고급해석 시험

2003 년 6 월 13 일

문제 1 리만적분의 정의를 써라. 옹골구간에서 정의된 연속함수가 리만적분가능함을 보여라.

문제 2 구간 $[0,1]$ 에서 정의된 다음 함수들이 리만적분가능한지 판정하여라.

$$(가)\ f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 는 유리수},\\ 0, & x \text{ 는 무리수}\end{cases} \qquad (나)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\ (\text{기약분수}),\\ 0, & x \text{ 는 무리수}\end{cases}$$

문제 3 다음 두 명제 "함수를 적분하고 미분하면 원래 함수이다", "함수를 미분하고 적분하면 원래 함수이다"를 명확하게 기술하고 증명하여라.

문제 4 함수 $\alpha:[0,2]\to\mathbb{R}$ 이 $\alpha(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1]\\ 1, & x\in(1,2]\end{cases}$ 로 주어져 있다. 함수 $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ 이 다음과 같이 주어졌을 때, 함수 f 가 α 에 관하여 리만–스틸체스 적분가능한지 판정하고 그 이유를 써라. 적분가능한 경우 적분값 $\displaystyle\int_0^2 f(x)d\alpha(x)$ 을 구하라.

$$(가)\ f(x)=x \qquad (나)\ f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & x\in(1,2]\end{cases} \qquad (나)\ f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1)\\ 0, & x\in[1,2]\end{cases}$$

문제 5 다음 적분값을 구하여라.

$$(가)\ \int_0^{\pi} x\,d\sin x \qquad\qquad (나)\ \int_0^1 x\,d\frac{1}{[1/x]}$$

문제 6 적분값 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4-7x+8}{(x+1)(x^2+3)^2}\,dx$ 를 구하여라.

문제 7 유계변동함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 에 대하여 새로이 정의된 함수 $V(x)=V_a^x(f)$ 를 생각하자 (단, $V(a)=0$).

(가) 함수 f 가 연속일 필요충분조건이 V 가 연속임을 보여라.

(나) 문제 (가) 에서 '연속'을 '미분가능'으로 바꾸어도 되는지 살펴보아라.

문제 8 아무 거나 써라.

답안지 1쪽:1,2번, 2쪽:3,4번, 3쪽:5,6번, 4쪽:7,8번