고급해석 시험

2003 년 11 월 5 일

문제 1 함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 이 연속이고, 각 자연수 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $\int_0^1 f(x)x^n dx = 0$ 이면, $f \equiv 0$ 임을 보여라.

문제 2 '동등연속'의 정의를 써라. 연속함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 에 대하여 $f_n(x) = f(nx)$ 라 정의하였을 때, 함수열 $\langle f_n : n = 1, 2, \ldots \rangle$ 이 동등연속일 f 의 조건을 구하여라.

문제 3 노음공간 $\ell^2(\mathbb{N})$ 의 정의를 써라. 이 노음공간에서 임의의 코시수열이 수렴함을 보여라.

문제 4 양수 p, q 가 관계식 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 을 만족할 때, 임의의 실수 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$ 에 대하여 부등식

$$|a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n| \le (|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p)^{1/p} (|b_1|^q + \cdots + |b_n|^q)^{1/q}$$

이 성립함을 증명하라.

문제 5 일급함수 $a(x), b(x), f(x,y)$ 에 대하여 다음 등식

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)dy = f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} D_1 f(x,y)dy$$

이 성립함을 보여라.

문제 6 함수 $f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos tx}{1+t^2}\, dt$ 가 구간 $(0, \infty)$ 위에서 미분가능함을 보여라.

문제 7 다음 특이적분의 수렴 여부를 판별하여라.

(가) $\int_0^\infty x^5 e^{-x} dx$

(나) $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx$

(다) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\, dx$

(라) $\int_0^\infty \frac{1}{x \log x}\, dx$

문제 8 감마함수 $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ 의 정의를 쓰고, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 임을 보여라. 또한, 함수 $\phi(x) = \log \Gamma(x)$ 가 볼록함수임을 보여라.

문제 9 적분값 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ 를 구하여라.

문제 10 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 에 대하여 $f_n = f * \left(\frac{n}{2}\chi_{[-1/n, 1/n]}\right)$ 이라 두자. 만일 f 가 고른연속이면, 함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 f 로 고르게 수렴함을 보여라. 만일 f 가 고른연속이 아닌 경우 $f_n \to f$ 에 대하여 어느 정도 말할 수 있는지 살펴보아라.

문제 11 아무 거나 써라.