해석개론 시험

2005 년 12 월 13 일

문제 1 주기함수의 푸리에계수를 정의하고, 이러한 정의가 왜 합당한지 논하여라.

문제 2 구간 $[-\pi,\pi]$ 위에서 함수 $f(x) = x$ 의 푸리에급수를 구하고, 이를 이용하여 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 의 값을 구하여라. 또한, 함수 $f(x) = x^2$ 의 푸리에 급수를 구간 $[-\pi,\pi]$ 에서 구하고, 이를 이용하여 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 의 값을 구하여라.

문제 3 임의의 $a, b \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b \sin ntdt = 0$ 임을 증명하여라. 이를 이용하여, 구간 I 위에서 $\displaystyle\int_I |f| < \infty$ 이면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_I f(t)\sin nt\,dt = 0$ 이 성립함을 보여라.

문제 4

(가) 디리클렛핵 $\langle D_n\rangle$ 과 페제르핵 $\langle K_n\rangle$ 의 정의를 써라.
(나) 함수 D_n 과 K_n 의 푸리에계수를 구하여라.
(다) 위 정의에 근거하여 $\|K_n\|_1 = 1$ 임을 보여라. 반면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\|D_n\|_1 = \infty$ 임을 보여라.
(라) 디리클렛핵과 페제르핵의 극한을 해석하는 것과 관련하여 '함수'의 개념이 어떻게 확장되어 왔는지 아는대로 써라

문제 5 함수 $f \in L^1[-\pi,\pi]$ 에 대하여 $\lambda_f(\xi) = f * \xi$ 라 정의한다. 단,

$$(f*\xi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\xi(s)\,ds.$$

(가) 만일 $\xi \in L^2[-\pi,\pi]$ 이면 $\lambda_f(\xi) \in L^2[-\pi,\pi]$ 임을 보여라.
(나) 내적공간 $L^2[-\pi,\pi]$ 의 직교기저를 $\{u_n : n = 0, \pm1, \pm2, \dots\}$ 로 주었을 때, 선형사상 λ_f 를 무한 행렬로 나타내어라.
(다) 관계식 $M(\widehat{f}) = \widehat{\lambda_f(\xi)}$ 가 성립하도록 함수 $M : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ 를 정의하여라. 계산과정에서 적분의 순서를 바꾸어도 좋다.

$$\begin{tikzcd}
L^2[-\pi,\pi] \arrow[r, "\lambda_f"] \arrow[d, "\widehat{\ }"'] & L^2[-\pi,\pi] \arrow[d, "\widehat{\ }"] \\
\ell^2(\mathbb{Z}) \arrow[r, "M"] & \ell^2(\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

문제 6 구간 $[0,1]$ 위에서 르벡적분가능한 함수열 $\langle f_n\rangle$ 과 f 에 대하여 다음 조건들을 생각하자.

(가) 함수열 $\langle f_n\rangle$ 이 f 로 고르게 수렴한다,
(나) 임의의 $x \in [0,1]$ 에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 이다.
(다) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_1 = 0$ 이다.

이 때, 이 세 조건들 사이에 성립할 수 있는 인과관계를 조사하여라.

문제 7

(가) 단조수렴정리, 파투정리 및 르벡수렴정리를 써라.
(나) 파투정리를 이용하여 단조수렴정리와 르벡수렴정리를 증명하여라.
(다) 르벡수렴정리를 이용하여 노름공간 $L^1(\mathbb{R})$ 이 완비공간임을 보여라.

문제 8 아무거나 써라.