

# 실변수함수론 시험

2003 년 6 월 13 일

문제 1 함수  $f \in L^1(\mathbb{T})$  의 푸리에계수  $\widehat{f}(n)$  을 정의하고  $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$  이 성립함을 보여라.

문제 2 르벡적분가능함수  $f \in L^1(\mathbb{R})$  에 대한 푸리에변환  $\widehat{f}$  의 정의를 쓰고, 이를 이용하여  $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$  임을 보여라.

문제 3 푸리에 변환  $L^1(\mathbb{T}) \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$  와  $L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$  의 치역이 각각 조밀함을 보여라.

문제 4 함수  $t \mapsto f(t)$  와  $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$  가 모두  $L^1(\mathbb{T})$  에 들어가면

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^N \widehat{f}(n) = 0$$

이 성립함을 보여라.

문제 5 함수모임  $\{h_\lambda : \lambda \in (0, \infty)\}$  이 다음 성질

(가)  $h_\lambda \geq 0$  이다,

(나)  $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda = 1$  이다,

(다) 임의의 양수  $\delta > 0$  에 대하여  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} h_\lambda = 0$  이다

들을 만족한다고 가정하자. 이 때, 임의의  $f \in L^1(\mathbb{R})$  에 대하여

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|f - h_\lambda * f\|_1 = 0$$

이 성립함을 보여라.

문제 6 다음 함수의 푸리에변환을 구하여라.

$$G(x) = e^{-x^2}$$

또한, 이를 이용하여 문제 5번의 세 조건을 만족하는 함수모임을 만들어라.

문제 7 복소내적공간의 슈바르츠 부등식을 쓰고 증명하여라.

문제 8 힐버트공간  $H$  의 정규직교집합  $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$  에 대하여 다음이 동치임을 보여라.

(가)  $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$  가 정규직교기저이다,

(나)  $\xi \in H$  이고 각  $\alpha \in A$  에 대하여  $\langle \xi, e_\alpha \rangle = 0$  이면  $\xi = 0$  이다.

문제 9 아무 거나 써라.

답안지 1쪽:1,2번, 2쪽:3,4번, 3쪽:5,6번, 4쪽:7,8,9번