실변수함수론 시험

2006 년 5 월 10 일

문제 1 노음공간 $L^1(\mu)$ 의 함수열 $\langle f_n \rangle$ 과 $f \in L^1(\mu)$ 가 주어져 있다. 만일 $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$ 이고 $\langle f_n \rangle$ 이 거의 모든 점에서 f 로 점별수렴하면 $\|f_n - f\|_1 \to 0$ 이 성립함을 보여라.

문제 2 바나하대수 $L^1(\mathbb{R})$ 에 항등원이 존재하지 않음을 보여라.

문제 3

(가) 유한 측도 집합 위에서 정의된 잴수있는 함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 함수 f 로 거의 모든 점에서 점별수렴한다고 할때, 다음 성질이 성립함을 보여라. 임의의 양수 $\epsilon > 0$ 에 대하여 다음 성질

$$n \geq N \implies \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} < \epsilon$$

을 만족하는 자연수 N 이 존재한다.

(나) 만일 잴수있는 함수열 $\langle f_n \rangle$ 과 잴수있는 함수 f 가 위 성질을 만족하면, 거의 모든 점에서 f 로 점별수렴하는 부분수열 $\langle f_{n(k)} \rangle$ 이 존재함을 보여라.

문제 4 푸비니 정리를 이용하여 적분값 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ 을 구하여라.

문제 5 함수 $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1-|x|)^2 + (1-|y|)^2}$ 에 대하여, 적분값 $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x,y)\,dxdy$ 와 $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x,y)\,dydx$ 의 값을 비교하여라.

문제 6 르벡적분가능함수 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 에 대한 푸리에변환 $\widehat{f}$ 의 정의를 쓰고, 이를 이용하여 $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ 임을 보여라.

문제 7 함수모임 $\{h_\lambda : \lambda \in (0,\infty)\}$ 이 다음 성질

(가) $h_\lambda \geq 0$ 이다,

(나) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_\lambda = 1$ 이다,

(다) 임의의 양수 $\delta > 0$ 에 대하여 $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} h_\lambda = 0$ 이다

들을 만족한다고 가정하자. 이 때, 임의의 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 에 대하여

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|f - h_\lambda * f\|_1 = 0$$

이 성립함을 보여라.

문제 8 두 함수 $f(x) = e^{-|x|}$ 와 $g(x) = e^{-x^2}$ 의 푸리에변환을 구하여라.

문제 9 함수 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 의 푸리에 적분이 $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ 이고 $x = 0$ 에서 좌극한과 우극한이 존재하면, 두 극한값이 같음을 증명하라.

문제 10 아무 거나 써라.