\qquad \le \int_C \frac{1}{|\zeta - z|^{n+1}} \left| f(\zeta) - \sum_{k=K+1}^{\infty} f_k(\zeta) \right| |d\zeta| \le \frac{\epsilon_K \cdot 2\pi r}{(r - |z - z_0|)^{n+1}} \end{aligned}$$

이므로

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \tag{32}$$

임을 알 수 있다. 그런데 f_k 가 해석함수이므로 코시 적분공식을 만족한다. 따라서, 등식 (32) 를 $n = 0$ 일 때 적용하면

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \int_C \frac{f_k(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

이고, 정리 4.3.3 에 의하여 $f(z)$ 는 해석함수이므로 (가) 가 증명되었다. 등식 (32) 를 그대로 적용하면 마찬가지로 (나) 가 증명된다. 이제 해석함수 $f(z)$ 를 $z = z_0$ 에서 멱급수전개하였을 때 나오는 계수는 다시 (32) 에 의하여

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \int_C \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$$

이다. □

등식 (31) 을 다시 쓰면

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right) (z - z_0)^n = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} (z - z_0)^n$$

이므로 이는 결국 무한합을 바꾸는 문제로 귀착된다.

등식 (24) 에 의하여 정의된 함수 $g(z)$ 가 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ 에서 해석함수임을 보이자. 먼저 원판 $\overline{D} = \overline{D}(z_0, r)$ 이 영역 $\operatorname{Re} z > 0$ 에 들어가는 경우만 생각해도 된다. 이 때, $A = \operatorname{Re} z_0 + r$ 이라 두자. 그러면 임의의 $\zeta \in \overline{D}$ 와 $n > A$ 에 대하여

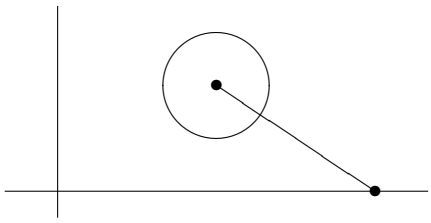
$$|\zeta + n| \geq |\zeta - n| \geq |n - z_0| - r \geq n - \operatorname{Re} z_0 - r = n - A$$

이다. 따라서,

$$\sum_{n>A} \left| \frac{1}{\zeta^2 - n^2} \right| \leq \sum_{n>A} \frac{1}{|\zeta - n|^2} \leq \sum_{n>A} \frac{1}{(n - A)^2}$$

이 수렴한다. 이제 정리 5.4.1 (가), (나) 를 적용하면 (24) 에 의하여 정의된 함수 $g(z)$ 가 해석함수임을 알 수 있고, (26) 을 얻는 과정에서 미

분과 무한합을 바꾼 것도 정당함을 알 수 있다. 끝으로, 정리 5.4.1 (다)를 적용하면 등식 (28) 에서 무한합을 바꾼 것이 정당함을 알 수 있다.



정리 5.4.1 을 적용하면 지난 2.3 절의 (16) 에서 정의한 리만제타함수가 영역 $\{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ 위에서 해석함수임을 증명할 수 있다. 우선 $n^z = e^{n \operatorname{Log} z}$ 는 $\operatorname{Re} z > 1$ 위에서 해석함수이고 근을 가지지 않으므로 $\dfrac{1}{n^z}$ 는 $\operatorname{Re} z > 1$ 위에서 해석함수이다. 만일 $\operatorname{Re} z > 1$ 안에 원판 $\overline{D}$ 가 들어가면 $a = \min\{\operatorname{Re} z : z \in \overline{D}\} > 1$ 이다. 따라서, 임의의 $z \in \overline{D}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^z} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

가 수렴하고, $\zeta(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ 는 해석함수이다.

등식 (27) 을 유도하는 과정에서 적분과 무한합을 바꾸는 과정도

$$M_n = \max\left\{ \left| \frac{\sin^2(t + n\pi)}{(t + n\pi)^2} \right| : 0 \le t \le \pi \right\}$$

라 두었을 때, 정리 5.4.1 의 증명과 마찬가지로 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n$ 이 수렴하는가 하는 문제로 귀착되는데, 이는 연습문제로 남긴다.

문제 5.4.4. 등식 (27) 을 유도하는 과정에서 무한합과 적분의 순서를 바꿀 수 있음을 보여라. 또한, 등식 (21), (21) 에서 적분과 무한합의 순서를 바꿀 수 있음을 보여라.

5.5. 연습문제

5.5.1. 삼각급수 $h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ 의 계수 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{R}, \qquad \lim_{n\to-\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r$$

이라 하자.

(가) 함수 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 가 주기 2π 인 주기함수이면 $h(t) = f(e^{it})$ 를 만족하는 함수 $f : \{z : |z| = 1\} \to \mathbb{C}$ 가 존재함을 보여라.

(나) 만일 $r < 1 < R$ 이면 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ 는 집합 $\{z : r < |z| < R\}$ 위에서 해석함수임을 보여라.

(다) 만일 $r < 1 < R$ 이면 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 는 해석주기함수임을 보여라.(5)

5.5.2. 집합 $A = \{z : r \le |z| \le R\}$ 를 포함하는 영역 위에서 해석함수 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ 가 정의되어 있다. 이 때, f 의 상 $\{f(z) : r \le |z| \le R\}$ 의 넓이는

$$\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n|a_n|^n (R^{2n} - r^{2n})$$

임을 보여라. 여기서 f 의 상이 중복되는 경우 중복되는 만큼 넓이에 포함된다.

5.5.3. 함수 $f(z)$ 가 단위원판 $\overline{D} = \overline{D}(0,1)$ 을 포함하는 영역 Ω 위에서 해석함수이고, $|z| = 1$ 이면 $|f(z)| = 1$ 이라 가정하자. 그러면 $f(z)$ 의 상은 한 점이거나 $\overline{D}$ 를 포함함을 보여라.

5.5.4. 열린원판 $D(0,R)$ 위의 서로 다른 점 $z_1, \ldots, z_n$ 에 대하여

$$Q(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$$

이라 하자. 원판 $\overline{D}(0,R)$ 을 포함하는 영역 위에서 정의된 해석함수 $f(z)$ 에 대하여

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(\zeta)\left(1 - \dfrac{Q(z)}{Q(\zeta)}\right)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

라 정의하면, 각 $i = 1, 2, \ldots, n$ 에 대하여 $P(z_i) = f(z_i)$ 이고 $P(z)$ 는 $n-1$ 차 다항식임을 보여라.

(5) 참고문헌 [2], 정리 9.4.5 를 참조하라.

5.5.5. 다음 적분값을 구하여라.
(가) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$
(나) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx$, 단, $a > b > 0$.

5.5.6. 적분값 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos 2\theta d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$ 을 구하여라. 단 $-1 < a < 1$ 이다.

5.5.7. 다음 적분값을 구하여라.
(가) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^a dx}{(1+x)^2}$, 단 $-1 < a < 1$
(나) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^a dx}{1+x^2}$, 단 $-1 < a < 1$

5.5.8. 원점 0 을 출발하여 선분을 따라서 R 까지 가서 원호를 따라 $Re^{2\pi i/3}$ 까지 가고 다시 선분으로 0 에 돌아오는 곡선 위에서 $\dfrac{1}{z^3+1}$ 의 적분을 계산하고, 이를 이용하여 적분값

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}\,dx$$

를 구하여라.

5.5.9. 임의의 자연수 $n = 2, 3, \ldots$ 에 대하여 적분값

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^n+1}\,dx$$

를 구하여라.

5.5.10. 원점 0 을 출발하여 선분을 따라서 R 까지 가서 원호를 따라 iR 까지 가고 다시 선분으로 0 에 돌아오는 곡선 위에서 e^{iz^2} 의 적분을 계산하고, 이를 이용하여 적분값

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx, \qquad \int_0^\infty \sin(x^2)dx$$

를 구하여라.

5.5.11. 유리함수 $R(z)$ 가 원점을 포함한 양의 실직선 위에서 극을 가지지 않고 다음

$$\lim_{x\to+\infty} xR(x) = 0$$

을 만족한다고 가정하자.
(가) 특이적분 $\displaystyle\int_0^\infty R(x)\log x dx$ 및 $\displaystyle\int_0^\infty R(x)dx$ 가 수렴함을 보여라.

(나) 지난 5.3 절의 보기 4 와 유사한 곡선을 잡되 큰 원과 작은 원을 두 개의 수평선으로 연결하는 곡선 위에서 함수 $R(z)(\log^* z)^2$ 의 선적분을 계산함으로써, 다음 등식

$$-2\int_0^\infty R(x)\log x dx - 2\pi i\int_0^\infty R(x)dx = \sum \operatorname{Res} R(z)(\log^* z)^2$$

이 성립함을 보여라. 여기서, $\log^*$ 는 그 편각이 $(0, 2\pi)$ 에 들어가도록 가지를 잡는다. 또한, 함수 $R(z)(\log^* z)^2$ 의 유수는 $R(z)$ 의 모든 극에서 계산한다.

(다) 만일 임의의 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $R(x) \in \mathbb{R}$ 이면 다음 등식

$$\int_0^\infty R(x)\log x dx = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\sum \operatorname{Res} R(z)(\log^* z)^2,$$
$$\int_0^\infty R(x)dx = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\sum \operatorname{Res} R(z)(\log^* z)^2$$

이 성립함을 증명하여라.

(라) 적분값

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^3}\,dx$$

을 구하여라.

(마) 같은 곡선 위에서 $R(z)\log^* z$ 를 선적분함으로써, 다음 등식

$$\int_0^\infty R(x)dx = -\sum \operatorname{Res} R(z)\log^* z$$

을 증명하여라.

(바) 적분값

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$$

을 (다), (마) 에서 제시한 두 가지 방법으로 계산하여라.

5.5.12. 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n$ 이 열린원판 $D(-i, 1)$ 위에서 해석함수임을 보여라.

5.5.13. 각 복소수 $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ 에 대하여 다음 무한급수

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z-n} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}(-1)^n\frac{1}{z-n}$$

의 값을 구하여라. [도움말: 이 급수의 짝수번 째 항과 홀수번 째 항을 분리한 후, 등식 (25) 를 이용한다]

5.5.14. 멱급수

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$$

가 주어져 있다.

(가) 이 멱급수의 수렴반경을 구하여라.

(나) 임의의 자연수 $n \geq k$ 에 대하여 $\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{(1+\zeta)^n}{\zeta^{k+1}} d\zeta$ 가 성립함을 보여라.

(다) 만일 $|z| < \frac{1}{4}$ 이면 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta - z(1+\zeta^2)}$ 임을 보여라.

(라) $|z| < \frac{1}{4}$ 일 때, 무한급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$ 의 값을 구하여라.

5.5.15. 복소평면 위에서 실수축 위의 구간 $[1, \infty)$ 를 제외한 영역을 Ω 라 두고, 각 $z \in \Omega$ 에 대하여

$$f(z) = -\int_0^z \frac{\operatorname{Log}(1-\zeta)}{\zeta} d\zeta, \qquad z \in \Omega$$

라 정의하자.

(가) 함수 $f(z)$ 의 멱급수전개가 다음

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n = z + \frac{1}{2^2} z^2 + \frac{1}{3^2} z^3 + \cdots, \qquad |z| < 1$$

과 같이 주어짐을 보여라.

(나) 위 등식이 임의의 $z \in \{z : |z| \leq 1,\ z \neq 1\}$ 위에서 성립함을 보여라. 또한, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{\pi^2}{6}$ 임을 보여라. [도움말: 연습문제 3.4.12.]

(다) 점 $1-\epsilon$ 에서 출발하여 점 1 이 중심이고 반지름이 ϵ 인 원을 따라 시계방향으로 움직여서 단위원 $|z| = 1$ 의 한 점에 이르는 곡선을 C_ϵ 이라 할 때, 다음

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_\epsilon} \frac{\operatorname{Log}(1-\zeta)}{\zeta} d\zeta = 0$$

이 성립함을 보여라.

(라) 각 $\theta \in [0, \pi]$ 에 대하여 등식

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi\theta}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^2} = -\theta \log 2 - 2 \int_0^{\theta/2} \log \sin t dt$$

이 성립함을 보여라.

(마) 다음 등식

$$\int_0^{\pi} \log \sin \theta d\theta = -\pi \log 2$$

을 증명하여라.

5.5.16. 등식 (26) 에 의하여 얻어지는 다음 등식

$$\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{z^2} = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z + n\pi)^2}$$

은 0 에서 해석함수를 정의한다.

(가) 등식

$$\lim_{z \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{z^2} \right) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

이 성립함을 보여라.

(나) 등식 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 을 증명하여라.

5.5.17. 등식 $\tan z = \cot z - 2 \cot 2z$ 를 보이고, 이를 이용하여 $\tan z$ 의 멱급수전개를 구하여라. 이 때, 계수의 일반항을 베르누이수로 표시하여라.