실변수함수론 시험

2006 년 4 월 4 일

문제 1 각 실수 $x \in [0,1)$ 를 십진법에 의하여 소수로 표현하되, 두 가지 방법이 있으면 유한개를 제외한 자릿수가 0 이 되도록 한다. 이 때, 0 이 등장하지 않는 수들을 모은 집합 A 의 측도를 구하여라. 또한, 짝수번째 자리에서 처음으로 0 아닌 수가 등장하는 수들의 집합 B 의 측도를 구하여라.

문제 2 집합 $E \subset \mathbb{R}$ 이 잴수있을 필요충분조건이

$$\sup\{\mu(F) : F \subset E,\ F \text{ 는 닫힌집합}\} = \inf\{\mu(U) : U \supset E,\ F \text{ 는 열린집합}\}$$

임을 보여라.

문제 3

(가) 적분가능한 복소함수 f 에 대하여 부등식 $\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu$ 이 성립함을 보여라.

(나) 위 부등식에서 등식이 언제 성립하는지 말하고, 그 이유를 써라.

문제 4 단조수렴정리, 파투 정리, 르벡 수렴정리 및 레비 정리를 써라.

문제 5 다음 등식

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - 1}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nx}\sin x\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+1}$$

를 증명하여라. 증명의 각 단계에서 어느 정리가 어떻게 적용되었는지 명확하게 밝혀라.

문제 6 적분가능함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 적분가능함수 f 로 거의 모든 점에서 수렴한다고 하자. 이 때 $\int |f_n - f|\,d\mu \to 0$ 일 필요충분조건이 $\int |f_n|\,d\mu \to \int |f|\,d\mu$ 임을 보여라.

문제 7 잴수있는 함수 $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ 에 대하여 측도 ν 를 $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$ 라 정의할 때, 다음 등식

$$\int_E g\,d\nu = \int_E gf\,d\mu$$

이 성립함을 보여라.

문제 8 절대연속의 정의를 써라. 미적분학의 기본정리 – 함수를 미분하고 적분하거나, 적분하고 미분하면 원래 함수가 된다 – 를 르벡측도론 입장에서 명확하게 서술하여라.

문제 9 절대연속함수는 잴수있는 집합을 잴수있는 집합으로 보냄을 증명하여라.

문제 10 아무 거나 써라.