고급해석 시험

2003 년 5 월 9 일

문제 1

(가) 옹골집합과 연결집합의 정의를 써라.
(나) 유계닫힌구간 $[0,1]$ 이 옹골집합임을 보여라.
(다) 집합 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 이 연결집합이면 그 닫힘 $\overline{C}$ 도 연결집합임을 보여라.

문제 2 함수 $f : X \to Y$ 에 대하여 다음이 동치임을 보여라.

(가) f 는 연속함수이다.
(나) 만일 V 가 Y 의 열린집합이면 $f^{-1}(V)$ 는 X 의 열린집합이다.

문제 3 평면 $\mathbb{R}^2$ 에서 $\mathbb{R}$ 로 가는 전단사 연속함수가 없음을 보여라.

문제 4 고른연속의 정의를 써라. 또한, 옹골집합 위에서 정의된 연속함수는 고른연속임을 보여라.

문제 5 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 이 주어졌을 때, 임의의 구간 $I \subset \mathbb{R}$ 에 대하여 $f(I)$ 가 구간일 때, 함수 f 가 중간값정리를 만족한다고 말한다.

(가) 원시함수를 가지는 함수는 중간값정리를 만족함을 보여라.
(나) 위 명제의 역이 성립하는지 살펴보아라.

문제 6 다음 함수가 주어진 정의역 위에서 고른연속함수인지 말하고 그 이유를 써라.

(가) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad x \in (0,\infty)$
(나) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}, \qquad x \in (0,\infty)$
(다) $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}, \qquad x \in (0,\infty)$

문제 7 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 가 주어져 있고, 두 함수 $e^x f(x)$ 와 $e^{-f(x)}$ 가 모두 단조감소함수라 가정하자. 이 때, 함수 f 가 연속함수임을 보여라. 위 조건을 만족하면서 상수함수가 아닌 예를 들어라.

문제 8

(가) 해석함수의 정의를 써라.
(나) 다음과 같이 정의된 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 이

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \exp\left[-\dfrac{1}{x^2}\right], & x > 0 \end{cases}$$

C^∞-함수임을 보여라. 또한, 이 함수가 해석함수가 아님을 보여라.

문제 9

(가) 급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 이 임의의 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 수렴한다고 하자. 이 때, 임의의 양수 $\epsilon > 0$ 와 $\alpha > 0$ 에 대하여 다음

$$|x| \le \alpha \Longrightarrow \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k x^k \right| < \epsilon$$

이 성립하는 자연수 N 이 존재함을 보여라.

(나) 각 자연수 $m = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 다음

$$|x| \le 2\pi m \Longrightarrow \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right| < 1$$

을 만족하는 최소의 자연수 N 을 N_m 이라 하자. 이 때, m 과 N_m 관계를 설명하여라.

문제 10 아무 거나 써라.

답안지 1쪽:1,2번, 2쪽:3,4번, 3쪽:5,6번, 4쪽:7,8번, 5쪽:9,10번