해석개론 시험

2005 년 11 월 8 일

문제 1 노음공간 $\ell^1(\mathbb{N})$ 의 정의를 쓰고, 이 공간에서 임의의 코시수열이 수렴함을 보여라. 또한, 이 공간에서 유계닫힌집합이지만 옹골이 아닌 예를 들어라.

문제 2 복소내적공간의 코시–쉬바르츠 부등식을 쓰고 증명하라.

문제 3 특이적분 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,dx$ 이 수렴하는 양수 p, q 의 조건을 구하라.

문제 4

(가) 다음 등식

$$\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

이 구간 $(0, \infty)$ 위에서 성립함을 보이라.

(나) 등식 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$ 을 증명하라.

문제 5 함수 $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\sin xt}{t}\,dt$ 의 도함수를 구하라.

문제 6 감마함수 $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ 의 정의를 쓰고, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 임을 보여라.

문제 7 정적분 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,dt$ 의 값을 구하라. [도움말: $t = \sin^2\theta$]

문제 8 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 에 대하여 $f_n = f * \left(\frac{n}{2}\chi_{[-1/n,1/n]}\right)$ 이라 두자. 만일 f 가 고른연속이면, 함수열 $\langle f_n\rangle$ 이 f 로 고르게 수렴함을 보여라. 함수 f 가 고른연속이 아닌 경우 $f_n \to f$ 에 대하여 어느 정도 말할 수 있는지 살펴보아라.

문제 9 주기함수의 푸리에계수를 정의하고, 이러한 정의가 왜 합당한지 논하라. 이 정의에 의거하여 함수 $f(x) = \chi_{(0,\pi)} - \chi_{(-\pi,0)}$ 의 푸리에 급수를 구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 구하라.

문제 10 이 문제는 Stirling's formula 를 증명하는 것인데, 어느 항목이 잘 안되는 경우 앞에 있는 항목을 이용해도 됩니다. 단, (마)는 앞의 항목과 관련 없음.

(가) 각 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 다음 등식을 보여라.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}$$

(나) 부등식 $1 \le \dfrac{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\,dx}{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx} \le 1 + \dfrac{1}{2n}$ 을 보여라.

(다) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$ 임을 보여라.

(라) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\,n^{1/2}} = \pi^{1/2}$ 임을 보여라.

(마) 각 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $a_n = \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}$ 로 정의된 수열 $\langle a_n\rangle$ 이 위로 유계인 단조증가수열임을 보여라. [도움말: 부등식 $0 \le \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x} - x \le \dfrac{x^3}{3(1-x^2)}$ 를 이용해도 좋다.]

(바) 이 수열의 극한을 a 라 두면 $a = \sqrt{2\pi}a^2$ 이 성립함을 보여라.

(사) 등식 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n/e)^n\sqrt{2\pi n}} = 1$ 을 보여라.

문제 11 아무 거나 써라.