고급해석 시험

2003 년 10 월 1 일

문제 1 (가) 고른수렴의 정의를 써라.

(나) 연속함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 함수 f 로 고르게 수렴할 때, 함수 f 가 연속임을 보여라.

(다) 연속함수공간 $C[0,1]$ 에 노음 $\|\cdot\|_{\sup}$ 를 부여하였을 때, 임의의 코시수열이 항상 수렴함을 보여라.

문제 2 함수항급수의 고른 수렴에 관한 바이어쉬트라스 판정법, 디리클렛 판정법과 아벨 판정법을 써라.

문제 3 다음 함수열 $\langle f_n \rangle$ 들에 대하여 점별수렴하는 구간을 정하고 그 구간 위에서 고르게 수렴하는지 살펴보아라. 또한, 구간을 줄이면 고르게 수렴하는지 살펴보아라. 그리고, 그 이유를 써라.

(가) $f_n(x) = x^n$

(나) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

(다) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} x^k$

(라) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \sin kx$

문제 4 구간 $[0,1]$ 에 들어가는 유리수 전체를 $Q = \{r_1, r_2, \dots\}$ 와 같이 나열한다. 각 $n = 1, 2, \dots$ 에 대하여 함수 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ 을 다음

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le r_n, \\ 1, & x > r_n \end{cases}$$

와 같이 정의하자.

(가) 함수항 급수 $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n$ 가 고르게 수렴함을 보여라.

(나) 함수 f 가 단조증가함수임을 보여라.

(다) 함수 f 가 각 $x \in Q$ 에서 불연속임을 보여라.

(라) 함수 f 가 각 $x \in [0,1] \setminus Q$ 에서 연속임을 보여라.

문제 5 구간 $[0,1]$ 에서 정의된 연속함수 $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ 이 주어졌을 때, 각 $n = 1, 2, \dots$ 에 대하여

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)dt, \qquad x \in [0,1]$$

라 정의하자. 이 때, 함수항급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ 의 점별수렴과 고른수렴 여부를 판정하여라.

문제 6 각 $m, n = 1, 2, \dots$ 에 대하여 $a_{mn} \ge 0$ 이면 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ 이 성립함을 보여라.

문제 7 수렴반경이 양수인 멱급수로 정의된 함수 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 를 생각하자. 만일 수렴구간 안에 0 으로 수렴하는 수열 $\langle \alpha_n \rangle$ (단, $\alpha_n \ne 0$) 이 주어지고, 각 $n = 1, 2, \dots$ 에 대하여 $f(\alpha_n) = 0$ 이면 $f \equiv 0$ 임을 보여라.

문제 8 만일 양수열 $\langle a_n \rangle$ 이 단조감소하고 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 가 $\mathbb{R}$ 위에서 고르게 수렴한다면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ 임을 보여라.

문제 9 아무 거나 써라.