실변수함수론 시험

2003 년 5 월 9 일

문제 1 노음공간 $L^p(\mu)$ 의 함수열 $\langle f_n \rangle$ 과 $f \in L^p(\mu)$ 가 주어져 있다. 만일 $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ 이고 $\langle f_n \rangle$ 이 거의 모든 점에서 f 로 점별수렴하면 $\|f_n - f\|_p \to 0$ 이 성립함을 보여라.

문제 2 실수 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 잴수있는 함수열 $\langle f_n \rangle$ 에 대하여 다음이 옳은 명제인지 살펴보아라.

(가) 만일 $\langle f_n \rangle$ 이 $\mathbb{R}$ 위에서 고르게 f 로 수렴하면 $\|f_n - f\|_1 \to 0$ 이다.

(나) 만일 $\|f_n - f\|_1 \to 0$ 이면 거의 모든 점 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $f_n(x) \to f(x)$ 이다.

위 문제에서 $\mathbb{R}$ 을 $[0,1]$ 로 바꾸면 어떻게 되는지 살펴보아라.

문제 3 임의의 $f \in C_0(\mathbb{R})$ 에 대하여 $\|f\|_{\sup} = \|f\|_\infty$ 임을 보여라.

문제 4 루진 정리와 에고로프 정리를 써라. 에고로프 정리를 이용하여 루진 정리를 증명하여라.

문제 5 임의의 집합 X 와 함수 $f : X \to [0,\infty)$ 에 대하여 $\displaystyle\sum_{x\in X} f(x)$ 의 정의를 쓰고, 이 값이 유한합과 어떻게 관련되는지 설명하여라. 또한, 함수 $f : X \to \mathbb{C}$ 에 대하여 $\displaystyle\sum_{x\in X} f(x)$ 의 정의를 써라.

문제 6 잴수있는 이변수함수에 관한 토넬리–푸비니 정리를 써라.

문제 7 이변수함수 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 이 $[-1,1]\times[-1,1]$ 위에서 르벡적분가능하면, 임의의 $x \in [-1,1]$ 에 대하여 f_x 가 $[-1,1]$ 위에서 르벡적분가능한가? 답을 쓰고 그 이유를 대라.

문제 8 푸비니 정리를 이용하여 적분값 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ 을 구하여라.

문제 9 각 $r > 0$ 에 대하여

$$k_r = \frac{1}{2r}\chi_{[-r,r]}, \qquad r > 0$$

라 정의하자.

(가) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 가 적분가능하면, $k_r * f$ 는 연속함수임을 보여라. 이 때, $\displaystyle\lim_{r\to 0}\|k_r * f - f\|_1 = 0$ 이 되는지 살펴 보아라.

(나) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 가 고른 연속이면 $\displaystyle\lim_{r\to 0}\|k_r * f - f\|_\infty = 0$ 임을 보여라.

문제 10 아무 거나 써라.

답안지 1쪽:1,2번, 2쪽:3,4,5번, 3쪽:6,7번, 4쪽:8,9,10번