제 6 장 조화함수와 등각사상

조화함수는 수학뿐 아니라 물리학이나 공학에서도 중요한 역할을 한다. 먼저 조화함수가 해석함수의 실수부라는 것을 보이고 나면 이를 이용하여 조화함수의 여러 가지 성질들을 알아낼 수 있다. 영역의 경계에서 주어진 조건을 만족하는 조화함수를 찾으라는 디리끌렛 문제도 영역이 열린원판인 경우 해석함수의 코시 적분공식으로부터 그 실마리를 잡을 수 있다. 여러 가지 영역에서 조화함수를 찾으려면 이 영역과 열린원판 사이의 전단사 해석함수를 찾으면 되는데, 단사 해석함수는 자동적으로 그 역함수가 해석함수가 된다.

6.1. 조화함수

이미 지난 3.2 절에서 정의하였듯이, 영역 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 에서 정의된 함수 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ 의 일계 및 이계편도함수가 연속이고 다음 등식

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

을 만족할 때, u 를 **조화함수**라 한다. 평면 위의 단일폐곡선이 주어져 있을 때, 그 내부에서 평형 상태를 이룬 온도 분포함수는 조화함수이다. 이러한 취지에서 보면, 일정한 조건을 갖춘 조화함수를 찾는 것은

매우 중요한 일이다. 특히, 주어진 영역의 경계에서 미리 주어진 값을 가지는 조화함수를 찾는 문제를 일반적으로 **디리끌렛 문제**라 한다.

편미분방정식 문제로서 복소해석과 별 상관없어 보이는 이 문제는 조화함수가 바로 해석함수의 실수부라는 사실 때문에 복소해석 방법이 큰 위력을 발휘한다. 지난 3.2 절에서 살펴보았듯이 해석함수 $f = u+iv$ 의 실수부 u 는 항상 조화함수이다. 이제, 조화함수 u 가 주어져 있을 때, u 를 실수부로 가지는 해석함수 $f = u + iv$ 를 찾으려 한다. 만일 $f = u + iv$ 가 해석함수이면 코시–리만 방정식에 의하여

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z) \tag{2}$$

이므로 이 함수의 원시함수를 찾으면 된다.

정리 6.1.1. 만일 함수 $u(z)$ 가 단순연결영역에서 정의된 조화함수이면, $u = \operatorname{Re} f$ 인 해석함수 $f(z)$ 가 존재한다.

증명: 직접 계산하여 보면 함수 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(z) - i\dfrac{\partial u}{\partial y}(z)$ 가 코시–리만 방정식을 만족하므로 정리 3.2.2 에 의하여 해석함수이다. 이제, 한 점 $z_0 \in \Omega$ 를 고정하고 함수 $f(z)$ 를 다음

$$f(z) = u(z_0) + \int_{z_0}^{z} \left[\frac{\partial u}{\partial x}(\zeta) - i\frac{\partial u}{\partial y}(\zeta)\right] d\zeta$$

과 같이 정의하자. 영역 Ω 가 단순연결영역이므로 점 z_0 에서 z 까지 가는 임의의 곡선을 따라서 적분하여도 그 값은 마찬가지이다. 따라서, 정리 4.2.2 와 정리 4.3.3 에서 보듯이 $f(z)$ 는 해석함수이고,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z)$$

이다. 그런데 등식 (2) 에서 보듯이, 일반적으로

$$f'(z) = \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z) - i\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(z)$$

이므로 $u(z)$ 와 $\operatorname{Re} f(z)$ 는 같은 편미분을 가지고, $\operatorname{Re} f(z_0) = u(z_0)$ 이므로 $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ 임을 알 수 있다. □

조화함수 $u(z)$ 에 대하여, $u + iv$ 가 해석함수일 때 $v(z)$ 를 $u(z)$ 의 **조화켤레함수**라 부른다. 만일 v 와 w 가 조화함수 u 의 조화켤레함수이면, $i(v - w)$ 는 그 상이 허수축 안에 들어가는 해석함수이므로 열린사상정리에 의하여 상수함수가 된다. 즉, 조화켤레함수는 상수 차이를 무시하면 유일하게 결정된다.

문제 6.1.1. 만일 $u(z)$ 가 조화함수이면, 함수 $g(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(z) - i\dfrac{\partial u}{\partial y}(z)$ 가 코시–리만 방정식을 만족함을 보여라.

보기 1. 지난 3.2 절의 보기 3 에서 살펴본 바와 같이

$$u(z) = u(x, y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

는 영역 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 위에서 조화함수이다. 그러나, $u(z)$ 는 이 영역 전체에서 해석함수의 실수부가 될 수 없다. 이를 보이기 위하여 $u + iv$ 가 해석함수라 가정하자. 그러면 영역 $\mathbb{C} \setminus \{it : t \le 0\}$ 위에서 $u(z) + iv(z) - \operatorname{Log} z$ 는 해석함수이고, 특히 실수부가 0 이다. 따라서 열린사상정리를 적용하면 $u(z) + iv(z) = \operatorname{Log} z + C$ (단, C 는 상수) 임을 알 수 있다. 그러나 $\operatorname{Log} z$ 는 영역 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 전체에서 정의될 수 없다. 물론 지난 3.2 절의 보기 3 에서 계산한 바와 같이 영역 $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ 위에서는 조화켤레함수를 가진다. □

문제 6.1.2. 영역 $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ 및 $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ 위에서 $u(x, y) = \dfrac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$ 의 조화켤레함수를 찾아라.

정리 6.1.1 에 의하여 해석함수의 여러 가지 성질들은 조화함수에 그대로 적용되는 경우가 많다. 한 가지 예로서 가우스 평균값정리에서 실수부를 취하면, $u(z)$ 가 원판 $\overline{D}(z_0, r)$ 을 포함하는 영역 위에서 조화함수일 때, 등식

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta \tag{3}$$

이 성립한다. 만일 조화함수 $u(z)$ 가 $z = z_0$ 에서 극대값을 가지면 적절한 원판 $\overline{D}(z_0, R)$ 위에서 $u(z_0)$ 는 최대값이 된다. 따라서, 임의의 $r \in (0, R)$ 에 대하여

$$u(z_0) - u(z_0 + re^{it}) \geq 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \left[u(z_0) - u(z_0 + re^{it})\right] dt = 0$$

이므로, 연속함수 u 는 상수함수가 된다. 조화함수 $u(z)$ 가 $z = z_0$ 에서 극소값을 가지는 경우도 마찬가지이다. 따라서, 영역에서 정의된 조화함수는 상수함수가 아니면 극대값이나 극소값을 가지지 않음을 알 수 있고, 이로부터 다음을 얻는다.

정리 6.1.2. (최대값원리) 함수 $u(z)$ 가 유계영역 Ω 에서 조화함수이고 집합 $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ 에서 연속이면, 다음

$$\max\{u(z) : z \in \overline{\Omega}\} = \max\{u(z) : z \in \partial\Omega\}$$

이 성립한다.

이제 디리끌렛 문제를 명확하게 써 보자. 평면 위의 단일폐곡선 $\Gamma \subset \mathbb{C}$ 와 연속함수 $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ 가 주어져 있다. 곡선 Γ 의 내부를 Ω 라 할 때, 다음 성질

(디1) $U(z)$ 는 $\Omega \cup \Gamma$ 위에서 연속함수이다,
(디2) $U(z)$ 는 Ω 위에서 조화함수이다,
(디3) 각 $z \in \Gamma$ 에 대하여 $U(z) = u(z)$ 이다

들을 만족하는 함수 $U : \Omega \cup \Gamma \to \mathbb{R}$ 를 찾는 것이 디리끌렛 문제이다. 단일폐곡선을 다른 말로 **조르당**(1)**곡선**이라고 부르기도 하며, 조르당

(1) Marie Ennemond Camille Jordan (1838∼1922), 프랑스 수학자. École Polytechnique 에서 공부하고 이 곳과 Collège de France 등에서 활동하였다. 조르당 곡선 정리는 복소평면 위의 단일폐곡선 Γ 이 주어지면 $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ 가 두 영역으로 이루어지며 각 영역의 경계가 Γ 임을 말하는데, 이미 이 책에서 사용한 바 있다.

곡선의 내부를 **조르당영역**이라고 한다. 만일 U_1 과 U_2 가 디리끌렛 문제의 세 가지 성질을 만족하면, 최대절대값정리에 의하여 $U_1 = U_2$ 가 된다. 즉, 디리끌렛 문제의 해는 유일하다.

가장 대표적인 조르당영역의 예는 열린 단위원판 $\Delta = D(0,1)$ 이다. 이제부터 Γ 가 단위원일 때, 디리끌렛 문제를 어떻게 푸는지 살펴본다. 단위원판 $\overline{\Delta} = \overline{D}(0,1)$ 을 포함하는 영역에서 해석함수가 주어져 있을 때, 코시 적분공식이 말하고 있는 핵심은 단위원 위의 함수값에 의하여 그 내부의 함수값이 결정된다는 것이다. 조화함수는 해석함수의 실수부이므로, 조화함수에 대해서도 이와 비슷한 정리가 성립하리라 예상할 수 있다.

이제, $f(z)$ 가 닫힌 단위원판을 포함하는 영역에서 해석적이라 가정하고, 단위원 내부의 점 $z = re^{i\theta}$ 와 단위원 외부의 점 $w = \dfrac{1}{r}e^{i\theta}$ 를 고정하면 코시 적분공식에 의하여 다음

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta=1|} \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{\overline{z}}{\zeta\overline{z} - 1}\right] f(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

을 얻는다. 그런데 $|\zeta| = 1$ 에서

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{\overline{z}}{\zeta\overline{z} - 1}\right] d\zeta &= \frac{i(r^2 - 1)e^{it}dt}{(e^{it} - re^{i\theta})(re^{i(t-\theta)} - 1)} \\ &= \frac{i(1 - r^2)dt}{(1 - re^{i(\theta - t)})(1 - re^{-i(\theta - t)})} \\ &= \frac{i(1 - r^2)dt}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} \end{aligned}$$

이다. 따라서,

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}, \qquad 0 \le r < 1, t \in [-\pi, \pi] \tag{4}$$

이라 두면 다음 등식

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt, \qquad 0 \le r < 1 \tag{5}$$

을 얻는다. 이 등식을 **푸아송**(2) **적분공식**이라 부르고 함수모임

$$\{P_r : 0 \le r < 1\}$$

을 **푸아송핵**이라 부른다.

이제, 함수 $P_r(\theta - t)$ 가 어떤 꼴일까 생각해 보자. 우선 등식 (5) 가 해석함수 $f(z) = z^n$ 에 대하여 성립하므로 다음

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} P_r(\theta - t)dt = r^n e^{in\theta}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

이 성립한다. 그런데, 등식 (5) 의 실수부와 허수부를 비교하여 보면, 이 등식이 해석함수 $f(z) = u(z) + iv(z)$ 의 실수부 $u(z)$ 와 허수부 $v(z)$ 에 대하여 성립함을 알 수 있다. 따라서, 등식 (5) 는 해석함수 $f(z)$ 의 켤레 $\overline{f(z)} = u(z) - iv(z)$ 에 대해서도 성립한다. 등식 (5) 에 함수 $f(z) = \overline{z^n}$ 를 넣으면

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} P_r(\theta - t)dt = r^{|n|} e^{in\theta}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6}$$

을 얻는다. 따라서, $P_r(\theta - t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta - t)}$ 이 되리라 짐작할 수 있다. 실제 계산하여 보면

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(e^{int} + e^{-int}\right) = 1 + 2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} \\ &= 1 + 2\mathrm{Re}\,\frac{re^{it}}{1 - re^{it}} = \mathrm{Re}\,\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} = P_r(t)\end{aligned} \tag{7}$$

가 됨을 확인할 수 있다. 이제 등식 (4) 와 (7) 을 이용하면 푸아송핵의 다음 성질들

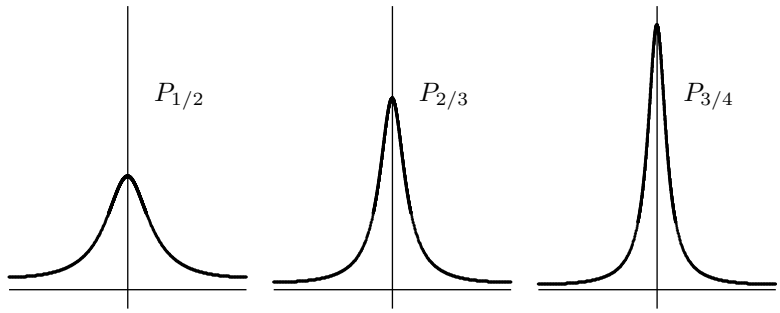
(푸1) 각 $r \in [0, 1)$ 에 대하여 $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 1$ 이고 $P_r(t) > 0$ 이다,

(2) Siméon–Denis Poisson (1781∼1840), 프랑스 수학자. 주로 École Polytechnique 에서 공부하고 활동하였다.

(푸2) P_r 은 짝함수이고, $0 < s < |t| \le \pi$ 이면 $P_r(t) < P_r(s)$ 이다,
(푸3) 각 $\delta \in (0, \pi)$ 에 대하여 $\lim_{r \to 1} \max\{P_r(t) : |t| \ge \delta\} = 0$ 이다

을 바로 확인할 수 있다. 이러한 성질들은 연속함수의 푸리에급수를 다루는 데에 결정적인 역할을 하는 페제르핵(3)의 성질들과 거의 유사함을 알 수 있다.

문제 6.1.3. (푸1) ∼ (푸3) 을 증명하여라.



이제, 단위원판 $\Delta = D(0,1)$ 의 경계 $\partial\Delta$ 위에서 정의된 연속함수 $u(e^{it})$ 에 대하여 디리끌렛 문제를 풀려면, 푸아송 적분공식을 고려하여 당연히 다음

$$U(re^{i\theta}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u(e^{it})dt, & 0 \le r < 1 \\ u(e^{i\theta}), & r = 1 \end{cases} \tag{8}$$

과 같이 정의해야 할 것이다. 그런데, 등식 (7) 에 의하여 함수 $U(z)$ 는 다음 함수

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + re^{i(\theta - t)}}{1 - re^{i(\theta - t)}}\, u(e^{it})dt$$

(3) 페제르핵에 관한 내용은 참고문헌 [2], 9.3 절을 참고하라.
Lipót Fejér (1880∼1959), 헝가리 수학자. 부다페스트와 베를린에서 공부한 뒤 부다페스트에서 활동하였다.

의 실수부이다. 따라서, 함수 $F(z)$ 가 해석함수임을 보이면 $U(z)$ 는 조화함수가 된다. 이제 $z = re^{i\theta}$ 라 두면

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, u(e^{it})dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+ze^{-it})\cdot ie^{it}}{e^{it}-z}\, u(e^{it})dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{z}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{u(\zeta)/\zeta}{\zeta - z}\, d\zeta \end{aligned}$$

이므로 정리 4.3.2 에 의하여 $F(z)$ 는 해석함수이고, 따라서 $U(z)$ 는 조화함수이다. 정리 4.3.2 에서도 그렇거니와 지금까지 논의한 내용은 u 가 연속함수라는 데에 크게 구애받지 않는다. 실제 u 가 적분하는 데에 지장이 없을 정도의 함수, 예를 들어서 불연속점이 유한개인 유계함수이면 (8) 에 의하여 정의된 함수는 항상 조화함수가 된다.

이제, u 가 연속이면 U 도 연속임을 보이는데, 기호를 간편하게 하기 위하여 $z = 1$ 에서 연속임을 증명하기로 한다. 집합 X 위에서 정의된 함수 u 가 점 $z_0 \in X$ 에서 **연속**이라는 것은, 임의의 양수 $\epsilon > 0$ 에 대하여 다음 성질

$$z \in X,\ |z - z_0| < \delta \implies |u(z) - u(z_0)| < \epsilon$$

을 만족하는 양수 $\delta > 0$ 가 존재한다는 뜻이다.

먼저 양수 $\epsilon > 0$ 를 고정한다. 함수 u 가 $z = 1$ 에서 연속이므로 다음 성질

$$|t| < \delta \implies |u(e^{it}) - u(1)| < \frac{1}{3}\epsilon$$

을 만족하는 양수 $\delta > 0$ 를 잡을 수 있다. 푸아송핵의 성질 (푸1) 을 이용하여 계산하면

$$\begin{aligned} U(re^{i\theta}) - u(1) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u(e^{it})dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(1)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\le\delta} P_r(\theta - t)[u(e^{it}) - u(1)]dt \\ &\qquad + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\ge\delta} P_r(\theta - t)[u(e^{it}) - u(1)]dt \end{aligned}$$

이 된다. 함수 $|u|$ 의 최대값을 M 이라 하고 (푸3) 을 이용하면 다음 성질

$$R < r < 1,\ |\theta| < \frac{\delta}{2} \implies P_r(\theta) < \frac{\epsilon}{3M}$$

을 만족하는 $R \in (0,1)$ 을 잡을 수 있다. 이제 $R < r < 1$ 이고 $|\theta| < \dfrac{\delta}{2}$ 이면

$$\begin{aligned} |U(re^{i\theta}) - u(1)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\le\delta} P_r(\theta - t)\,\frac{\epsilon}{3}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\ge\delta}\frac{\epsilon}{3M}\,2M\,dt \\ &\le \frac{\epsilon}{3} + \frac{2}{3}\,\epsilon = \epsilon \end{aligned}$$

이 되어서 $U(z)$ 가 $z = 1$ 에서 연속임을 알게 된다. 함수 U 의 연속성을 증명하는 이러한 방법은 푸리에 해석을 비롯한 해석학 전반에 걸쳐서 전형적으로 사용되는 방법이다. 지금까지 논의한 내용을 정리하면 다음과 같다.

정리 6.1.3. 단위원판의 경계 $\partial\Delta$ 위에서 정의된 연속함수 $u : \partial D \to \mathbb{R}$ 에 대하여 함수 $U : \overline{D} \to \mathbb{R}$ 를 (8) 과 같이 정의하면, $U(z)$ 는 세 성질 (디1) $\sim$ (디3) 를 만족한다.

보기 2. 함수 $u(e^{i\theta}) = \mathrm{Re}\, e^{in\theta} = \cos n\theta$ 에 대하여 지금까지 논의한 바를 알아보자. 이 경우 등식 (6) 을 적용하면

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\mathrm{Re}\, e^{in\theta}dt = \mathrm{Re}\,(r^{|n|}e^{in\theta}) = r^{|n|}\cos n\theta$$

이다. 만일 $u(e^{i\theta}) = \mathrm{Re}\,(-ie^{in\theta}) = \sin n\theta$ 라면 $U(re^{i\theta}) = r^{|n|}\sin n\theta$ 이다. 그런데, 푸리에 해석의 폐제를 정리를 이용하면 임의의 연속함수 u 에 대하여

$$\lim_{N\to\infty}\max\left\{\left|u(e^{i\theta}) - \sum_{n=0}^{N}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)\right| : \theta \in \mathbb{R}\right\} = 0$$

을 만족하는 $\{a_n, b_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ 를 잡을 수 있다.(4) 다시 말하여 $\partial\Delta$ 위에서 정의된 임의의 연속함수는 다음 꼴

$$u(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

로 주어지는데, 이 경우 조화함수의 최대값원리를 적용하면 이 연속함수에 대한 디리끌렛 문제의 해는

$$U(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

이 된다. □

6.2. 등각사상과 디리끌렛 문제

임의의 조르당영역 위에서 디리끌렛 문제를 풀려면 이 영역과 열린 단위원판 사이에 전단사 해석함수를 찾는 것이 중요하다. 이 절에서는 먼저 이러한 전단사 해석함수의 성질을 공부하고, 이러한 전단사 해석함수와 디리끌렛 문제의 해결이 어떤 관련을 가지는가 알아본다. 주어진 함수가 단사인가 하는 문제는 실함수의 경우와 마찬가지로 미분계수가 0 인가 하는 문제와 관련이 깊다.

영역 Ω 에서 정의된 해석함수 $\phi(\zeta)$ 가 주어지면, 함수 $\phi'(\zeta) - \phi'(z_0)$ 의 원시함수가 $\phi(\zeta) - \phi'(z_0)\zeta$ 이므로, 정리 4.1.1 에 의하여 다음 등식

$$\phi(w) - \phi(z) - \phi'(z_0)(w - z) = \int_z^w (\phi'(\zeta) - \phi'(z_0))d\zeta$$

을 얻는다. 따라서, 열린원판 $D = D(z_0, r) \subset \Omega$ 를 잡고

$$M_r = \max\{|\phi'(\zeta) - \phi'(z_0)| : \zeta \in \partial D(z_0, r)\}$$

(4) 참고문헌 [2], 9.3 절을 참고하라.

이라 두면, 임의의 $z, w \in D$ 에 대하여 부등식

$$\left|\frac{\phi(w)-\phi(z)}{w-z}-\phi'(z_0)\right| \le \frac{1}{|w-z|}\int_z^w |\phi'(\zeta)-\phi'(z_0)||d\zeta| \le M_r$$

이 성립한다. 이제, $\phi'(z) \neq 0$ 이면 ϕ' 의 연속성에 의하여 $M_r < |\phi'(z_0)|$ 인 $r > 0$ 을 잡을 수 있다. 만일 $w, z \in D$ 에 대하여 $w \neq z$ 와 $\phi(w) = \phi(z)$ 가 동시에 성립하면 $|\phi'(z_0)| \le M_r < |\phi'(z_0)|$ 가 되어 모순이다. 따라서, 함수 $\phi(z)$ 는 열린원판 $D(z_0, r)$ 위에서 단사함수임을 알 수 있고, 다음이 증명되었다.

정리 6.2.1. 영역 Ω 위에서 정의된 해석함수 $\phi(z)$ 와 $z_0 \in \Omega$ 가 주어져 있다. 만일 $\phi'(z_0) \neq 0$ 이면, 함수 ϕ 는 적절한 열린원판 $D(z_0, r)$ 위에서 단사함수이다.

한 가지 주의할 점이 있다. 함수 $\phi(z) = e^z$ 에서 보듯이 $\phi' \neq 0$ 이라도 정의역 전체에서 단사함수일 필요는 없다는 것이다. 물론 주어진 점 z_0 를 중심으로 너비가 2π 인 수평띠 $\{z : \operatorname{Im} z_0 - \pi < \operatorname{Im} z < \operatorname{Im} z_0 + \pi\}$ 를 잡으면 이는 z_0 의 근방이 되고 이 위에서 함수 $\phi(z) = e^z$ 는 전단사함수이다.

이 정리는 멱급수전개 $\phi(z) = \sum_n a_n(z-z_0)^n$ 를 이용하여 증명할 수도 있는데, 계산의 편의를 위하여 $z_0 = 0$ 이라 가정하고 증명하자. 만일 $\phi'(0) = a_1 \neq 0$ 이면 함수 $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|t^{n-1}$ 의 연속성에 의하여 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} < |a_1|$ 을 만족하는 $r > 0$ 을 잡을 수 있다. 이제 함수 $\phi(z)$ 가 $D(0, r)$ 위에서 단사함수임을 보이자. 만일 $z, w \in D(0, r)$ 이고 $\phi(z) = \phi(w)$ 이라면

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z^n - w^n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-w)(z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + w^{n-1})$$

이 성립한다. 만일 $z \neq w$ 이면

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + w^{n-1}) = -a_1$$

이고, 따라서 $|z|, |w| < r$ 에 의하여

$$|a_1| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} < |a_1|$$

이 되어 모순이다.

문제 6.2.1. 멱급수전개에 의한 정리 6.2.1 의 증명에서 일반적인 경우를 마무리하여라.

위 두 가지 증명에서 보듯이 도함수의 연속성이 증명에서 큰 역할을 하였다. 실함수의 경우 그 도함수가 연속이면 마찬가지 정리가 성립하지만 일반적으로 그렇지 못하다.

보기 1. 함수 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 을 다음

$$\phi(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

과 같이 정의하자. 이 때, $\phi'(0) = 0$ 이므로 $\alpha \neq 0$ 를 택하고 $\psi(x) = \phi(x) + \alpha x$ 라 두면 $\psi'(0) = \alpha \neq 0$ 이다. 그러나, $\alpha \in \mathbb{R}$ 가 충분히 작으면 ψ 는 0 을 포함하는 어떤 구간에서도 단사함수가 아니다. □

문제 6.2.2. 어떤 α 에 대하여 함수 $\psi(x) = \phi(x) + \alpha x$ 가 0 근방에서 단사함수인지 조사하여라.

이제는 $\phi'(z_0) = 0$ 인 경우 어떠한 일이 일어나는지 알아보는데, $\phi(z)$ 가 상수함수는 아니라고 가정한다. 이 경우, 다음 함수

$$\phi(z) - \phi(z_0) = \frac{\phi''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

는 n-중근을 가진다 (단, $n \geq 2$). 또한 항등정리에 의하여 $\phi(z) - \phi(z_0)$ 와 $\phi'(z)$ 는 적절한 원판 $\overline{D} = \overline{D}(z_0, r)$ 위에서 $z = z_0$ 이외의 근을 가지

지 않는다. 이제 $m = \min\{|\phi(z)-\phi(z_0)| : z \in \partial\overline{D}\}$ 라 두고, $0 < |\alpha| < m$ 인 $\alpha \in \mathbb{C}$ 를 택하여

$$\psi(z) = \phi(z) - \phi(z_0) - \alpha$$

라 정의하자. 그러면 $z \in \partial\overline{D}$ 에 대하여

$$|(\phi(z) - \phi(z_0)) - \psi(z)| = |\alpha| < m \leq |\phi(z) - \phi(z_0)|$$

가 성립하므로 루셰 정리에 의하여 $\psi(z)$ 는 열린원판 $D = D(z_0, r)$ 위에서 $\phi(z) - \phi(z_0)$ 와 같이 n 개의 근을 가진다. 그런데 $D \setminus \{z_0\}$ 위에서 $\psi'(z) = \phi'(z) \neq 0$ 이고 $\psi(z_0) \neq 0$ 이므로 $\psi(z)$ 는 D 안에서 중근을 가지지 않는다. 따라서, 함수 $\psi(z)$ 는 D 위에서 서로 다른 n 개의 근을 가진다. 즉,

$$\phi(z_1) = \phi(z_2) = \cdots = \phi(z_n) = \phi(z_0) + \alpha, \qquad z_i \neq z_j \ (i \neq j)$$

를 만족하는 $z_1, \ldots, z_n \in D$ 를 잡을 수 있고, 따라서 다음을 얻는다.

정리 6.2.2. 영역 Ω 위에서 정의된 해석함수 $\phi(z)$ 가 상수함수가 아니라 하자. 만일 함수 $\phi(z)$ 가 $z = z_0$ 에서 n-중근을 가지면 다음 성질

- 만일 $|\alpha| < m$ 이면 $\phi^{-1}(\{\phi(z_0) + \alpha\})$ 는 n 개의 점을 가진다.

을 만족하는 양수 $m > 0$ 을 잡을 수 있다.

요는, n-중근을 가지는 점 근방에서는 함수 $\phi(z)$ 가 n 대 1 함수가 된다는 말이다. 예로서, 함수 $\phi(z) = z^n$ 을 생각해 보면 된다. 만일 함수 $\phi(z)$ 가 영역 Ω 위에서 단사함수라면 당연히 $\phi' \neq 0$ 이다. 이 역시 실함수 $\phi(x) = x^3$ 를 생각하면 실함수에서는 성립하지 않는 것이다.

문제 6.2.3. 해석함수 $\phi(z)$ 가 $z = z_0$ 에서 중근을 가질 필요충분조건은 $\phi'(z_0) = 0$ 임을 보여라.

정리 6.2.3. (역함수정리) 영역 Ω 위에서 정의된 해석함수 $\phi(z)$ 가 단사사상이면, 임의의 $z \in \Omega$ 에 대하여 $\phi'(z) \neq 0$ 이다. 또한, 역함수 $\psi : \phi(\Omega) \to \Omega$ 도 해석함수이다.

증명: 지금까지 논의한 바에 의하여 단사사상이면 $\phi' \neq 0$ 이고, 열린사상정리에 의하여 $\phi(\Omega)$ 는 다시 영역이다. 우선 ψ 가 $\phi(\Omega)$ 에서 연속임을 증명한다. 이를 위해서, Ω 안의 수열 $\langle a_n \rangle$ 과 $a \in \Omega$ 에 대하여 다음

$$\phi(a_n) \to \phi(a) \implies a_n \to a$$

을 보이면 된다. 열린원판 $D = D(a, r) \subset \Omega$ 를 하나 잡자. 열린사상정리에 의하여 $\phi(D)$ 는 $\phi(a)$ 를 포함하는 열린 집합이고 $\phi(a_n) \to \phi(a)$ 이므로, 충분히 큰 모든 n 에 대해서 $\phi(a_n) \in \phi(D)$ 이고, 따라서 $a_n \in D$ 이다. 원판 D 를 아무리 작게 잡아도 같은 일이 일어나므로, n 이 증가함에 따라 a_n 이 a 에 임의로 가까워짐을 알 수 있다. 이제 $\phi(z_0) = w_0$ 라 하면

$$\frac{\psi(w) - \psi(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{\phi(z) - \phi(z_0)}$$

가 되고, 따라서, $\psi'(w_0) = \dfrac{1}{\phi'(z_0)}$ 이다. □

만일 $\phi'(z_0) \neq 0$ 이면 함수 $\phi(z)$ 는 일차함수 $\phi(z_0) + \phi'(z_0)(z - z_0)$ 와 유사하게 된다. 그런데 일차함수는 결국 평행이동, 확대, 회전이므로 $\phi(z)$ 도 $z = z_0$ 근방에서는 확대와 회전과 유사하게 된다. 특히, $z = z_0$ 를 중심으로 각도를 그리면 그 상도 같은 각도를 유지하게 될 것이다. 이러한 의미에서 $\phi' \neq 0$ 인 함수를 **등각사상**이라 부른다. 만일 $\phi'(z_0) \neq 0$ 이고 $z(t)$ 가 $z(t_0) = z_0$ 인 곡선이라면, 다음

$$\arg \frac{d(\phi \circ z)}{dt}(t_0) = \arg \left[\phi'(z_0) \cdot \frac{dz}{dt}(t_0) \right] = \arg \phi'(z_0) + \arg \frac{dz}{dt}(t_0)$$

이 성립한다. 따라서, 만일 $w(t)$ 가 $w(t_0) = z_0$ 인 또 다른 곡선이라면 두 곡선 사이의 각도는

$$\arg \frac{dw}{dt}(t_0) - \arg \frac{dz}{dt}(t_0) = \arg \frac{d(\phi \circ w)}{dt}(t_0) - \arg \frac{d(\phi \circ z)}{dt}(t_0)$$

인데, 이는 바로 두 곡선의 상 $(\phi \circ z)(t)$ 와 $(\phi \circ w)(t)$ 사이의 각도이다. 즉, 등각사상은 두 곡선 사이의 각도를 보존하는 사상이다.

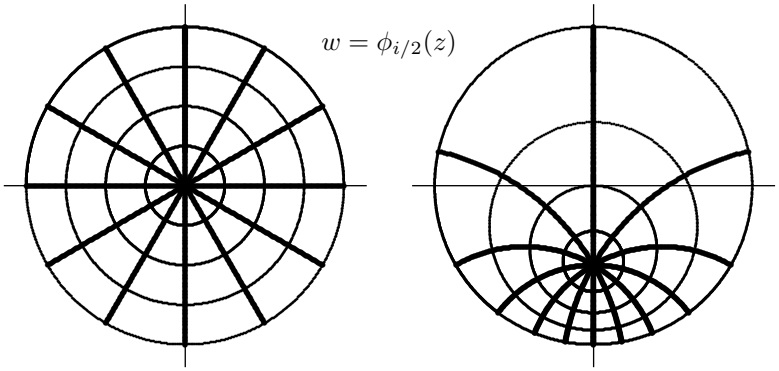
지난 1.3 절에서 살펴본 일차분수함수 $\phi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 는 등각사상의 대표적인 예이다. 실제로 계산하여 보면

$$\phi'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

인데, 상수함수가 되는 경우, 즉 $ad - bc = 0$ 인 경우를 제외하면 영역 $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ 에서 $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ 로 가는 등각사상이다. 특히, 지난 1.3 절에서 살펴본 뫼비우스변환

$$\phi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$$

은 열린 단위원판 Δ 사이에 정의된 등각사상이다.



정리 6.2.4. (슈바르츠 도움정리) 열린 단위원판 Δ 위에서 정의된 해석함수 $\phi : \Delta \to \Delta$ 가 $\phi(0) = 0$ 이면 다음

$$|\phi(z)| \le |z|, \qquad |z| < 1 \tag{9}$$

(4) Hermann Amandus Schwarz (1843~1921), 독일 수학자. 베를린에서 공부한 뒤에 Göttingen 과 베를린 등지에서 활동하였다.

이 성립한다. 만일 위 부등식에서 등호가 성립하는 $z_0 \in \Delta$ 가 있으면 $\phi(z)$ 는 $\phi(z) = e^{i\theta} z$ 의 꼴이다.

증명: 함수 $\phi(z)$ 를 멱급수로 표현하면 $\phi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ 이므로, $\phi(z) = z\psi(z)$ 의 꼴이다 (단, $\psi(z)$ 는 해석함수). 가정에 의하여 $\phi(z) \in \Delta$, 즉 $|\phi(z)| < 1$ 이므로, 임의의 $r < 1$ 에 대하여

$$|z| = r \implies |\psi(z)| = \frac{|\phi(z)|}{|z|} \le \frac{1}{r}$$

이 성립한다. 여기서 최대절대값정리를 적용하면

$$|z| \le r \implies |\psi(z)| \le \frac{1}{r}$$

이다. 이 명제가 임의의 $r < 1$ 에 대하여 성립하므로 각 $z \in \Delta$ 에 대하여 $|\psi(z)| \le 1$ 이고, 따라서 (9) 를 얻는다. 만일 $|\phi(z_0)| = |z_0|$ 가 성립하는 $z_0 \in D$ 가 있다면 $|\psi(z)|$ 는 $z = z_0$ 에서 최대값 1 을 가지고, 다시 최대절대값정리에 의하여 ψ 는 상수함수이므로 $\psi(z) = e^{i\theta}$ 이다. 따라서, $\phi(z) = e^{i\theta} z$ 이다. □

다음 정리는 열린 단위원판 사이의 전단사 등각사상이 회전변환과 뫼비우스변환, 혹은 이 두 가지의 합성뿐임을 말하고 있다.(5)

정리 6.2.5. 열린 단위원판 Δ 사이에 정의된 전단사 등각사상은

$$\phi(z) = e^{i\theta}\phi_\alpha(z) = e^{i\theta}\frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$$

의 꼴이다 (단, $\theta \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < 1$).

증명: 만일 $\phi : \Delta \to \Delta$ 가 전단사 등각사상이면 $\phi(\alpha) = 0$ 인 $\alpha \in \Delta$ 를 잡을 수 있다. 그러면 $\psi = \phi \circ \phi_\alpha^{-1} : \Delta \to \Delta$ 역시 전단사 등각사상인데 0 을 0 으로 보낸다. 따라서, 슈바르츠 도움정리를 적용하면 $z \in \Delta$

(5) 연습문제 1.4.12 를 참조하라.

대하여 $|\psi(z)| \le |z|$ 이다. 한편 $\psi^{-1} : \Delta \to \Delta$ 역시 0 을 0 으로 보내므로 $|\psi^{-1}(z)| \le |z|$ 이다. 따라서, 다음

$$|z| = |\psi^{-1}(\psi(z))| \le |\psi(z)| \le |z|, \qquad z \in \Delta$$

을 얻는데, 이로부터 $|\psi(z)| = |z|$ 이고 다시 슈바르츠 도움정리에 의하여 $\phi(\phi_\alpha^{-1}(z)) = \psi(z) = e^{i\theta}z$ 이다. 이 등식에서 z 에 $\phi_\alpha(z)$ 를 대입하여 원하는 결과를 얻는다. □

$$\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, shift left, "\phi_\alpha"] & \Delta \\
\Delta \arrow[u, shift left, "\phi_\alpha^{-1}"] \arrow[ur, "\psi(z) = e^{i\theta}z"'] &
\end{tikzcd}$$

주어진 단순연결영역 Ω 에서 열린 단위원판 Δ 로 가는 전단사 등각사상 $\phi : \Omega \to \Delta$ 를 하나 찾았다고 하자. 만일 $\psi : \Omega \to \Delta$ 가 전단사 등각사상이면 $\psi \circ \phi^{-1} : \Delta \to \Delta$ 가 등각사상이고 정리 6.2.5 에 의하여 $\psi(\phi^{-1}(z)) = e^{i\theta}\phi_\alpha(z)$ 이다. 따라서, 임의의 등각사상 $\psi : \Omega \to \Delta$ 는 다음

$$\psi(z) = e^{i\theta}\phi_\alpha(\phi(z)) = e^{i\theta}\frac{\phi(z) - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\phi(z)}, \qquad z \in \Omega$$

의 꼴이다.

$$\begin{tikzcd}
 & \Delta \arrow[dd, "(\psi \circ \phi^{-1})(z) = e^{i\theta}\phi_\alpha(z)"] \\
\Omega \arrow[ur, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \\
 & \Delta
\end{tikzcd}$$

영역 Ω 의 한 점 $a \in \Omega$ 가 주어졌을 때, $\alpha = \phi(a)$ 라 두면

$$\psi(a) = 0, \qquad \psi'(a) = e^{i\theta}\phi'(a)(1 - |\alpha|^2)$$

이다. 따라서,

$$\rho(z) = \frac{1}{\epsilon^{i\theta}\phi'(a)}\psi(z) = \frac{1}{\phi'(a)} \cdot \frac{\phi(z) - \phi(a)}{1 - \overline{\phi(a)}\phi(z)}, \qquad z \in \Omega$$

라 두면, 다음 조건

$$\rho(a) = 0, \qquad \rho'(a) > 0 \tag{10}$$

을 만족하는 전단사 등각사상 $\rho : \Omega \to \Delta$ 를 얻는다. 이 때, $\arg \rho'(a) = 0$ 이므로, 등각사상 ρ 는 점 $a \in \Omega$ 를 지나는 곡선의 접선방향을 그대로 유지한다. 만일 전단사 등각사상 ρ_1 과 ρ_2 가 조건 (10) 을 만족하면,

$$(\rho_2 \circ \rho_1^{-1})(0) = 0, \qquad (\rho_2 \circ \rho_1^{-1})'(0) = \frac{\rho_2'(a)}{\rho_1'(a)} > 0$$

이므로 정리 6.2.5 에 의하여 $(\rho_2 \circ \rho_1^{-1})(z) = z$ 이고, 따라서 $\rho_1(z) = \rho_2(z)$ 임을 알 수 있다. 그러므로, 한 점 $a \in \Omega$ 가 주어졌을 때 조건 (10) 을 만족하는 전단사 등각사상 $\rho : \Omega \to \Delta$ 는 기껏해야 하나뿐이다.

이제부터, 주어진 조르당영역 Ω 에서 디리끌렛 문제를 푸는 것과 전단사 등각사상 $\phi : \Omega \to \Delta$ 를 찾는 것이 어떻게 관련되는지 알아보기로 한다. 이를 위하여, 먼저 임의의 연속함수 $u : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ 에 대해서 디리끌렛 문제의 해가 존재한다고 가정해 보자.

한 점 $a \in \Omega$ 를 고정하고, 각 $z \in \partial\Omega$ 에 대해서 $u(z) = \log|z - a|$ 라 정의하면, $u : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ 는 연속함수이다. 이 함수에 대한 디리끌렛 문제의 해를 $U : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ 이라 하면, U 는 $\overline{\Omega}$ 위에서 연속이고, Ω 위에서 조화함수이며, 또한 각 $z \in \partial\Omega$ 에 대하여 $U(z) = u(z) = \log|z - a|$ 이다. 그런데 Ω 가 단순연결영역이므로 정리 6.1.1 에 의하여 $\operatorname{Re} f = U$를 만족하는 해석함수 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 가 존재하는데, 적절한 순허수를 더하여 $\operatorname{Im} f(a) = 0$ 가정할 수 있다. 이제, 함수 $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ 를

$$\phi(z) = (z - a)e^{-f(z)}, \qquad z \in \Omega$$

로 정의하자. 이 함수는 Ω 위에서 해석적이고, $\phi(a) = 0$ 및 $\phi'(a) > 0$ 을 만족한다. 우선 $\log|\phi(z)| = \log|z - a| - U(z)$ 는 $\Omega \setminus \{a\}$ 에서 조화함수이고, 각 $z \in \partial\Omega$ 에 대하여 $\log|\phi(z)| = 0$ 이다. 양수 $\epsilon > 0$ 을 충분히 작게 잡으면 집합 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| \le \epsilon\}$ 이 Ω 에 포함되고 이 집

합에서 $\log|\phi(z)|$ 의 값이 0 보다 작게 할 수 있다. 이 사실과 조화함수의 최대값원리로부터 각 $z \in \Omega \setminus \{a\}$ 에 대해서 $\log|\phi(z)| < 0$ 이 성립함을 알 수 있다. 따라서 $|\phi(z)| < 1$ 이므로 ϕ 는 Ω 에서 Δ 로 가는 해석함수이다. 끝으로 $\phi : \Omega \to \Delta$ 가 전단사임을 보이기 위하여, $b \in \Delta$ 라 하자. 부등식 $|b| < r < 1$ 을 만족하는 실수 r 을 하나 택한 다음, $D = \{z \in \Omega : |\phi(z)| < r\}$ 라 두자. 그러면 D 안에 함수 $\phi(z) - b$ 의 근이 정확히 한 개 있음을 보이면 된다. 해석함수 ϕ 의 도함수는 ∂D 에서 유한개의 근을 가지므로 ∂D 는 조각 C^1-곡선들로 이루어져 있고, 특히 D 는 닫힌곡선 ∂D 의 내부로 이루어진 영역들의 합집합이다. 이제, 각 $z \in \partial D$ 에 대하여 $|\phi(z)| = r$ 이므로

$$|\phi(z) - (\phi(z) - b)| = |b| < r = |\phi(z)|, \qquad z \in \partial D$$

이 성립한다. 이 부등식과 루셰 정리로부터 두 함수 ϕ 와 $\phi - b$ 는 D 안에서 같은 개수의 근을 가진다. 함수 ϕ 가 D 에서 정확히 한 개의 근을 가지므로 $\phi : \Omega \to \Delta$ 는 전단사 등각사상이다. 위 논증 과정에서 ∂D 가 조각 C^1-곡선들로 이루어져 있고 D 가 영역들의 합집합이라 하였으나, 결국 ϕ 가 전단사 등각사상이므로 실제로 ∂D 가 한 개의 C^1-곡선으로 이루어진 단일폐곡선이고 D 는 한 개의 영역으로 이루어져 있다.

이제, 디리끌렛 문제와 등각사상의 관련을 보다 분명하게 파악하기 위하여 조르당영역 Ω 에 관한 다음 두 명제

(디리) 임의의 연속함수 $u : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ 에 대해서 디리끌렛 문제의 해가 존재한다,

(등각) 임의의 $a \in \Omega$ 에 대해서 $\phi(a) = 0$ 및 $\phi'(a) > 0$ 을 만족하는 전단사 등각사상 $\phi : \Omega \to \Delta$ 가 유일하게 존재한다

를 같이 생각하여 보자. 지금까지 위에서 논증한 것은 다음

- 조르당영역 Ω 에 대하여 (디리) 가 성립하면 (등각) 도 성립한다

을 증명한 것이다. 그 반대 방향, 다시 말하여 (등각) 이 성립한다 가정하고 (디리) 를 증명하는 것은 이 책의 수준을 넘지만, 개략적인 방법을 소개한다. 먼저, 가정 (등각) 에 의하여 Ω 에서 Δ 로 가는 전단사 등각사상 ϕ 가 하나 존재한다. 그런데, 조르당영역 Ω 에서 Δ 로 가는 전단사 등각사상은 $\overline{\Omega}$ 에서 $\overline{\Delta}$ 로 가는 전단사 연속사상으로 확장되며, 확장된 사상의 역사상도 연속임이 잘 알려져 있다. 이제, 연속함수 $u : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ 가 주어지면, $u \circ \phi^{-1}$ 가 $\partial\Delta$ 위에서 연속이다. 단위원판에서는 모든 디리끌렛 문제가 해를 가지므로, 연속함수 $\widetilde{U} : \overline{\Delta} \to \mathbb{C}$ 가 존재하여 Δ 위에서 조화함수이고, $|z| = 1$ 위에서 $\widetilde{U}(z) = u \circ \phi^{-1}(z)$ 이다. 그러면 $U = \widetilde{U} \circ \phi$ 가 주어진 디리끌렛 문제의 해임을 쉽게 알 수 있다.

사실 (등각) 및 (디리) 는 조르당영역보다 훨씬 일반적인 영역에서 성립함이 잘 알려져 있지만 이에 대한 체계적인 공부는 이 책의 수준을 넘는다. 예를 들어서 임의의 단순연결영역에서 디리끌렛 문제가 풀린다는 것이 잘 알려져 있으며, 보다 일반적인 영역에 대해서도 그 여집합이 너무 작지 않으면 디리끌렛 문제의 해를 찾을 수 있다. 그러나, 구멍 뚤린 열린원판 $\Delta \setminus \{0\}$ 처럼 그 여집합 $\{0\} \cup \{z : |z| \geq 1\}$ 의 조각 가운데 한 점으로 이루어진 조각이 있는 경우 디리끌렛 문제가 풀리지 않는다.(6)

한편, 전단사 등각사상의 존재에 관해서는 (등각) 이 조르당영역뿐 아니라 복소평면 전체가 아닌 임의의 단순연결영역에서 성립한다는 것이 리만 사상정리(7) 이다.

정리 6.2.6. (리만 사상정리) 복소평면의 진부분집합이며 단순연결영역인 Ω 와 한 점 $a \in \Omega$ 가 주어지면, $\phi(a) = 0$ 및 $\phi'(a) > 0$ 을 만족하는 전단사 등각사상 $f : \Omega \to \Delta$ 이 유일하게 존재한다.

(6) 연습문제 6.5.8 을 참조하라.

(7) 이 정리는 1851 년 리만에 의하여 언급되었으나, 최종적인 증명은 20 세기 들어와서 이루어졌다. 이에 대한 역사는 [24], 8.3 절을 참조하라.

만일 $\Omega = \mathbb{C}$ 가 복소평면 전체라면 Ω 에서 Δ 로 가는 해석함수는 리우비유 정리에 의해서 상수함수 뿐이므로, 리만 사상정리에서 Ω 가 복소평면의 진부분집합이라는 가정이 필요하다.

6.3. 여러 가지 등각사상

이 절에서는 여러 가지 단순연결영역 Ω 에 대하여 전단사 등각사상 $\phi : \Omega \to \Delta$ 를 찾아 보자. 먼저 반평면 $H_u = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ 를 생각해 보자. 이 경우, 점 $0, 1, \infty$ 를 $-1, -i, 1$ 로 보내는 일차분수함수를 생각하면 된다. 지난 1.3 절의 공식 (17) 을 이용하면, 구하는 함수는

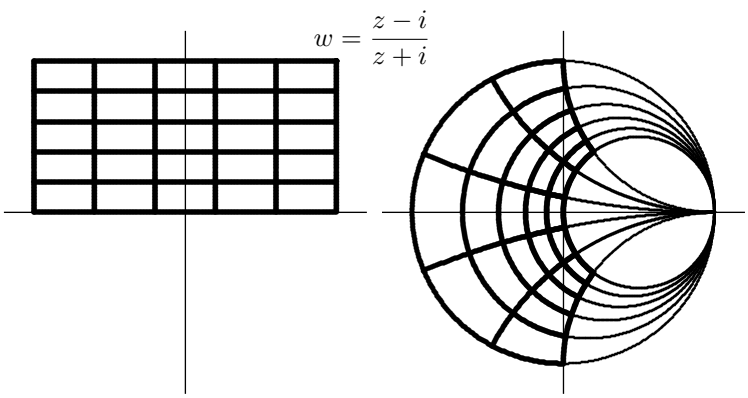
$$\frac{(w+1)(-i-1)}{(w-1)(-i+1)} = \lim_{z_3 \to \infty} \frac{(z-0)(1-z_3)}{(z-z_3)(1-0)} = z$$

에서

$$\phi(z) = w = \frac{z-i}{z+i} \tag{11}$$

를 얻는다. 이 때, $\phi(i) = 0 \in \Delta$ 이므로, 원하는 변환임을 확인할 수 있다.

문제 6.3.1. 반평면 H_u 에서 Δ 로 가는 등각사상을 모두 찾아라.



문제 6.3.2. 반평면 $H = \{(x, y) : y < x + 1\}$ 에서 Δ 로 가는 등각사상을 하나 찾아라.

일차분수함수 (11) 을 이용하면 여러 가지 등각사상을 찾을 수 있다. 예를 들어, 일사분면

$$\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$$

에서 Δ 로 가는 전단사 등각사상을 얻으려면 변환 $z \mapsto z^2$ 과 등각사상 (11) 을 합성하면 된다. 이 때, 원하는 전단사 등각사상은

$$\phi(z) = \frac{z^2 - i}{z^2 + i}$$

이다. 일차분수함수 (11) 의 역사상

$$\phi(z) = -i\frac{z+1}{z-1}$$

은 물론 열린 단위원판 Δ 를 반평면 H_u 보내는데, 이 변환도 여러 경우에 유용하게 쓰인다. 반평면 H_u 를 시계방향으로 $\dfrac{\pi}{2}$ 만큼 회전하면 또 다른 반평면

$$H_r = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$$

이 된다. 따라서, 변환

$$\phi(z) = (-i) \cdot \left(-i\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{1+z}{1-z}$$

은 열린원판 Δ 를 반평면 H_r 로 보낸다. 이 변환은 특히 반원판

$$\Delta_u = \{z \in \Delta : \operatorname{Im} z > 0\}$$

을 일사분면으로 보낸다. 이를 이용하면

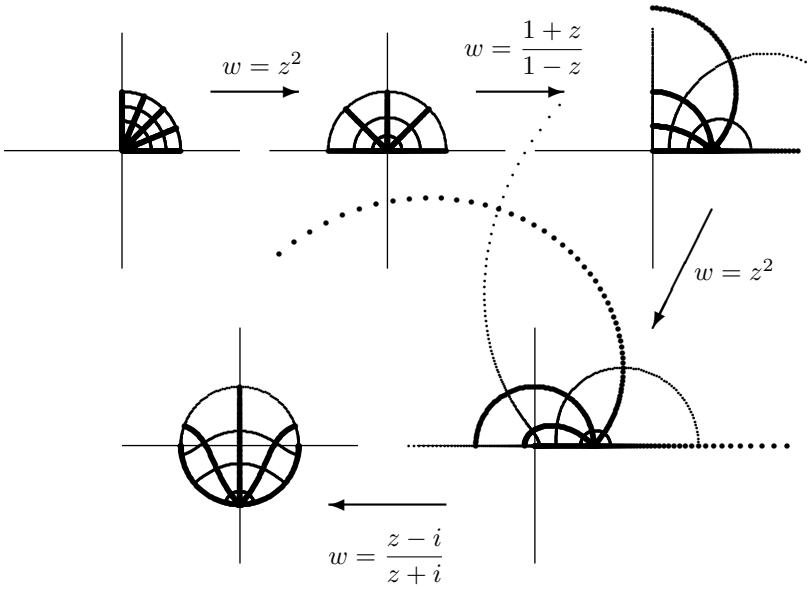
$$\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0,\ |z| < 1\}$$

를 어떻게 하면 Δ 로 보낼 수 있는지 알 수 있는데, 다음 영역

$$\Omega \to \Delta_u \to \text{일사분면} \to H_u \to \Delta$$

들을 차례로 생각하면 된다.

문제 6.3.3. 영역 $\Omega = \{z \in \Delta : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ 를 Δ 로 보내는 전단사 등각사상 ϕ 를 하나 찾아라. 이 경우 $\phi(a) = 0$ 인 $a \in \Omega$ 를 구하고 $\phi'(a)$ 의 값을 구하여라.



이제, 이차분수함수를 생각해 보는데, 가장 간단한 형태인

$$w = \phi(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \tag{12}$$

를 살펴보자. 우선 도함수를 구해 보면

$$\phi'(z) = \frac{z^2 - 1}{2z^2}$$

이므로 ϕ 는 $\mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$ 위에서 등각사상이다. 한편, 직접 계산하여 보면

$$\phi(z_1) = \phi(z_2) \iff z_1 = z_2 \text{ 혹은 } z_1 z_2 = 1 \tag{13}$$

임을 알 수 있다. 따라서, 이 변환은 단위원 내부 Δ 와 단위원 외부 $\mathbb{C}\backslash\overline{\Delta}$ 에서 한 점씩 잡은 두 점을 같은 점으로 보낸다. 이는 마치 변환 $w = z^2$ 이 원점을 중심으로 대칭되는 두 점을 같은 점으로 보내는 것과 마찬가지이다.

만일 $z = re^{i\theta}$ 라 두고, $w = u + iv$ 라 두면

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta, \qquad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

이다. 여기서, θ 와 r 을 소거하면 각각

$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1, \qquad \frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\sin^2\theta} = 1 \quad (14)$$

을 얻는다. 따라서, 단위원 안에서 원점을 중심으로 반지름이 r 인 원은 장축의 길이가 $\frac{1}{r} + r$ 이고, 단축의 길이가 $\frac{1}{r} - r$ 인 타원으로 변환된다. 그 반지름 r 이 1 에 가까울수록 납작해져서 단위원은 실수축 위의 구간 $[-1, 1]$ 로 변환되고, 그 반지름 r 이 0 에 가까울수록 둥그렇게 되면서 무한히 커진다. 또한, 원점과 $e^{i\theta}$ 사이의 선분은 쌍곡선으로 변환되는데, 한 쪽 쌍곡선의 반으로 변환된다.

문제 6.3.4. 명제 (13) 을 증명하여라. 또한, 관계식 (14) 를 유도하여라.

지금까지 논의한 것으로 미루어 함수

$$\phi : \{z : 0 < |z| < 1\} \to \mathbb{C} \setminus \{z : \operatorname{Im} z = 0,\ -1 \le \operatorname{Re} z \le 1\} \qquad (15)$$

는 전단사 등각사상이다. 이 사상은 사실 일차분수함수와 이차함수의 합성으로 이해할 수 있다. 먼저, 열린 단위원판 Δ 를 반평면 H_u 로 보내는 일차분수함수를 생각한다. 물론 (11) 에서 정의한 일차분수함수의 역함수

$$\phi_1(z) = -i\frac{z+1}{z-1}$$

를 잡으면 된다. 그 다음 변환

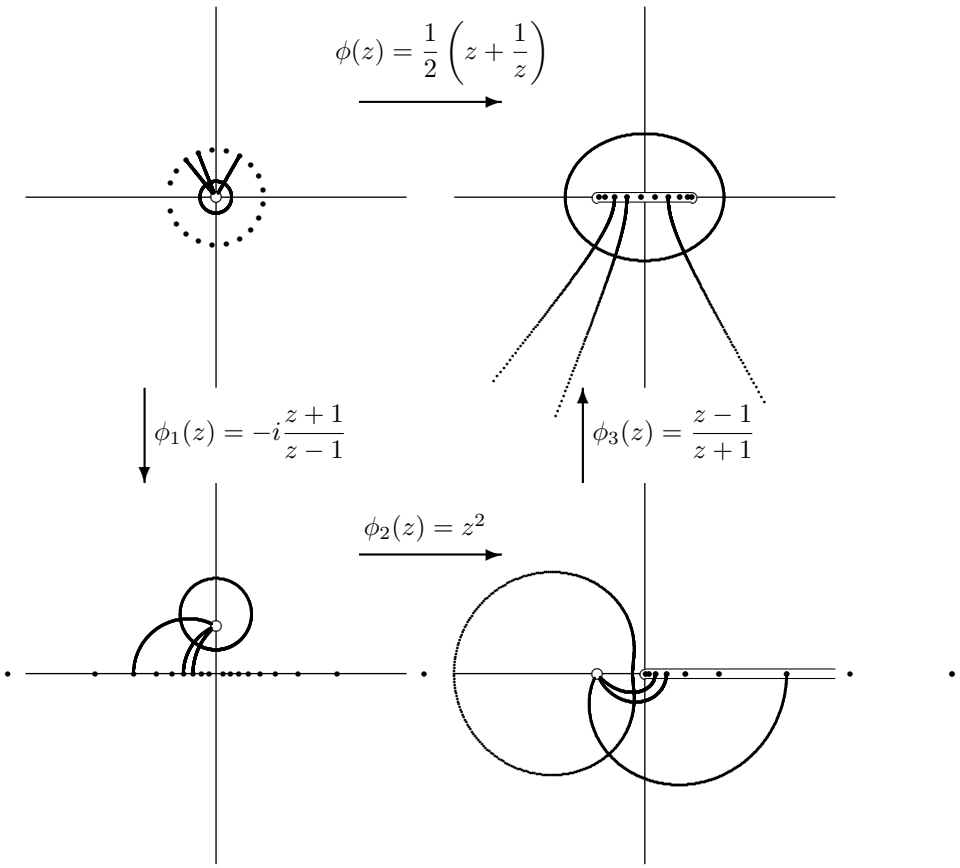
$$\phi_2 : z \mapsto z^2 : H_u \to \mathbb{C} \setminus \{z : \operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z \ge 0\}$$

을 생각한다. 이제, $\phi_2(\phi_1(0)) = \phi_2(i) = -1$ 임을 염두에 두고, 세 점 $-1, 0, \infty$ 를 $\infty, -1, 1$ 로 각각 보내는 일차분수함수

$$\phi_3(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

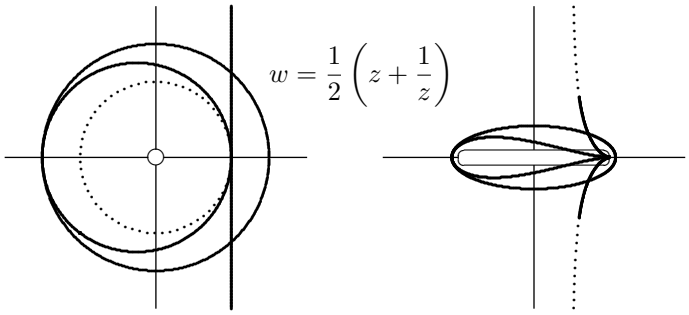
를 잡으면 $\phi = \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$ 임을 바로 확인할 수 있다.

문제 6.3.5. 등각사상 (15) 가 전사상임을 보여라. 또한, $\phi = \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$ 이 성립함을 보여라.



이차분수함수 (12) 에서, 단위원을 내부에 품는 원 C 의 상이 어떻게 변환되는지 살펴보자. 이 경우 단위원이 실수축위의 구간 $I = [-1, 1]$

로 변환되고 단위원 외부가 $\mathbb{C} \setminus I$ 로 보내지는 것을 감안하면, 원 C 와 단위원 사이의 공간이 구간 I 를 둘러싸는 모습이 되리라 집작할 수 있다. 그런데, 만일 이 원이 $f'(z)$ 의 특이점 $z = 1$ 에서 단위원과 접한다면 구하는 상은 이 점에서 뾰족한 모양이 된다.



문제 6.3.6. 이차분수함수 (12) 에서, 단위원과 $z = 1$ 에 외접하는 원은 어떤 모습으로 변환되는지 설명하고, 그림을 그려보아라.

이제, 수직 띠 모양의 영역

$$\Omega = \{z : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$$

을 어떻게 열린 단위원판 Δ 로 보내는지 알아보자. 이 경우, 간격이 π 인 수평 띠가 지수함수에 의하여 반평면으로 간다는 것이 핵심이다. 구체적으로 다음 단계를 거치면 되는데, 세 점 $0, \pm 1$ 을 고정하여야 하는 경우를 생각하자.

- iz 를 이용하여 수평 띠 $\{z : -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$ 로 보낸다.
- $\frac{\pi}{2}(z + i)$ 를 이용하여 수평 띠 $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ 로 보낸다.
- e^z 를 이용하여 반평면 H_u 로 보낸다.

이 세 단계를 거치는 동안 주어진 세 점은

$$\{-1, 0, 1\} \longrightarrow \{-i, 0, i\} \longrightarrow \{0, \frac{\pi}{2}i, \pi i\} \longrightarrow \{1, i, -1\}$$

으로 변환된다. 이제, 반평면 H_u 를 Δ 로 보내면서 세 점 $\{1, i, -1\}$ 을 $\{-1, 0, 1\}$ 로 보내려면 $\{0, i, \infty\}$ 를 $\{i, 0-i\}$ 혹은 $\{-i, 0, i\}$로 보내야 한다. 따라서, 구하는 일차분수함수는

$$w = \frac{z-i}{iz-1} = i\frac{1+iz}{1-iz}, \quad \text{혹은} \quad w = \frac{z-i}{1-iz} = -i\frac{1+iz}{1-iz}$$

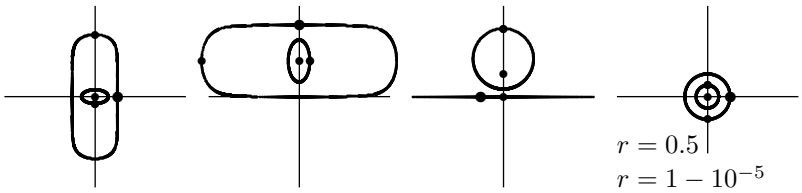
인데, 조건에 맞는 것은 전자이다. 결국, 구하는 변환은 다음 세 변환

$$\frac{\pi i}{2}(z+1), \qquad e^z, \qquad i\frac{1+iz}{1-iz}$$

의 합성인

$$w = \phi(z) = i\frac{1+ie^{(\pi i/2)(z+1)}}{1-ie^{(\pi i/2)(z+1)}} = i\frac{1-e^{\pi iz/2}}{1+e^{\pi iz/2}} = \tan\frac{\pi}{4}z$$

로 주어진다.



문제 6.3.7. 세 점 $-1, i, 1$ 을 $1, 0, -1$ 로 보내는 일차분수함수를 지난 1.3 절의 (17) 을 이용하여 구하여라.

문제 6.3.8. 변환 $w = \phi(z)$ 역변환이

$$z = \psi(w) = \frac{4}{\pi}\arctan w = \frac{2}{\pi i}\operatorname{Log}\frac{1-iw}{1+iw}$$

로 주어짐을 보여라.(8) 또한, 실수 $r \in (-1, 1)$ 에 대하여 $\psi(r)$ 과 $\psi(ir)$ 의 값을 구하여라.

(8) 연습문제 3.4.8 및 연습문제 4.5.7 을 참조하라.

6.4. 다각형과 등각사상

이 절에서는 마지막으로 삼각형이나 사각형 등 다각형과 관련된 전단사 등각사상에 대하여 알아본다. 다각형이 하나 주어졌을 때 이 다각형의 내부를 반평면 혹은 열린 단위원판으로 보내는 등각사상을 어떻게 만드는가 하는 문제는 잠시 접어두고, 무리함수의 적분으로 나타나는 함수를 생각하자. 우선 한 가지 예로서 다음 변환

$$\phi(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\zeta+1}\sqrt{\zeta}\sqrt{\zeta-1}}\, d\zeta \tag{16}$$

을 살펴보자. 여기에서 무리함수

$$z \mapsto \sqrt{z} = e^{(\log^* z)/2}$$

는 편각을 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 에서 취하는 편각의 가지를 사용한다. 그러면

$$z \mapsto \sqrt{z} : \mathbb{C} \setminus \{-it : t \geq 0\} \to \left\{ z : z \neq 0,\ -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4} \right\}$$

는 $z \mapsto z^2$ 의 역사상으로서 물론 전단사 등각사상이다. 그러면 적분값 (16) 의 피적분함수는 반평면 H_u 위에서 해석함수이므로, 임의의 $z \in H_u$ 에 대하여 적분이 잘 정의되어 $\phi(z)$ 는 H_u 위에서 해석함수이다.(9) 먼저 z 가 실수축을 따라서 양의 방향으로 움직일 때 $\phi(z)$ 가 어떻게 움직이는지 살펴보자. 이제, $z = t \in \mathbb{R}$ 이라 두면

$$\phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}\sqrt{t}\sqrt{t-1}}$$

는 t 가 속한 구간 I 에 따라서 다음 값을 가진다. 여기서 R^+ 와 R^- 는 각각 양과 음의 실수축을 나타내고, I^+ 와 I^- 는 양과 음의 허수축을 각각 나타낸다.

---

(9) 특이적분 $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$ 가 유한값임을 유의하라.

	$(-\infty,-1]$	$[-1,0]$	$[0,1]$	$[1,\infty)$
$1/\sqrt{t+1}$	I^-	I^-	I^-	R^+
$1/\sqrt{t}$	I^-	I^-	R^+	R^+
$1/\sqrt{t-1}$	I^-	R^+	R^+	R^+
$\phi'(t)$	I^+	R^-	I^-	R^+

따라서, t 가 실수축을 양의 방향으로 움직이는 동안 $\phi(t)$ 는 복소평면을 위로, 좌로, 아래로, 우로 움직임을 알 수 있다.

이제, $\phi(t)$ 의 값을 구체적으로 알아보자. 만일 $0 \le t \le 1$ 이면 각 $r \in [0,t]$ 에 대하여 $r(r^2-1) \le 0$ 이므로

$$\phi(t) = -i\int_0^t \frac{dr}{\sqrt{r(1-r^2)}}$$

이다. 한편 $t \ge 1$ 이면

$$\phi(t) = -i\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{r(1-r^2)}} + \int_1^t \frac{dr}{\sqrt{r(r^2-1)}}$$

임을 알 수 있다. 마찬가지로 $t \le 0$ 이면

$$\phi(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{-t} \frac{dr}{\sqrt{r(1-r^2)}}, & -1 \le t \le 0 \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{r(1-r^2)}} - i\int_1^{-t} \frac{dr}{\sqrt{r(r^2-1)}}, & -\infty < t \le -1 \end{cases}$$

가 된다. 이제,

$$\kappa = \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{r(1-r^2)}}$$

라 두자. 여기서 $r = \dfrac{1+s}{1-s}$ 로 치환하면

$$\int_1^\infty \frac{dr}{\sqrt{r(r^2-1)}} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s(1-s^2)}} = \kappa$$

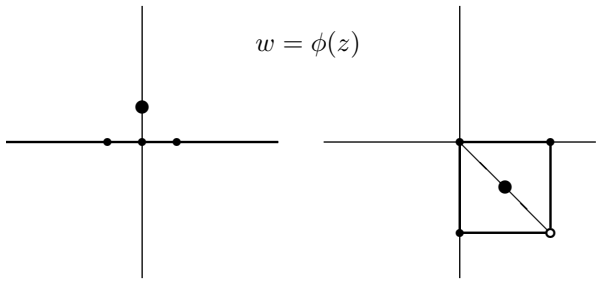
이다. 한편, 반평면에 들어가는 $it \in H_u$ 에 대하여 $\phi(it)$ 를 구해보면

$$\phi(it) = \int_0^t \frac{idr}{\sqrt{ir(-r^2-1)}} = e^{-\pi i/4} \int_0^t \frac{dr}{\sqrt{r(1+r^2)}}$$

이다. 따라서, 변환 ϕ 는 반평면 H_u 를 다음

$$\kappa - i\kappa, \qquad \kappa, \qquad 0, \qquad -i\kappa, \qquad \kappa - i\kappa$$

을 꼭지점으로 하는 정사각형으로 보내는 등각사상임을 알 수 있다.



이제, 정사각형의 변의 길이인 κ 의 값을 구해보자. 이를 위하여 $1 - r^2 = s$ 로 치환하면

$$\begin{aligned}\kappa &= \int_0^1 r^{-1/2}(1-r^2)^{-1/2}dr = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)^{-3/4}s^{-1/2}ds \\ &= \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\end{aligned}$$

이다. 여기서, $B(x, y)$ 는 베타함수이고, $\Gamma(x)$ 는 감마함수이다.(10) 그런데

$$\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

(10) 감마함수에 대한 체계적인 공부는 무한곱과 함께 복소해석의 중요한 주제이지만 이 책의 수준을 넘는다. 감마함수와 베타함수에 관한 기초적인 내용은 참고문헌 [2], 8.2 절을 참고하라.

이므로

$$\kappa = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{2}\pi} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) \approx 2.622\ldots$$

임을 알 수 있다. 한편 $1 + r^2 = \dfrac{1}{s}$ 로 치환하면

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dr}{\sqrt{r(1+r^2)}} &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)^{-3/4} s^{-3/4} ds \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{2}\kappa\end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{t\to\infty} \phi(it) = e^{-\pi i/4} \int_0^\infty \frac{dr}{\sqrt{r(1+r^2)}} = \kappa - i\kappa$$

임을 알 수 있다. 한편, 함수 $s \mapsto (1-s)s$ 는 $s = \dfrac{1}{2}$ 을 중심으로 대칭이다. 따라서,

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\kappa = \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 (1-s)^{-3/4} s^{-3/4} ds = \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{r(1+r)^2}}$$

을 얻고,

$$\phi(i) = e^{-\pi i/4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\,\kappa = \frac{1}{2}(\kappa - i\kappa)$$

임을 알 수 있다. 즉, ϕ 는 $z = i$ 를 정사각형의 중심으로 보낸다.

이제 마지막으로 남은 일은 ϕ 가 반평면 H_u 에서 정사각형 S 의 내부로 가는 전단사함수임을 증명하는 일이다. 이를 위하여 반평면 H_u 안에서 R 부터 $-R$ 까지 가는 반원호를 C_R 이라 하자. 또한, 각 $k = -1, 0, 1$ 에 대하여 k 를 중심으로 반평면 H_u 위에 그린 작은 반원호를 C_k 하고, 5.3 절의 보기 2 와 같이 이 반원호들을 실수축으로 연결한 단일폐

곡선을 C 라 하자. 만일 $|z|$ 가 충분히 크면 $|z| < 2|z-k|$ 이므로 (단, $k=-1,0,1$), $|\phi'(z)| < \dfrac{8}{|z|^{3/2}}$ 이고, 이로부터

$$\left|\int_{C_R} \phi'(z)\right| \le \frac{8}{R^{3/2}} \cdot \pi R$$

을 얻으므로, $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \phi'(z)dz = 0$ 임을 알 수 있다. 마찬가지로 각 $k=-1,0,1$ 에 대하여 C_k 의 반지름을 r 이라 하면 $\displaystyle\lim_{r\to 0} \int_{C_k} \phi'(z)dz = 0$ 이므로,

$$\lim_{z\to\infty,\ \operatorname{Im} z>0} \phi(z) = \lim_{x\to\infty,\ x>0} \phi(x) = \kappa - i\kappa$$

이다. 이제, 정사각형 내부의 점 w_0 를 고정하고 $\psi(z) = \phi(z) - w_0$ 의 근이 반평면 H_u 위에서 한 개의 근을 가짐을 보이면 된다. 변환 ϕ 는 실직선을 정사각형의 둘레로 보내고 $-1,0,1,\infty$ 를 각각 정사각형의 네 꼭지점으로 보내므로, R 을 충분히 크게 잡고 r 을 충분히 작게 잡으면

$$z \in C \implies |\phi(z) - w_0| \ge \delta$$

인 양수 $\delta > 0$ 를 잡을 수 있다. 그러면

$$\left|\int_{C_R} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)-w_0}\right| \le \frac{8}{R^{3/2}\delta} \cdot \pi R$$

이 된다. 그런데 $\dfrac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \dfrac{\phi'(z)}{\phi(z)-w_0}$ 이므로,

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty,\ r\to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi'(t)dt}{\phi(t)-w_0} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S} \frac{dw}{w-w_0} = 1\end{aligned}$$

이므로 편각원리를 적용하여 원하는 결론을 얻을 수 있다.

이제, 일반적인 볼록다각형과 관련된 등각사상을 정의하기 위하여 다음 조건

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1}, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = 2$$

을 만족하는 실수 $t_1, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{R}$ 와 양수 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (0,1)$ 를 고정하고, 함수 $F : H_u \to \mathbb{C}$ 를 다음

$$\phi(z) = \int_0^z (\zeta - t_1)^{-\alpha_1} (\zeta - t_2)^{-\alpha_2} \cdots (\zeta - t_{n-1})^{-\alpha_{n-1}} \, d\zeta \tag{17}$$

과 같이 정의한다. 여기서 함수 $\omega = \zeta^\alpha$ 는 H_u 를 $\{z : 0 < \arg \omega < \pi\alpha\}$ 로 보내는 것으로 정한다. 우선 t 가 실수축 위의 한 구간 $[t_{i-1}, t_i]$ 위에 있을 때

$$\phi'(t) = (t - t_1)^{-\alpha_1} (t - t_2)^{-\alpha_2} \cdots (t - t_{n-1})^{-\alpha_{n-1}}$$

가 고정된 편각 θ 을 가지므로, 이 구간 위에서 $\phi(t)$ 는 선분 위를 움직이게 된다. 이제, t 가 구간 $[t_{i-1}, t_i]$ 에서 $[t_i, t_{i+1}]$ 로 넘어갈 때 어떻게 되는지 알아보자. 이 때, $\phi'(t)$ 에서 $(t - t_i)$ 의 부호가 $-$ 에서 $+$ 로 바뀐다. 그런데,

$$s < 0 \implies \arg s^{-\alpha} = -\pi\alpha, \qquad s > 0 \implies \arg s^{-\alpha} = 0$$

이므로

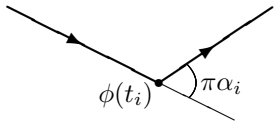
$$t_{i-1} < s_i < t_i < s_{i+1} < t_{i+1} \implies \arg s_{i+1} = \arg s_i + \pi\alpha_i$$

임을 알 수 있다. 즉, t 가 실수축 위를 움직이면서 t_i 를 지날 때마다 편각이 $\pi\alpha_i$ 만큼 늘어난다. 그러면 t 가 ∞ 를 지날 때 $2\pi - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = \pi\alpha_n$ 만큼 편각이 늘어나므로 실수축은 (17) 에 의하여 다음 점

$$\phi(t_1),\ \phi(t_2), \ldots, \phi(t_{n-1}),\ \phi(\infty)$$

들을 꼭지점으로 가지는 볼록다각형으로 변환됨을 알 수 있다. 지금까지 살펴본 변환 (17) 을 **슈바르츠–크리스토펠**(11)**변환**이라 부른다.

(11) Elwin Bruno Christoffel (1829∼1900), 독일 수학자. 베를린에서 공부한 뒤에 취리히와 Strasbourg 에서 활동하였다.



반평면 H_u 에서 사각형으로 가는 등각사상을 정의할 때, 허수축에 대칭인 사각형을 만들려면 양수 $k \in (0,1)$ 를 고정하고 다음

$$\phi(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}, \qquad z \in H_u \tag{18}$$

과 같이 정의한다. 여기에서, 피적분함수의 분모는 (17) 과 같이 각 일차식의 제곱근을 취한 후 곱한 것으로 이해한다. 만일

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad K' = \int_0^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

이라 두면 $F(z)$ 은 반평면 H_u 을 다음 네 점

$$\phi(-\frac{1}{k}) = -K + iK',\ \phi(-1) = -K,\ \phi(1) = K,\ \phi(\frac{1}{k}) = K + iK' \tag{19}$$

을 꼭지점으로 하는 사각형 R_0 의 내부로 보낸다.

문제 6.4.1. 등식 (19) 를 보여라. 또한, $\phi(\infty) = iK'$ 임을 보여라.

이제 변환 $\phi : \overline{H_u} \to R_0$ 의 역변환 $\psi : R_0 \to \overline{H_u}$ 를 생각하자. 여기서 $\psi(iK') = \infty$ 로 이해한다. 이 변환 ψ 의 정의역을 어떻게 복소평면 전체로 확장할 수 있는지 알아보자. 함수 ψ 는 정의역 안에 있는 실수들을 모두 실수로 보낸다. 만일 이 함수가 R_0 를 실수축 중심으로 대칭변환한 사각형 R_1 까지 정의된 해석함수라면 실수축 위에서 멱급수전개하면 그 계수가 모두 실수이고, 따라서 등식

$$\psi(\overline{z}) = \overline{\psi(z)}, \qquad z \in R_0 \cup R_1 \tag{20}$$

을 만족해야 한다.(12) 결국, 등식 (20) 을 $\overline{z} \in R_1$ 에 대한 $\psi(\overline{z})$ 의 정의로 삼아야 할 것이다. 이제, 보다 일반적인 상황을 생각하자.

(12) 연습문제 4.5.16 을 참조하라.

정리 6.4.1. (반사원리) 영역 $\Omega^+ \subset H_u$ 의 경계가 실수축의 구간 I 를 포함한다고 가정하고

$$\Omega^- = \{\overline{z} : z \in \Omega^+\}, \qquad \Omega = \Omega^+ \cup I \cup \Omega^-$$

라 두자. 또한, 연속함수 $f : \Omega^+ \cup I \to \mathbb{C}$ 가 Ω^+ 위에서 해석적이고 임의의 $z \in I$ 에 대하여 $f(z) \in \mathbb{R}$ 라 하자. 이 때,

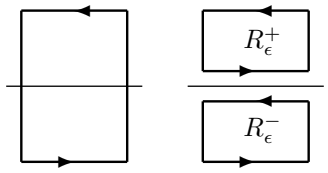
$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega^+ \cup I, \\ \overline{f(\overline{z})}, & z \in \Omega^- \end{cases}$$

라 정의하면 $F(z)$ 는 Ω 위에서 해석함수이다.

만일 $z_0 \in \Omega^+$ 근방에서 $f(z) = \sum_n a_n(z - z_0)^n$ 이면 $\overline{z_0} \in \Omega^-$ 의 근방에서 $F(z) = \overline{f(\overline{z})} = \sum_n \overline{a}_n(z - \overline{z}_0)^n$ 는 해석함수이다. 이제, 함수 $F(z)$ 가 I 위에서 해석함수임을 보이면 되는데, 정리 4.3.3 의 (나) 를 이용하면 된다. 실제로 구간 I 와 만나는 사각형 R 이 주어지면 R 의 밑변을 $L_\epsilon^+ = \{z \in R : \operatorname{Im} z = \epsilon\}$ 바꾸어 사각형 R_ϵ^+ 이라 하고, 사각형 R 윗변을 $L_\epsilon^- = \{z \in R : \operatorname{Im} z = -\epsilon\}$ 로 바꾸어 생긴 사각형을 R_ϵ^- 이라 하자. 그러면, 함수의 연속성에 의하여 $\displaystyle\int_{L_\epsilon^+} F(z)dz$ 은 $\epsilon \to 0$ 에 따라서 $\displaystyle\int_{I \cap R} f(z)dz$ 로 수렴하게 된다. 적분값 $\displaystyle\int_{L_\epsilon^-} F(z)dz$ 도 마찬가지이므로

$$\int_{\partial R} F(z)z = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial R_\epsilon^+ + \partial R_\epsilon^-} F(z)dz = 0$$

임을 알 수 있고, 따라서 $F(z)$ 는 Ω 위에서 해석함수이다.



이제 사각형 R_0 의 내부에 반사원리를 적용하면, R_0 를 실수축에 대칭변환하여 얻은 사각형 R_1 까지 해석함수 ψ 가 정의된다. 그러면 ψ 는 사각형 $R_0 \cup R_1$ 의 내부를 $H_u \cup (-1,1) \cup \{\overline{z} : z \in H_u\}$ 로 보내는 등각사상이 된다. 한편, 사각형 R_0 를 윗변에 대칭변환하여 얻은 사각형을 R_2 라 하자. 그러면 ψ 는 마찬가지 방법으로 R_2 까지 정의가 확장된다. 구체적으로 살펴보면 $z \in R_2$ 에 대하여 $R_0 \cap R_2$ 를 중심으로 대칭변환하여 $\overline{z} + 2iK'$ 을 얻는데,

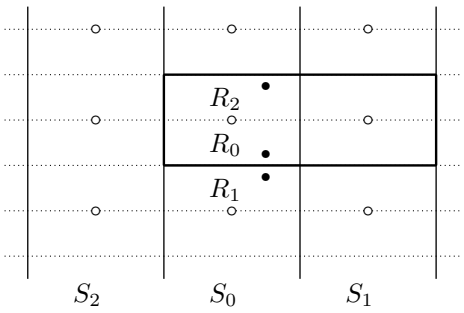
$$\psi(z) = \overline{\psi(\overline{z} + 2iK')} = \overline{\psi(\overline{z - 2iK'})} = \psi(z - 2iK')$$

으로 정의한다. 이와 같은 방법으로 계속 정의역을 확장하면 함수 ψ 는 영역 $S_0 = \{z : -K < \operatorname{Re} z < K\}$ 에서 정의된다. 특히, 방금 살펴본 바와 같이 ψ 는 주기가 $2iK'$ 인 주기함수이다. 마찬가지 방법을 계속 적용하면 영역 S_0 를 오른쪽 경계를 중심으로 대창이동한 영역 S_1 까지 정의역이 확장되고, 결국 복소평면 전체로 확장된다. 특히 이 함수의 주기는 $4K$ 임을 알 수 있다. 따라서, 사각형

$$R = \{z : -K \le \operatorname{Re} z < 3K,\ 0 \le \operatorname{Im} z < 2K'\}$$

위에서 함수를 살펴보면 된다.

문제 6.4.2. 영역 S_0 에서 정의된 함수 ψ 를 S_1 까지 정의역을 확장하는 과정을 설명하여라. 또한, 임의의 $w_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 에 대하여 $\psi(z) = w_0$ 를 만족하는 복소수 z 가 R 안에 두 개 있음을 보여라.



이미 살펴보았듯이 함수 ψ 는 R 안에서 두 개의 고립특이점 iK', $2K + iK'$ 을 가진다. 따라서, 함수 ψ 의 특이점은 다음 꼴

$$2nK + (2m+1)iK', \qquad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

이다. 한편 함수 ψ 는 R 안에서 두 개의 단근 0, $2K$ 를 가진다. 따라서, 함수 ψ 의 모든 근은 단근이고, 다음 꼴

$$2nK + 2miK', \qquad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

로 주어진다.

문제 6.4.3. 함수 ψ 는 모든 특이점에서 단극을 가짐을 보여라.

적분 (18) 은 원래 타원의 호의 길이를 구하는 문제에서 출발한 적분이다. 따라서, 이러한 모양의 적분을 **타원적분**이라 부른다. 이와 함께, 위에서 살펴본 함수 ψ 를 **타원함수**라 부르는데, 이 함수의 핵심 성질은 주기가 두 개라는 사실이다. 이와 같이 주기가 두 개인 주기함수를 일반적으로 **타원함수**라 부른다. 특히 앞에서 살펴본 타원함수 ψ 는 르잔드르,(13) 아벨, 야코비(14) 등에 의하여 연구되었는데, 보통 **야코비 타원함수**라 부르고 이를 $\operatorname{sn} z$ 로 쓴다. 이 함수는 sin 함수와 여러 가지 면에서 유사한 성질을 가진다.(15) 타원함수는 정수론을 비롯한 수학 전반에서 중요한 역할을 하는데, 이에 대한 체계적인 공부는 이 책의 범위를 넘는다.

6.5. 연습문제

6.5.1. 해석함수에 관한 항등정리가 조화함수에 대하여 성립하는지 살펴보아라.

(13) Adrien-Marie Legendre (1752∼183), 프랑스 수학자. 주로 파리 Académie des Sciences 에서 활동하였다.

(14) Carl Gustav Jacob Jacobi (1804∼1851), 독일 수학자. 베를린에서 공부하고, Königsberg (Kaliningrad, 현재 러시아 영토), 파리, 베를린 등지에서 활동하였다.

(15) 연습문제 6.5.18 을 참조하라.

6.5.2. 단순연결영역 Ω 에서 정의된 두 조화함수 $u_1(z)$ 와 $u_2(z)$ 에 대하여 $u_1(z)u_2(z) \equiv 0$ 이라고 하자. 그러면 Ω 위에서 $u_1(z) \equiv 0$ 또는 $u_2(z) \equiv 0$ 임을 보여라.

6.5.3. 조화함수 u, v 에 대하여 다음이 동치임을 보여라.
(가) uv 가 조화함수이다.
(나) 적절한 상수 $c, d \in \mathbb{R}$ 에 대하여 cu 와 dv 가 조화켤레이다.

6.5.4. 함수 $z \mapsto \log|1+z|$ 와 등식 (3) 을 이용하여 다음 등식

$$\int_0^\pi \log \sin\theta d\theta = -\pi \log 2$$

이 성립함을 보여라.(16)

6.5.5. 원판 $D(0,R)$ 을 포함하는 영역 위에서 정의된 조화함수 $u(z)$ 에 대하여 다음 등식

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - t) + r^2}\, u(Re^{i\theta})\, dt$$

이 성립함을 보여라 (단, $r < R$).

6.5.6. $|z| < 1$ 에서 조화함수이고 $|z| = 1$ 에서 다음

$$u(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

을 만족하는 조화함수를 찾아라.

6.5.7. 허수축 $I = \{z : \operatorname{Re} z = 0\}$ 위에서 정의된 유계연속함수 $f : I \to \mathbb{R}$ 에 대하여 함수 u 를 다음

$$u(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xf(it)}{x^2 + (y-t)^2} dt$$

과 같이 정의하면, $\operatorname{Re} z > 0$ 위에서 u 가 조화함수임을 보여라.

6.5.8. 영역 $A = \{z : R_1 < |z| < R_2\}$ 에서 조화함수 $u(z)$ 가 정의되어 있다. 조화함수는 C^∞-함수이므로, 각 $n = 0 = \pm 1, \pm 2, \ldots$ 에 대하여

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta})e^{-in\theta} d\theta, \qquad R_1 < r < R_2$$

라 정의하면 푸리에급수 이론에 의하여

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(r)e^{in\theta}, \qquad R_1 < r < R_2$$

(16) 성립함은 예 4.5.4 및 5.1.3 을 참고하라.

이 급수는 라 항별 미분 및 적분을 할 수 있다.(17)

(가) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ 이 성립함을 보여라.

(나) 함수 $re^{i\theta} \mapsto a_0(r)$ 이 조화함수임을 보여라.

(다) 함수 $a_0(r)$ 는 $a_0(r) = A \log r + B$ 의 꼴임을 보여라.

(라) 함수 $u : \overline{\Delta} \to \mathbb{R}$ 가 연속이고 $\Delta \setminus \{0\}$ 에서 조화함수라 가정하자. 만일 $u|_{\partial\Delta} = 0$ 이면 $u(0) = 0$ 임을 증명하여라.

6.5.9. 영역 Ω 에서 정의된 해석함수 $f(z)$ 가 $f'(z_0) \neq 0$ 이면 다음 등식

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_\Gamma \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}$$

를 만족하는 곡선 Γ 를 잡을 수 있음을 보여라.

6.5.10. 함수 $f(z)$ 가 원판 $\overline{D}(0,r)$ 위에서 해석적이고 $f \neq 0$ 이면 다음 등식[18]

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})| d\theta \tag{21}$$

이 성립함을 보여라. 이 등식은 원판의 경계 $\{z : |z| = r\}$ 위에서 $f(z) = 0$ 인 점이 있더라도 성립함을 보여라. 즉, 함수 $f(z)$ 가 원판 $\overline{D}(0,r)$ 위에서 해석적이고, 열린원판 $D(0,r)$ 위에서 $f \neq 0$ 이면 같은 등식이 성립함을 보여라. [도움말: 연습문제 4.5.14 (나)]

6.5.11. 다음 꼴 $\phi(z) = \dfrac{az^2 + bz + c}{dz^2 + ez + f}$ 로 정의된 함수를 **이차분수함수**라 한다.

(가) 다음 집합

$$B = \{z : \phi'(z) = 0,\ \text{혹은 } \phi(z) \text{ 가 } z \text{ 에서 2-중극을 가진다}\}$$

은 꼭 두 개의 원소를 가짐을 보여라. 앞으로,

$$B = \{z_1, z_2\}, \qquad \phi(z_1) = w_1, \quad \phi(z_2) = w_2$$

라 두자. 방정식 $\phi(z) = w_1$ 및 $\phi(z) = w_2$ 는 한 개의 근을 가짐을 보여라. 만일 $w_0 \neq w_1, w_2$ 이면 방정식 $\phi(z) = w_0$ 는 두 개의 근을 가짐을 보여라.

---

(17) 참고문헌 [2], 9.4 절을 참고하라.

(18) 등식 (21) 은 **옌센 공식**이라 불린다.

Johan Ludvig William Valdemar Jensen (1859∼1925), 덴마크 수학자. 수학은 거의 독학으로 공부하였다. 전화회사의 기사로 일하면서 틈틈이 수학을 연구하였다.

(나) 두 점 $0, \infty$ 를 w_1, w_2 로 보내는 일차분수함수 ϕ_1 를 잡고, $\psi(z) = \phi_1^{-1} \circ \phi$ 라 두자. 이 때, 함수 $\rho = \sqrt{\psi(z)}$ 가 잘 정의되고, $\rho(z)$ 는 일차분수함수임을 보여라.

(다) 임의의 이차분수함수는 다음 세 변환

$$\text{일차분수함수}, \quad z^2, \quad \text{일차분수함수}$$

의 합성으로 쓸 수 있음을 보여라.

6.5.12. 각 고정된 실수 $\theta \in (0, \pi)$ 에 대하여 영역 S_θ 를 다음

$$S_\theta = \{z : |z| < 1,\ 0 < \operatorname{Arg} z < \theta\}$$

과 같이 정의하였을 때, S_θ 를 Δ 로 보내는 전단사 등각사상을 하나 찾아 보아라.

6.5.13. 함수 $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ 는 함수 $z \mapsto e^{iz}$ 와 사상 (12) 의 합성이다.

(가) 수평선 $\operatorname{Im} z = y_0$ 가 $\cos z$ 에 의하여 어떻게 변환되는가 살펴보아라.

(나) 수평선 $\operatorname{Re} z = x_0$ 가 $\cos z$ 에 의하여 어떻게 변환되는가 살펴보아라.

(다) 함수 $\cos z$ 는 영역 $\Omega = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ 위에서 등각사상임을 보여라.

(라) 영역 $\Omega_1 = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi,\ \operatorname{Re} z > 0\}$ 에 대하여 경계 $\partial\Omega_1$ 과 Ω_1 이 $\cos z$ 에 의하여 어떻게 변환되는지 살펴보아라.

(마) 함수 $w = \cos z$ 에 의한 Ω 의 상은 무엇인가 살펴보아라.

6.5.14. 각 복소수 $\alpha \in \mathbb{C}$ 에 대하여 함수 f_α 를 다음

$$f_\alpha(z) = \frac{z}{1 + \alpha z^2}$$

과 같이 정의한다.

(가) 이 함수가 Δ 위에서 단사함수가 될 α 의 조건을 찾아라.

(나) 이 함수가 Δ 위에서 단사함수일 때, 그 상 $f_\alpha(\Delta)$ 를 구하여라.

6.5.15. 각 $z \in \Delta$ 에 대하여

$$\phi(z) = \exp\left[-i \operatorname{Log}\left\{i\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right\}^{1/2}\right], \qquad z \in \Delta$$

라 정의하자. 이 때, ϕ 가 등각사상인지 살펴보고 그 상을 구하여라. 단, $z^{1/2}$ 의 상은 $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ 이라 가정한다.

6.5.16. 각 $z \in \overline{\Delta}$ 에 대하여

$$w = \phi(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-\zeta}\sqrt{1+\zeta}\sqrt{1-i\zeta}\sqrt{1+i\zeta}}\, d\zeta$$

라 정의하자. 여기서 $\sqrt{z} = e^{(\operatorname{Log} z)/2}$ 로 정의한다. 또한

$$\kappa = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\, dt$$

라 정의한다.

(가) $\phi(0) = 0$, $\phi(\pm 1) = \pm\kappa$, $\phi(\pm i) = \pm i\kappa$ 임을 보여라.

(나) 임의의 $\theta \in [0, 2\pi]$ 에 대하여 등식

$$\operatorname{Arg} \frac{1}{1-e^{i\theta}} = \frac{\pi - \theta}{2}$$

이 성립함을 보여라.(19)

(다) 고정된 실수 $\theta \in (-\pi, \pi]$ 에 대하여 $\Gamma_\theta(t) = te^{i\theta}$ 로 정의된 곡선 Γ_θ 를 생각하자. 그러면 각 $k = -2, -1, 0, 1$ 에 대하여 다음

$$\frac{\pi}{2}k < \theta < \frac{\pi}{2}(k+1) \implies \operatorname{Arg}\left[(\phi \circ \Gamma_\theta)'(1)\right] = \frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{4}$$

이 성립함을 보여라.

(라) 함수 $w = \phi(z)$ 는 단위원판 Δ 를 대각선의 길이가 2κ 인 정사각형으로 보내는 등각사상임을 보여라.

(마) κ 의 값을 감마함수로 나타내어라.

6.5.17. 함수

$$f(z) = \int_0^z \zeta^{\alpha-1}(1-\zeta)^{\beta-1} d\zeta$$

가 주어져 있다. 단, $\alpha + \beta + \gamma = 1$ 이 다.

(가) 함수 f 는 반평면 H_u 을 내각이 $\pi\alpha, \pi\beta, \pi\gamma$ 인 삼각형으로 변환함을 보여라.

(나) 내각 $\pi\alpha, \pi\beta, \pi\gamma$ 의 대변의 길이를 a, b, c 라 할 때,

$$a = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)}, \qquad b = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma+\alpha)}, \qquad c = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

임을 보여라.

(다) 등식

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \qquad 0 < x < 1$$

이 성립함을 보여라.

6.5.18. 반평면 H_u 위에서 정의된 다음 함수

$$w = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-\zeta}\sqrt{1+\zeta}}\, d\zeta, \qquad z \in H_u$$

(19) 이 등식은 이미 연습문제 3.4.12 (마) 에서 사용하였다.

의 상을 구하고, 전단사 등각사상임을 보여라. 이 함수의 역함수가 $z = \sin w$ 을 보여라.

6.5.19. 변환 (17) 에서, α_i 의 값이

$$(-\infty, -1], \qquad (-1, 0], \qquad [1, \infty)$$

에 들어가는 경우 각각 어떤 현상이 일어나는지 살펴보아라.

6.5.20. 슈바르츠–크리스토펠 변환 (17) 에서 실직선의 상이 볼록다각형임을 보여라. 또한, 이 변환이 반평면 H_u 를 이 다각형의 내부로 보내는 전단사 등각사상임을 보여라.