해석개론 시험

2005 년 6 월 9 일

문제 1 상합과 하합을 이용하여 리만적분을 정의하고, 이를 이용하여 단조증가함수가 항상 리만적분가능함을 보여라.

문제 2 주어진 함수를 적분하고 미분하면 자기 자신이 된다는 것을 명확하게 기술하고 증명하여라. 또한, 주어진 함수를 미분하고 적분하면 자기 자신이 된다는 것을 명확하게 기술하고 증명하여라.

문제 3 다음 두 극한

$$\lim_{P \nearrow} R_a^b(f,P) = A, \qquad \lim_{\|P\| \to 0} R_a^b(f,P) = A$$

을 생각하자. 여기에서 '$P \nearrow$' 는 P 가 집합의 포함관계에 관하여 증가한다는 뜻이다.

(가) 두 극한의 의미를 명확하게 정의하여라.
(나) 두 극한의 존재가 서로 동치임을 보이고, 이 경우 그 극한값이 같음을 설명하여라.
(다) 위 극한에서 리만합 $R_a^b(f,P)$ 을 리만-스틸체스합 $S_a^b(f,P,\alpha)$ 로 바꾸었을 때, 그 극한의 존재 여부가 달라지는 예를 들고 그 이유를 설명하여라.

문제 4 함수 $f:[0,\infty) \to (0,\infty)$ 이 단조감소한다고 가정하자. 만일 극한값

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A f(x)\,dx$$

가 존재하면 $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$ 임을 보여라. 만일 단조감소라는 조건이 빠지면 어떻게 되는가?

문제 5 함수 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ 가 연속이면 그 전변동으로 주어진 함수 $V(x) = V_a^x(f)$ 도 연속임을 증명하여라. 또한, 그 역이 성립하는지 살펴 보아라.

문제 6 포물선 $y = x^2$ 의 길이를 어떻게 구할 수 있는지 설명하여라.

문제 7 다음 적분값을 구하여라.

(가) $\displaystyle\int_0^3 x^2\,d[x]$ (나) $\displaystyle\int_0^1 x\,d\frac{1}{[1/x]}$ (다) $\displaystyle\int_{-1}^1 x\,de^{-|x|}$

문제 8 함수 $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(가) 이 함수의 도함수를 구하여라.
(나) 극한값 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 의 값을 구하여라.

문제 9 아무 거나 써라.

답안지 1쪽:1,2번, 2쪽:3번, 3쪽:4,5번, 4쪽:6,7번, 5쪽:8,9번