해석개론 시험

2005 년 10 월 4 일

문제 1

(가) 고른수렴의 정의를 써라.
(나) 연속함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 함수 f 로 고르게 수렴할 때, 함수 f 가 연속임을 보이라.
(다) 연속함수공간 $C[0,1]$ 에 노음 $\| \cdot \|_{\sup}$ 를 부여하였을 때, 임의의 코시수열이 항상 수렴함을 보이라.

문제 2 연속함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 f 로 고르게 수렴하고 정의역의 수열 $\langle x_n \rangle$ 이 x 로 수렴할 때, $\langle f_n(x_n) \rangle$ 이 $f(x)$ 로 수렴함을 보이라.

문제 3 다음 함수열 $\langle f_n \rangle$ 들에 대하여 점별수렴하는 집합을 정하고 그 집합 위에서 고르게 수렴하는지 살펴보아라. 또한, 집합을 줄이면 고르게 수렴하는지 살펴보아라. 그리고, 그 이유를 써라.

(가) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$
(나) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \sin kx$
(다) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right) \frac{\sin kx}{k}$

문제 4 각 $m, n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $a_{mn} \geq 0$ 이면, 등식

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$$

이 성립함을 보이라.

문제 5

(가) 해석함수의 정의를 써라.
(나) 만일 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 가 $x = 0$ 에서 해석적이면 적절한 구간 $(-R, R)$ 의 모든 점에서 해석적임을 보이라.

문제 6

(가) 함수항급수의 고른수렴에 관한 아벨 판정법을 쓰고 증명하라.
(나) 이를 이용하여, 임의의 멱급수는 수렴구간 안에서 연속함수임을 보이라.

문제 7 임의의 연속함수 $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ 에 대하여 다음 등식

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{n}{2} e^{-n|x|} f(x)\, dx = f(0)$$

이 성립함을 보이라.

문제 8 아무 거나 써라.

답안지 1쪽:1,2번, 2쪽:3,4번, 3쪽:5,6번, 4쪽:7,8번