

연습문제 도움말

제 1 장

1.4.1. $\sum_{k=0}^n \cos k\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$

1.4.2. (가) $|\operatorname{Im}(i - \bar{\alpha} + \alpha^2)| \leq |i - \bar{\alpha} + \alpha^2| \leq 1 + |\bar{\alpha}| + |\alpha|^2 \leq 3$

(나) $|\alpha^4 - 4\alpha^2 + 3| = |\alpha^2 - 3||\alpha^2 - 1| \geq ||\alpha|^2 - 3| \cdot ||\alpha|^2 - 1|$

1.4.3. $\alpha = r$ 이 양수인 경우 먼저 증명한다.

1.4.4. 만일 z 를 극형식으로 표시하면, $\cos \theta$ 와 $\sin \theta$ 가 유리수일 때 $\sin n\theta$ 도 유리수임을 증명하는 문제로 귀착되는데, 이는 귀납법으로 증명되면 된다.

1.4.5. $(a + 2b + c)x^2 + (-a + 2b - c)y^2 + 2i(a - c)xy = d$ 에서 $a = c$, $(a + c)x^2 + (-a + b)y^2 = \frac{d}{2}$ 이다.

1.4.6. $\operatorname{Re} \alpha \neq 0$, $|\beta|^2 - 4(\operatorname{Re} \alpha)(\operatorname{Re} \gamma) > 0$

1.4.7. 네 점 $0, \beta - \alpha, \gamma - \alpha, \delta - \alpha$ 가 평행사면형을 이루는 것과 동치이다.

1.4.8. α, β, γ 가 주어진 등식을 만족하는 것과 $\alpha - \tau, \beta - \tau, \gamma - \tau$ 가 주어진 등식을 만족하는 것은 동치이다. 또한, α, β, γ 대신에 $\rho\alpha, \rho\beta, \rho\gamma$ 를 대입해도 마찬가지이다. 따라서, $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 1$ 일 때에만 증명하면 된다. 즉, $0, 1, \gamma$ 가 정삼각형의 세 꼭지점을 이룬다는 것과 $\gamma^2 - \gamma + 1 = 0$ 이 성립하는 것과 동치임을 보이면 된다. 또 다른 방법으로, $z_2 - z_1 = e^{\pi i/3}(z_3 - z_1)$ 및 $z_1 - z_3 = e^{\pi i/3}(z_2 - z_3)$ 를 이용할 수도 있다.

1.4.9. (가) \Rightarrow (나) \Rightarrow (다) 는 직접 계산하면 된다. 이제, (다)를 가정하면 도움말에 의하여 $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{n-1} = 0$ 이다. 따라서, $f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$ 이라 두고 전개하면 $f(z) = z^n + (-1)^n \sigma_n$ 이다. 결국, 각 $i = 1, 2, \dots, n$ 에 대하여 $\alpha_i^n + (-1)^n \sigma_n = f(\alpha_i) = 0$ 인데, $\alpha_1 = 1$ 이면 $(-1)^n \sigma_n = -\alpha_1^n = -1$ 이다. 따라서, $\alpha_i^n - 1 = 0$ 이다.

1.4.10. (가)에 의하여 $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$ 라 가정해도 되는데, 이 경우 등식 (18)은 $\alpha_1^k + \dots + \alpha_n^k = 0$ 이 된다. 또한, (나)에 의하여 $\alpha_1 = 1$ 이라 가정해도 되므로, 연습문제 1.4.9를 적용하면 된다.

1.4.11. 직접 계산하면 된다.

1.4.12. (가) $w = A \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$, 단, $|A| = 1$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$.

(나) $w = \frac{az + b}{cz + d}$, 단 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc > 0$.

(다) $w = K \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$, 단 $|K| = 1$, $|\alpha| < 1$.

1.4.13. 먼저 $\phi_\alpha(\infty) = -\frac{1}{\bar{\alpha}}$ 이고, $\phi_\alpha(\frac{1}{\bar{\alpha}}) = \infty$ 이다. 만일 $\phi_\alpha(L) = L$ 이면 $\infty \in L$ 이므로 $-\frac{1}{\bar{\alpha}} = \phi_\alpha(\infty) \in L$ 이고 $\frac{1}{\bar{\alpha}} = \phi_\alpha^{-1}(\infty) \in L$ 이다. 그런데, 0, α 및 $\pm\frac{1}{\bar{\alpha}}$ 가 일직선 위에 있으므로 $L = \{t\alpha : t \in \mathbb{R}\}$ 이다. 역으로, $L = \{t\alpha : t \in \mathbb{R}\}$ 이면 $\phi_\alpha(0) = \alpha$ 이고 $\phi_\alpha(\infty) = -\frac{1}{\bar{\alpha}}$ 및 $\phi_\alpha(\frac{1}{\bar{\alpha}}) = \infty$ 이므로 ϕ_α 는 L 을 L 로 보낸다.

제 2 장

2.4.1. 만일 $-\pi < \operatorname{Arg} \alpha < \pi$ 이면 동치관계가 성립한다.

2.4.2. (가) 급수의 실수부 $\sum_n |a_n| \cos(\operatorname{Arg} a_n)$ 이 수렴한다. 그런데 각 자연수 $n = 0, 1, \dots$ 에 대하여 $|a_n| \leq \frac{1}{\cos \theta_0} |a_n| \cos(\operatorname{Arg} a_n)$ 이다.

(나) $|a_n| \leq M$ 인 양수 M 을 잡을 수 있으므로, (가)의 가정을 만족한다.

2.4.3. (가) n 에 관한 귀납법을 이용한다.

(나) p 에 관한 귀납법을 사용한다.

(다) 등식 $\frac{1}{(1-z)^p} \cdot \frac{1}{(1-z)^q} = \frac{1}{(1-z)^{p+q}}$ 을 사용한다.

2.4.4. (가) 수학적 귀납법을 사용한다. 또한, $\lim_n |a_n|^{1/n} \leq 2\gamma$ 이므로 $r \geq \frac{1}{2\gamma}$ 이다.

(나) 두 급수 $\sum_n a_n z^n$ 과 $1 - \alpha z - \beta z^2$ 를 곱한다.

(다) $p \neq q$ 인 경우 $\frac{z}{1 - \alpha z - \beta z^2} = \frac{pq}{q-p} \left(\frac{1}{1-z/p} - \frac{1}{1-z/q} \right)$ 에서 $a_n = \frac{pq}{q-p} \left(\frac{1}{p^n} - \frac{1}{q^n} \right)$ 이고, $p = q$ 이면 $a_n = \frac{n}{p^{n-1}}$ 이다.

2.4.5. $\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}$ 이라 두면 $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+1} |z|^{2(n+1)}$ 이다. 따라서, $|z| < 1$ 이면 수렴하고 $|z| > 1$ 이면 발산하므로, 수렴반경은 1이다. 만일 $z = \pm 1$ 이면 수렴한다. 자연수 n 을 4로 나눈 나머지가 0, 3인가 1, 2인가에 따라서 $n(n+1)$ 를 4로 나눈 나머지가 0인가 2인가 결정된다. 따라서, $z = \pm i$ 일 때 수렴한다.

2.4.6. (가) 등식 $a_n = A_n - A_{n-1}$ 을 이용한다.

(나) 먼저 (가)에 의하여, 급수 $\sum_n A_n(b_{n+1} - b_n)$ 과 수열 $\langle A_n b_{n+1} \rangle$ 이 수렴하면 급수 $\sum_n a_n b_n$ 이 수렴함을 알 수 있다. 만일 $|A_n| \leq M$ 이면, $A_n b_{n+1} \rightarrow 0$ 이다. 또한, $|A_n(b_{n+1} - b_n)| \leq M(b_{n+1} - b_n)$ 인데, $\sum_n (b_{n+1} - b_n) = b_1$ 이다.

(다) $A_n = \sum_{k=1}^n z^k$ 이라 두면 $|A_n| = \left| \frac{z - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{2}{|1 - z|}$ 이다.

2.4.7. $A_n = \sum_{k=1}^n z^{4k}$ 이라 두면 $|A_n| = \left| \frac{z^4 - z^{4(n+1)}}{1 - z^4} \right| \leq \frac{2}{|1 - z^4|}$ 이다.

2.4.8. (가) 부등식에 의하여 $\langle na_{n+1} \rangle$ 은 단조감소하므로 수렴한다. 따라서 $\sum_n [(n+1)a_n - na_{n+1}]$ 이 수렴한다.

(나) 부등식 $na_{n+1} \geq (n-1)a_n$ 에서 $\langle na_{n+1} \rangle$ 이 단조증가하므로 $na_{n+1} \geq \gamma$ 인 양수 γ 를 잡을 수 있는데, $\sum \frac{1}{n}$ 이 발산한다.

(라) $a_n = \binom{\alpha}{n} z^n$ 라 두면 $n \left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - 1 \right) = \frac{n}{n+1} [|\alpha - n| - (n+1)]$ 은 $-(\operatorname{Re} \alpha + 1)$ 로 수렴한다.

(마) $|\alpha - n| \geq n+1$ 이므로 $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| z \frac{\alpha - n}{n+1} \right| \geq 1$ 이다.

2.4.9. $1^{1/2} + 1^{1/2} = 0, \pm 2$ 이고, $2 \cdot 1^{1/2} = \pm 2$ 이다.

2.4.10. 만일 $z = te^{i\theta}$ 이면 $|e^{iz}| = e^{-t \sin \theta}$ 이고 $|e^{-iz}| = e^{t \sin \theta}$ 이다. 따라서,

$\sin \theta > 0$ 이면 $2|\cos z| = |e^{iz} + e^{-iz}| \geq |e^{-iz}| - |e^{iz}|$ 는 $t \rightarrow +\infty$ 에 따라서

$+\infty$ 로 발산한다. $\sin \theta < 0$ 일 때에도 마찬가지이다. 따라서, 구하는 조건은 $\sin \theta = 0$ 이다.

2.4.11. 만일 $\log z$ 를 집합 $\{\text{Log } |z| + i(\text{Arg } z + 2n\pi) : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 으로 이해하면 두 집합은 같다.

2.4.12. $\log \alpha = \text{Log } |\alpha| + i(\text{Arg } \alpha + 2k\pi)$ 에서 $\alpha^\beta = e^{\beta \text{Log } |\alpha|} \cdot e^{i\beta(\text{Arg } \alpha + 2k\pi)}$ 이다.

2.4.13. $\left| \frac{a_n}{n^z} \right| = \frac{|a_n|}{n^{\operatorname{Re} z}} < \frac{|a_n|}{n^s}$ 이다.

제 3 장

3.4.1. 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 의한 사상 $\phi(x+iy) = (ax+by) + i(cx+dy)$ 가 복소함수로서 선형사상이려면 등식 $\phi(ix-y) = i\phi(x+iy)$ 를 만족해야 하므로, $a=d$ 및 $b=-c$ 를 얻는다.

3.4.2. 등식 (3), (4), (5) 를 이용하면 된다.

3.4.3. (가) $\frac{1}{3}$ (나) 0 (다) 2 (라) 존재하지 않음

3.4.4. 함수 $f(z)$ 는 실수축과 허수축 위에서 함수값이 0 이므로 코시-리만 방정식을 만족한다. 직선 $y=0$ 와 $y=x$ 위에서 극한값 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z}$ 의 극한이 다르므로 $f(z)$ 는 원점에서 미분가능하지 않다.

3.4.5. $a=3$, $v(x,y) = -x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 3xy^2$

3.4.6. 조화함수 u, v 에 대하여 $\frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2} = 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$ 이 성립한다. 따라서 u, v 가 조화함수일 때, uv 가 조화함수일 필요충분조건은 $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ 이다.

3.4.7. (나) 함수 $f(z) = B_\alpha(z)e^{-\alpha\Lambda(z)}$ 의 도함수를 구한다.

(다) $|z| < 1$ 위에서 $B_\alpha(z) = e^{\alpha\Lambda(z)} = e^{\alpha\text{Log}(1+z)}$ 이고, $(1+z)^\alpha = e^{\alpha\log(1+z)}$ 이다.

3.4.8. (가) $|z| < 1$ 위에서 $A'(z) = \frac{1}{1+z^2}$ 이다.

(나) 양변을 미분하여 비교한다.

(다) Log 가 제대로 정의되었는지 확인하고 양변을 미분하여 비교한다.

(라) 분수함수와 로그함수의 합성임을 이용하면 $\{z : -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}\}$ 이다.

(마) $\tan z = i \frac{1 - e^{2iz}}{1 + e^{2iz}}$ 와 $e^{2iA(z)} = \frac{1 + iz}{1 - iz}$ 를 이용한다.

3.4.9. 수렴반경은 ∞ 이다.

3.4.10. $f(x+iy) = f(x)f(iy) = e^x f(iy)$ 에서 $f(iy) = u(y) + iv(y)$ 라 두면

$f(x+iy) = e^x u(y) + ie^x v(y)$ 이다. 코시-리만 방정식에서 $u'' = -u$ 를 얻고,

이로부터 $u(y) = \cos y$ 및 $v(y) = \sin y$ 를 얻는다.

3.4.11. 문제 3.3.3 에 의한 부등식 $|\operatorname{Log}(1+z) - z| \leq \frac{1}{2}|z|^2 \sum_n |z|^n$ 에서 원하는 부등식을 얻는다. 이에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{Log}(1 + \frac{z}{n}) = z$ 임을 알 수 있다.

3.4.12. (가) 첫째 등식은 등비급수공식에서, 둘째 등식은 정리 2.2.4 에서 나온다.

(다) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$ 이므로 $n \geq N \implies |\sigma_n - \sigma| < \epsilon$ 인 자연수 N 을 잡을 수

있다. 이 때, $A = \sum_{n=0}^{N-1} |\sigma_n - \sigma|$ 라 두면 $|f(z) - \sigma| \leq |e^{i\theta} - z| \sum_{n=0}^{N-1} |\sigma_n - \sigma| + \epsilon |(e^{i\theta} - z) \sum_{n=N}^{\infty} (e^{-i\theta} z)^n| \leq A |e^{i\theta} - z| + \epsilon$ 이다.

(라) 양변을 미분하여 비교한다.

(마) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\theta = -\log \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right|$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\theta = \frac{\pi - \theta}{2}$

3.4.13. (가) 연습문제 3.4.12 (라) 를 이용한다.

(나) 양변을 미분한다.

(다) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \log x \log(1-x) = 0$ 임을 보이면 된다.

3.4.14. (가) $\frac{2\pi}{\theta}$ 가 무리수가 되도록 잡으면 된다.

(나) 직접 계산하면 된다.

(다) $|q(re^{ik\theta})| \leq M$ 이다.

(마) 먼저 $\max \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \right| : |z| = r \right\} < \epsilon$ 이 성립하도록 충분히 큰 자연수

n 을 잡는다. 그러면 $|z| = r$ 일 때 $\left| \sum_{k=-m}^n a_k z^k \right| = \left| f(z) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \right| \leq M_r + \epsilon$

이다. 따라서 (라)를 적용하면 $|a_0| \leq M_r$ 을 얻는다. 일반적인 경우에는 함수 $\frac{f(z)}{z^n}$ 를 생각하고 방금 증명한 것을 적용하면 된다.

제 4 장

4.5.1. 만일 $f = u + iv$ 라 두면 $\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \int_{\Gamma} v dx + u dy = \iint_A \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$ 이므로, 코시-리만 방정식을 적용하면 된다.

4.5.2. 먼저 $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} (\bar{z} - \bar{z}_0)^k$ 를 계산하면 $k \neq 1$ 일 때 0 이고, $k = 1$ 일 때 r^2 이다. 따라서, $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k$ 라 두면 $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \overline{p(z)} dz = r^2 \overline{a_1} = r^2 \overline{p'(z_0)}$ 이다.

4.5.3. $\iint_{f(A)} dxdy = \frac{1}{2} \int_{f \circ \Gamma} xdy - ydx = \frac{1}{2i} \int_{f \circ \Gamma} \bar{z} dz = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz$ 이다.

4.5.4. (가) $|f(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta}$ 이다.

(나) $|1 - e^{i\theta}| = \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$ 이다.

4.5.5. (가) 함수 f 의 야코비 행렬식이 $|J_f(x, y)| = |f'(z)|^2$ 이므로, 구하는 넓이는 $\iint_{\overline{D}} |J_f| dxdy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_r^R |f'(\rho e^{i\theta})|^2 \rho d\rho d\theta$ 이다.

(나) $2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \geq 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta \geq 2\pi$ 이다.

4.5.6. 양변을 미분하여 비교한다.

4.5.7. (가) 양변을 미분하여 비교한다. 이 급수는 $z = \pm i$ 에서 수렴하지 않는다. 만일 $|z| = 1$ 이고 $z \neq \pm i$ 이면 $\sum_n \frac{1}{2n+1} \cdot [(1-1)^n z^{2n+1}]$ 에 디리클레 정리를 적용하여 주어진 급수가 수렴함을 알 수 있다.

(나) 만일 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ 이면 $\arctan e^{i\theta} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{\theta} \frac{ie^{i\tau} d\tau}{1+e^{2i\tau}} = \frac{\pi}{4} + i \int_0^{\theta} \frac{2d\tau}{\cos \tau}$ 이다.

4.5.8. 영역 $\{z : |z-1| < 1\}$ 위에서 $\text{Log } z$ 가 해석함수이므로 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 는 원시함수 $\text{Log } f(z)$ 를 가진다.

4.5.9. $\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$ 를 이용한다.

4.5.10. $m \geq 1$ 이면 $2\pi i (-1)^{m-1} \binom{m+n-2}{m-1} (\alpha - \beta)^{-n-m+1}$ 이고, $m \leq 0$ 이면 0 이다.

4.5.11. 타원 $\Gamma(\theta) = a \cos \theta + ib \sin \theta$ 위에서 적분한다.

4.5.12. (가) $\int_{|z|=1} \frac{(2 \pm z)f(z)}{z} dz \pm \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2} dz = 2\pi i(2f(0) \pm f'(0))$ 이다.
 (나) 바로 앞에서 얻은 등식을 이용한다.

4.5.13. 적분값은 $2\pi i \binom{2n}{n}$ 이다.

4.5.14. (가) $\left| \int_{\gamma_\epsilon} \frac{\log(1+z)}{iz} dz \right| \leq \frac{|\log \epsilon| + \pi/2}{1-\epsilon} \cdot \pi \epsilon$ 이다.

(나) 주어진 선적분의 실수부를 생각하면 첫째 식을 바로 얻을 수 있다. 한편,
 $|1 + e^{i\theta}| = \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$ 이므로 $0 = \int_0^{2\pi} \log \left| 2 \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 2 \int_0^\pi \log |2 \cos \theta| d\theta$ 에서
 $\int_0^\pi \log \sin \theta d\theta = \int_0^\pi \log |\cos \theta| d\theta = -\pi \log 2$ 를 얻는다.

4.5.15. 항등정리를 사용한다.

4.5.16. 먼저 $f = u + iv$ 라 두자. (가)를 가정하면 실수축 위에서 $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ 이므로 $f' = \frac{\partial u}{\partial x} \in \mathbb{R}$ 이다. 균법에 의하여 실수축 위에서 임의의 편도함수가 모두 실수이고, 따라서, (다)가 성립한다. (다) \Rightarrow (나) \Rightarrow (가)는 당연하다.

4.5.17. (가) $\frac{2}{\pi}$ (나) 관계식 $\cos z \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \right) = 1$ 을 이용한다.

(다) $E_2 = 1, E_4 = 5, E_6 = 61, E_8 = 1385, [E_{10} = 50521, E_{12} = 2702765]$

4.5.18. $g(z) = \int_{z_0}^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + \text{Log } f(z_0)$ 라 정의하면 된다.

4.5.19. 만일 $p(z)$ 가 다항식이면 $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |p(z)| = \infty$ 이다. 따라서, R 이 충분히 크면, $|z| = R$ 일 때 $|p(z)| > |p(0)|$ 이다. 만일 $p(z)$ 가 근을 가지지 않으면 해석함수 $\frac{1}{p(z)}$ 는 원 $|z| = R$ 내부에서 절대값의 최대값을 가진다.

4.5.20. (가) 수학적 균법을 이용한다.

(나) 만일 $p(c) = 0$ 이면 증명할 것이 없다. 만일 $p(c) \neq 0$ 이면 $0 = \overline{\frac{p'(c)}{p(c)}} = \sum_{k=1}^n \frac{c - c_k}{|c - c_k|^2}$ 이다. 따라서, $\mu_k = \frac{1}{|c - c_k|^2}, \lambda_k = \frac{\mu_k}{\mu_1 + \dots + \mu_n}$ 이라 두면 된다.

4.5.21. 함수 $\frac{f(z)}{e^z}$ 가 복소평면 전체에서 정의된 유계 해석함수이므로 리우비유 정리를 적용할 수 있다.

4.5.22. 만일 $\alpha \in \mathbb{C}$ 가 실계수 다항식의 근이면 $\bar{\alpha} \in \mathbb{C}$ 도 근이다.

제 5 장

5.5.1. (나) 우선 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 은 $\{z : |z| < R\}$ 위에서 해석함수이다. 만일 $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ 이라 두면 $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n = g(\frac{1}{z})$ 이다. 그런데, $z \mapsto \frac{1}{z}$ 는 $\{z : |z| > r\}$ 에서 $\{z : |z| < \frac{1}{r}\}$ 로 가는 해석함수이고, $g(z)$ 는 $\{z : |z| < \frac{1}{r}\}$ 에서 해석함수이다.

(다) 함수 $h(t) = f(e^{it})$ 는 해석함수 $z \mapsto f(e^{iz})$ 를 실수축에 제한한 것이다.

5.5.2. 함수 f 의 야코비 행렬식이 $|J_f(x, y)| = |f'(z)|^2$ 이므로, 구하는 넓이는 $\iint_A |J_f| dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_r^R |f'(\rho e^{i\theta})|^2 \rho d\rho d\theta$ 이다.

5.5.3. 만일 $f(z)$ 가 상수함수가 아니라 가정하면 최대절대값정리에 의하여 $f(z_0) \in D$ 인 $z_0 \in D$ 를 찾을 수 있다. 그런데 임의의 $z \in \partial\bar{D}$ 에 대하여 $|(f(z) - f(z_0)) - f(z)| = |f(z_0)| < 1 = |f(z)|$ 이다. 이제, 임의의 $w_0 \in D$ 대하여 마찬가지로 $|(f(z) - w_0) - f(z)| < |f(z)|$ 가 성립하므로 세 함수 $f(z) - f(z_0)$, $f(z)$, $f(z) - w_0$ 는 D 위에서 같은 개수의 균을 가진다.

5.5.4. 먼저 $Q(\zeta) - Q(z) = (\zeta - z) \sum_{k=0}^{n-1} a_k(\zeta) z^k$ 라 쓸 수 있다. 그러면, $P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(\zeta)}{Q(\zeta)} \cdot \frac{Q(\zeta) - Q(z)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(\zeta)}{Q(\zeta)} a_k(\zeta) d\zeta \right) z^k$ 이다.

$$5.5.5. \text{ (가) } \frac{\pi}{2e} \quad \text{ (나) } \frac{\pi}{a^2 - b^2} \left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right)$$

$$5.5.6. \frac{a^2 \pi}{1 - a^2}$$

$$5.5.7. \text{ (가) } \frac{\pi a}{\sin \pi a} \quad \text{ (나) } \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi a}{2}}$$

$$5.5.8. \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

5.5.9. 원점 0 을 출발하여 선분을 따라서 R 까지 가서 원호를 따라 $Re^{2\pi i/n}$ 까지 가고 다시 선분으로 0 에 돌아오는 곡선을 생각하여 $\frac{\pi/n}{\sin \pi/n}$ 를 얻는다.

$$5.5.10. \text{ 둘 다 } \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

5.5.11. (나) 선적분하여 작은 원과 큰 원의 반지름을 각각 0 과 ∞ 로 보내면

그 값은 $\int_0^\infty R(x)(\log x)^2 dx - \int_0^\infty R(x)(\log x + 2\pi i)^2 dx$ 로 수렴한다.

(다) 앞에서 얻은 등식의 실수부와 허수부를 비교한다.

(라) $-\frac{1}{2}$ (바) $\log 2$

5.5.12. 만일 $s < 1$ 이면, 임의의 $z \in D(-i, s)$ 에 대하여 $\left| \frac{z+i}{z-i} \right| \leq \frac{s}{2-s} < 1$

이고, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s}{2-s} \right)^n$ 가 수렴한다.

5.5.13. $\sum_{n=-2N-1}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{z-n} = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z-2n} - \sum_{n=-N-1}^N \frac{1}{z-1-2n} \rightarrow \frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi z}{2} - \frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi(z-1)}{2} = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ 이다.

5.5.14. (가) $\frac{1}{4}$ (나) 다항식 $(1+z)^n$ 를 전개하면 z^k 의 계수가 $\binom{n}{k}$ 이다.

(다) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|\zeta|=1} z^n \frac{(1+\zeta)^{2n}}{\zeta^n \cdot \zeta} d\zeta$ 인데, 단위원 위에서 부등식 $\left| \alpha^n \frac{(1+z)^{2n}}{z^n} \right| \leq |4\alpha|^n$ 이 성립하므로 바이어쉬트라스 정리를 적용할 수 있다.

(라) $p(\zeta) = \zeta - z(1+\zeta)^2$ 라 두면, $|\zeta| = 1$ 일 때 $|p(\zeta) - \zeta| < \frac{1}{2} < |\zeta|$ 이므로 $p(\zeta)$ 는 단위원 안팎에서 근을 하나씩 가지는데, 이를 각각 z_1, z_2 라 두자. 그러면 구하는 값은 $\frac{1}{z(z_2-z_1)}$ 이다.

5.5.15. (가) 양변을 미분하여 비교한다.

(라) 곡선 C_ϵ 과 단위원이 만나는 점부터 단위원을 따라서 시계반대방향으로 $e^{i\theta}$ 까지 움직이는 곡선을 Γ_ϵ 이라 두면 $f(e^{i\theta}) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} f'(\zeta) d\zeta$ 이다. 그런데, $-\int_{\Gamma_\epsilon} f'(\zeta) d\zeta = \int_\epsilon^\theta \operatorname{Arg}(1-e^{it}) dt - i \int_\epsilon^\theta \log|1-e^{it}| dt = \int_\epsilon^\theta \frac{t-\pi}{2} dt - i \int_\epsilon^\theta \log(2\sin \frac{t}{2}) dt$ 에서 원하는 결과를 얻는다.

5.5.16. (나) $\sin^2 z = z^2 - \frac{1}{3}z^4 + \dots$ 이므로 $\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{1}{3}z^2 + \dots \right)$ 이고, 따라서 (가)의 좌변은 $\frac{1}{3}$ 이다.

5.5.17. $\tan z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$

제 6 장

6.5.1. 조화함수 $u(x, y) = x$ 는 실수축 위에서 0 이지만 복소평면 전체에서 0 은 아니다.

6.5.2. 만일 $u_2(z_0) \neq 0$ 라면, u_2 가 연속함수이므로 z_0 의 근방 U 위에서 $u_2 \neq 0$ 이고, 따라서 U 위에서 $u_1(z) \equiv 0$ 이다. 나머지 부분은 해석함수의 열린사상정리를 사용할 수 있다.

6.5.3. 연습문제 3.4.6에 의하여 vu 일 필요충분조건은 $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ 이다. 만일 $\operatorname{Re} f = u$, $\operatorname{Re} g = v$ 인 해석함수 f, g 를 잡으면 직접 계산에 의하여 $\operatorname{Re} \frac{f'}{g'} = 0$ 임을 알 수 있다. 따라서, 적절한 상수 $a \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $f' = iag'$ 이고, 이에 의하여 u 와 av 가 코시-리만 방정식을 만족한다.

6.5.4. 등식 $|1 + e^{i\theta}| = 2 \sin \frac{\theta}{2}$ 을 이용한다.

6.5.5. 등식(5)에서 r 에 $\frac{r}{R}$ 을 대입한다.

$$6.5.6. u(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{1 - r^2}{-2r \sin \theta}$$

6.5.7. 미분과 적분의 순서를 바꿀 수 있으므로 직접 계산하면 된다.

6.5.8. (나) 함수 a_0 의 정의와 (가)를 이용한다.

(다) (나)에 의하여 미분방정식 $ra_0''(r) + a_0'(r) = 0$ 을 얻는다.

(라) $\lim_{r \rightarrow 0} a_0(r) = u(0)$ 이 유한값이므로 $A = 0$ 이다.

6.5.9. 함수 $f(z)$ 가 z_0 의 근방 D 에서 일대일대응이라 하고, 그 역함수를 $g : f(D) \rightarrow D$ 라 하자. 그러면 $f(D)$ 안에서 $w_0 = f(z_0)$ 를 둘러싸는 곡선 γ 에 대하여 $\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = 2\pi i g'(w_0) = \int_{\gamma} \frac{g'(w)dw}{w - w_0} = \int_{\gamma} \frac{g'(w)dw}{f(g(w)) - f(g(w_0))} = \int_{g \circ \gamma} \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}$ 이 성립한다.

6.5.10. 처음 경우는 조화함수에 관한 가우스 평균값정리에서 나온다. 만일 $f(re^{i\theta_0}) = 0$ 이면 $f(z)$ 를 $z - re^{i\theta_0}$ 로 나누어 $\log r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |re^{i\theta} - re^{i\theta_0}| d\theta$ 임을 보이면 되는데, 연습문제 4.5.14 (나)에서 $\int_{-\pi}^{\pi} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = 0$ 을 이용하면 된다.

6.5.11. (가) 만일 $\phi(z)$ 의 분모가 완전제곱이면 $\phi'(z) = 0$ 은 한 개의 근을 가

지며, $\phi(z)$ 의 분모가 완전제곱이 아니면 $\phi'(z) = 0$ 은 두 개의 근을 가진다.

(나) $\psi(z)$ 는 $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$ 의 서로 다른 두 점을 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 의 한 점으로 보내므로 $\sqrt{\psi(z)}$ 가 정의된다. 또한, $z = z_1$ 에서 함수 $\psi(z)$ 는 2-중근을 가지므로 $\psi(z) = a_2(z - z_1)^2 + a_3(z - z_1)^3 + \dots$ 로 쓸 수 있다. (단, $a_2 \neq 0$) 따라서, $\rho(z) = (z - z_1)\sqrt{a_2} \left(1 + \frac{a_2}{2a_3}(z - z_1) + \dots \right)$ 가 되어 $z = z_1$ 에서 단근을 가진다. 한편, $\psi(z)$ 는 $z = z_2$ 에서 2-중극을 가지므로 로랑급수로 쓸 수 있고, 마찬가지 방법으로 $\rho(z)$ 는 단극을 가짐을 알 수 있다. 따라서, $\rho(z)$ 는 하나의 극과 하나의 근을 가지고 모두 단극 및 단근이므로 일차분수함수이다.

(다) 만일 $\sigma(z) = z^2$ 라 두면, $\phi = \phi_1 \circ \sigma \circ \rho$ 이다.

6.5.12. 함수 $w = z^{\pi/\theta} = \exp \left[\frac{\pi}{\theta} \operatorname{Log} z \right]$ 는 S_θ 를 반원판 $\{z \in \Delta : \operatorname{Im} z > 0\}$ 으로 보낸다.

6.5.13. (가) 타원 $\frac{u^2}{\cosh^2 y_0} + \frac{v^2}{\sinh^2 y_0} = 1$ 이다.

(나) 쌍곡선 $\frac{u^2}{\cos^2 x_0} - \frac{v^2}{\sin^2 x_0} = 1$ 이다.

(다) $\sin z$ 는 Ω 안에서 근을 가지지 않는다.

(라) 먼저, z 가 허수축의 $+\infty$ 에서 0까지 가는 동안 $w = \cos z$ 는 실수축의 $+\infty$ 에서 1까지 간다. 그리고, z 가 실수축의 0부터 π 까지 가는 동안 w 는 1부터 -1 까지 가며, 마지막으로 z 가 π 부터 수직선을 위로 움직이는 동안 w 는 실수축의 -1 부터 ∞ 까지 움직인다. 함수 $w = \cos z$ 는 영역 Ω_1 에서 $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ 으로 가는 전단사 등각사상이다.

(마) 복소평면에서 실수축의 구간 $(-\infty, -1]$ 과 $[1, \infty)$ 를 빼면 된다.

6.5.14. (가) $|\alpha| \leq 1$

(나) 먼저 $\beta^2 = \alpha$ 인 $\beta \in \overline{\Delta}$ 를 잡는다. 이제 $\phi(z) = \frac{\beta z + 1}{\beta z - 1}$ 라 두었을 때 성립하는 등식 $f_\alpha(z) = \frac{1}{2\beta} \cdot \frac{\phi(z)^2 - 1}{\phi(z)^2 + 1}$ 을 이용한다. 만일 $|\alpha| = 1$ 이면 $f_\alpha(\Delta)$ 은 평면 전체에서 원점에 대칭인 두 반직선을 제외한 것이다.

6.5.15. 등각사상이고, 그 상은 $\{z : 1 < |z| < e^{\pi/2}\}$ 이다.

6.5.16. (나) 복소평면 위의 원 $|z - 1| = 1$ 에서 생각한다.

(다) 먼저 $(\phi \circ \Gamma_\theta)'(1) = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1 - e^{4i\theta}}}$ 이다. 만일 $k = -2$, 즉 $-\pi < \theta < -\frac{\pi}{2}$ 이

면 $0 < 4\theta + 4\pi < 2\pi$ 이므로 $\operatorname{Arg}[(\phi \circ \Gamma)'(1)] = \theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi - (4\theta + 4\pi)}{2} = -\frac{3}{4}\pi$ 이다. $k = -1, 0, 1$ 인 경우도 마찬가지이다.

$$(ii) \kappa = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \Gamma^2 \left(\frac{1}{4} \right).$$

6.5.17. (가) 세 점 $\phi(0), \phi(1), \phi(\infty)$ 를 꼭지점으로 한다.

(나) 먼저, $c = \int_0^1 |f'(z)| dz = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ 이다. 그리고, $t = \frac{1}{1-s}$ 로 치환하면 $a = \int_1^\infty t^{\alpha-1}(t-1)^{\beta-1} dt = \int_0^1 (1-s)^{\gamma-1}s^{\beta-1} ds$ 이다. 마지막으로, $t = \frac{1-s}{s}$ 를 이용하여 치환하면 $b = \int_0^\infty t^{\alpha-1}(t+1)^{\beta-1} dt = \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{\gamma-1} ds$ 이다.

(다) 사인법칙 $\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)\sin\pi\alpha} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma+\alpha)\sin\pi\beta}$ 과 $\alpha+\beta+\gamma=1$ 를 이용하고, $\beta=\frac{1}{2}$ 를 대입하면 $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\alpha = \Gamma^2(\frac{1}{2}) = \pi$ 를 얻는다.

6.5.18. 함수의 상은 $\{w : \operatorname{Im} w > 0, -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} w < \frac{\pi}{2}\}$ 이다.