해석개론 시험

2005 년 3 월 31 일

문제 1 완비성공리를 써라. 여기에 나오는 용어의 정의도 함께 써라. 또한, 이 명제와 논리적으로 동치인 명제를 아는대로 써라.

문제 2 아르키메데스 원리를 쓰고, 이를 이용하여 유리수의 조밀성을 증명하여라.

문제 3 수열의 극한의 정의를 써라. 이 정의를 이용하여 수열 $\langle a_n \rangle$ 이 α 로 수렴하면 수열 $\langle \sqrt{a_n} \rangle$ 은 $\sqrt{\alpha}$ 로 수렴함을 보여라. (단, $a_n \geq 0$)

문제 4 비어있지 않은 집합 $A \subset \mathbb{R}^1$ 이 유계이고 닫힌집합이면 최대값을 가짐을 보여라.

문제 5 각 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ 라 두자.

(가) 수열 $\langle a_n \rangle$ 이 수렴함을 보여라.
(나) 수열 $\langle b_n \rangle$ 이 수렴함을 보여라.
(다) 위 두 수열이 같은 값으로 수렴함을 보여라.
(라) 각 자연수 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 에 대하여 부등식 $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{(n+1)!}$ 을 보여라.
(마) 이 부등식을 이용하여 무한급수 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ 의 값을 소수 열째 자리까지 정확하게 구하는 방법을 논의하여라.

문제 6 칸토르집합의 정의를 쓰고, 이 집합의 성질에 대하여 아는 바를 써라.

문제 7 다음 집합 $A \subseteq \mathbb{R}^2$ 에 대하여 $\operatorname{int} A$ 와 A' 를 구하여라. (답만 써라.)

(가) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$
(나) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}$
(나) $A = \left\{\left(n, n + \frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 : m, n = 1, 2, \ldots\right\}$
(다) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \in \mathbb{Q}\}$
(라) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1,\ y = \sin \frac{1}{x}\right\}$

문제 8 열린집합과 닫힌집합의 정의를 써라. 집합 $S \subset \mathbb{R}^n$ 의 닫힘 $\overline{S}$ 는 집합 S 를 포함하는 최소의 닫힌집합임을 보여라.

문제 9 다음 명제가 옳은지 판단하여라.

(가) 만일 $S \subset \mathbb{R}^n$ 이 열린집합이면 $S \subset S'$ 이다.
(나) 만일 $S \subset \mathbb{R}^n$ 이 닫힌집합이면 $S \subset S'$ 이다.
(다) 임의의 집합 $S \subset \mathbb{R}^n$ 에 대하여 $S' = (\overline{S})'$ 이다.
(라) 임의의 집합 $S \subset \mathbb{R}^n$ 에 대하여 $\operatorname{int} S = \operatorname{int} \overline{S}$ 이다.

문제 10 수열 $\langle a_n \rangle$ 을 다음

$$a_0 = a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

과 같이 정의하였을 때, 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 의 수렴 여부를 판별하여라.

문제 11 수열 $\langle a_n \rangle$ 을 다음

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

과 같이 정의하였을 때, 수열 $\langle a_n \rangle$ 의 수렴 여부를 판별하여라.

문제 12 아무 거나 써라.