해석개론 시험

2005 년 5 월 12 일

문제 1

(가) 옹골집합의 정의를 써라.

(나) 위 정의를 이용하여 집합 $\left\{\dfrac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\right\} \cup \{0\}$ 가 옹골집합임을 보여라.

(다) 위 정의를 이용하여 유계닫힌구간 $[0, 1]$ 이 옹골집합임을 보여라.

문제 2 함수 $f : X \to Y$ 에 대하여 다음이 동치임을 보여라.

(가) f 는 연속함수이다.

(나) 만일 V 가 Y 의 열린집합이면 $f^{-1}(V)$ 는 X 의 열린집합이다.

문제 3 고른연속의 정의를 써라. 또한, 옹골집합 위에서 정의된 연속함수는 고른연속임을 보여라.

문제 4 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 가 원시함수를 가지면, 임의의 구간 $I \subset \mathbb{R}$ 에 대하여 $f(I)$ 가 구간임을 보여라. 그 역이 성립하는지 살펴 보아라.

문제 5 다음 함수가 주어진 정의역 위에서 고른연속함수인지 말하고 그 이유를 써라.

(가) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}, \qquad x \in (0, \infty)$

(나) $f(x) = \sqrt{x} \sin \dfrac{1}{x}, \qquad x \in (0, \infty)$

문제 6 주어진 실수열 $\langle a_n \rangle$ 과 함수 $g(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$ 에 대하여

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(n(x - n)), \qquad x \in \mathbb{R},$$

라 정의하자. 이 때, f 가 고른수렴일 필요충분조건은 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 임을 보여라.

문제 7 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 이 미분가능하다고 하자. 만일 그 도함수 f' 이 유계이면 f 가 고른연속임을 보여라. 그 역이 성립하는지 살펴 보아라.

문제 8 오일러가 등식 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 을 어떻게 얻었는지 설명하여라.

문제 9 구간 $(0, 1)$ 에 들어가는 유리수들을 $\{r_1, r_2, \dots\}$ 와 같이 늘어 놓고, 함수 $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ 을 다음

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x - r_n)^{1/3}$$

과 같이 정의한다.

(가) 함수 f 가 증가함수임을 보여라.

(나) 함수 f 의 역함수를 g 라 두었을 때 g 가 미분가능한 함수임을 보여라.

(다) $g'(y) = 0$ 인 점 y 들을 모두 찾아라.

문제 10 아무 거나 써라.

답안지 1쪽:1,2번, 2쪽:3,4번, 3쪽:5,6번, 4쪽:7,8번, 5쪽:9,10번