# 실변수함수론 시험

2006 년 6 월 12 일

1. 노음공간의 쌍대공간을 정의하고, 쌍대공간은 항상 바나하공간임을 보여라.

2. 노음공간 $L^p[0,1]$ (단, $1 \le p \le \infty$) 에서 선형사상 $V$ 를 다음

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad f \in L^p[0,1],\ x \in [0,1]$$

과 같이 정의하였을 때, $V$ 가 $L^p[0,1]$ 에서 $L^p[0,1]$ 로 가는 유계선형사상임을 보여라.

3. 한-바나하 정리, 열린사상정리, 닫힌그래프정리 및 고른유계원칙을 써라.

4. 고정된 수열 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ 에 대하여, 노음공간 $\ell^\infty(\mathbb{N})$ 위에서 다음

$$f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n) : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$$

과 같이 정의된 선형범함수가 언제 유계인지 밝히고, 유계인 경우 그 노음을 구하여라. 또한, $\ell^\infty(\mathbb{N})$ 위에서 정의된 선형범함수가 항상 이런 형태인지 밝혀라.

5. 푸리에급수가 점별수렴하지 않는 연속주기함수가 존재함을 보여라.

6. 복소내적공간의 쉬바르츠 부등식을 쓰고 증명하여라.

7. 노음공간 $C([0,1], \| \cdot \|_{\sup}4)$ 은 내적공간이 될 수 없음을 보여라.

8. 내적공간 $L^2[-1,1]$ 부분공간 $A, B$ 를 다음

$$A = \{f \in L^2[-1,1] : f(-t) = -f(t)\}$$
$$B = \{f \in L^2[-1,1] : f(-t) = f(t)\}$$

과 같이 정의하자.

(가) $A$ 와 $B$ 가 서로 수직인 닫힌부분공간임을 보여라.
(나) 임의의 벡터 $f \in L^2[-1,1]$ 은 $A$ 와 $B$ 에 속하는 두 벡터의 합으로 표시됨을 보여라.
(다) 벡터 $f(t) = t^2 + t$ 에서 부분공간 $A$ 에 이르는 거리를 구하라.

9. 힐버트공간 $H$ 가 셀수있는 조밀부분집합을 가질 필요충분조건은 $H$ 의 정규직교기저가 셀수있는 집합임을 보여라.

10. 적분값 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\alpha \sin b\alpha}{\alpha^2}\, d\alpha$ 를 구하여라 (단, $a, b > 0$).

11. 아무 거나 써라.