

고급해석 시험

2003 년 4 월 4 일

문제 1 완비성공리를 써라. 여기에 나오는 용어의 정의도 함께 써라. 또한, 이 명제와 논리적으로 동치인 명제를 아는대로 써라.

문제 2 수열의 극한의 정의를 써라. 또한, 이 정의의 부정을 기술하고, 이에 입각하여 수열 $\langle (-1)^n \rangle$ 이 수렴하지 않음을 보여라.

문제 3 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$ 이 존재함을 보여라.

문제 4 다음 수열 $\langle x_n \rangle$ 의 상극한과 하극한을 구하고, 그 이유를 써라.

(가) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cos \frac{n\pi}{2}$

(나) $x_n = \sin \frac{n\pi}{3} \cos \frac{2n\pi}{3}$

문제 5 칸토르집합의 정의를 써라. 이 집합이 고립점을 가지지 않는 닫힌집합임을 보여라. 또한, 이 집합이 셀수없는 집합임을 보여라.

문제 6 다음 집합 $A \subseteq \mathbb{R}^2$ 에 대하여 $\text{int } A$ 와 A' 를 구하여라. (답만 써라.)

(가) $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \}$

(나) $A = \left\{ \left(n, n + \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2 : m, n = 1, 2, \dots \right\}$

(다) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2n+1} < x^2 + y^2 < \frac{1}{2n} \right\}$

(라) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \right\}$

문제 7 열린집합과 닫힌집합의 정의를 써라. 집합 $A \subset \mathbb{R}^n$ 이 닫힌집합일 필요충분조건이 $A' \subset A$ 임을 보여라.

문제 8 수열 $\langle x_n \rangle$ 에 대하여, 이 수열의 부분수열이 수렴할 수 있는 모든 점들의 집합을 A 라 할 때, A 가 닫힌집합임을 보여라.

문제 9 실수열 $\langle a_n \rangle$ 에 대하여 $\sigma_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ 이라 정의하자. 만일 $a_n \rightarrow a$ 이면 $\sigma_n \rightarrow a$ 임을 증명하여라.

문제 10 다음 급수의 수렴여부를 판정하여라.

(가) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ (나) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$, 단, $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$

문제 11 집합 $\{ \sin n \in \mathbb{R} : n = 1, 2, 3, \dots \}$ 가 구간 $[-1, 1]$ 안에서 조밀함을 보여라.

문제 12 아무 거나 써라.