실변수함수론 시험

2003 년 4 월 4 일

문제 1 실수 집합 S 의 길이의 정의를 써라. 칸토르집합의 길이가 0 임을 이 정의에 의하여 증명하여라.

문제 2 각 실수 $x \in [0, 1)$ 를 십진법에 의하여 소수로 표현하되, 두 가지 방법이 있으면 유한개를 제외한 자릿수가 0 이 되도록 한다. 이 때, 0 이 등장하지 않는 수들을 모은 집합 A 의 측도를 구하여라. 또한, 짝수번째 자리에서 처음으로 0 아닌 수가 등장하는 수들의 집합 B 의 측도를 구하여라.

문제 3 각 $n = 1, 2, \dots$ 에 대하여 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 이 잴수있는 함수이고, 함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 f 로 점별수렴하면 f 도 잴수있는 함수임을 증명하여라.

문제 4 잴수있는 함수 $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ 의 적분값이 0 이면 f 는 거의 모든 점에서 $f = 0$ 임을 보여라.

문제 5 단조수렴정리, 파투 정리, 르벡 수렴정리 및 레비 정리를 써라.

문제 6 등식 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq}$ 를 증명하여라. 증명의 각 단계에서 어느 정리가 어떻게 적용되었는지 명확하게 밝혀라. (단, $p, q > 0$).

문제 7 절대연속과 유계변동의 정의를 써라. 절대연속함수는 유계변동임을 증명하여라. 그 역이 성립하는지 살펴보아라.

문제 8 미적분학의 기본정리 – 함수를 미분하고 적분하거나, 적분하고 미분하면 원래 함수가 된다 – 를 르벡측도론 입장에서 명확하게 서술하여라.

문제 9 적분가능함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 가 주어져 있을 때, 임의의 양수 $\epsilon > 0$ 에 대하여 다음 성질

$$E \in \mathfrak{M}, \quad m(E) < \delta \implies \int_E |f| < \epsilon$$

을 만족하는 양수 $\delta > 0$ 가 존재함을 보여라.

문제 10 칸토르함수 $\phi : [0, 1] \to [0, 1]$ 의 정의를 쓰고, 이 함수가 연속임을 설명하여라. 또한, 적분값 $\displaystyle\int_0^1 \phi(x) dx$ 를 구하여라.

문제 11 아무 거나 써라.