실해석학 시험

2009 년 6 월 16 일

문제 1 (15 점) 실직선 위에서 정의된 두 함수 f, g의 콘볼류션 $f*g$의 정의를 쓰고, $f, g \in L^1(\mathbb{R})$이면 $f*g \in L^1(\mathbb{R})$임을 보여라. 또한, 복소정규측도 $\mu, \nu \in M(\mathbb{R})$의 콘볼류션 $\mu * \nu$의 정의를 쓰고, 이 정의가 함수의 콘볼류션과 일치하는 정의임을 설명하여라.

문제 2 (15 점) 함수 $f \in L^1(\mathbb{R})$의 푸리에변환 $\widehat{f}$의 정의를 쓰고, $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ 임을 보여라. 또한, $\{\widehat{f} : f \in L^1(\mathbb{R})\}$이 $C_0(\mathbb{R})$ 안에서 조밀함을 보여라.

문제 3 (20 점) 함수모임 $\{h_\lambda : \lambda \in (0, \infty)\}$ 이 다음 성질

(가) $h_\lambda \geq 0$ 이다,

(나) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_\lambda = 1$ 이다,

(다) 임의의 양수 $\delta > 0$ 에 대하여 $\displaystyle\lim_{\lambda \to \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} h_\lambda = 0$ 이다

들을 만족한다고 가정하자. 이 때, 임의의 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 에 대하여

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|f - h_\lambda * f\|_1 = 0$$

이 성립함을 보여라. 또한, 함수 $G(x) = e^{-x^2}$의 푸리에변환을 구하고, 이를 이용하여 위 세 조건을 만족하는 함수모임의 예를 들어라.

문제 4 (15 점) 실직선 위에서 정의된 두 함수 $f, \widehat{f}$가 모두 옹골받침을 가지는 연속함수이면 $f \equiv 0$임을 보여라. (힌트: f의 받침이 $[0, \pi]$에 포함되는 경우를 먼저 생각하는데, f의 푸리에 변환과 f를 주기함수로 생각했을 때 푸리에 계수의 관계를 생각한다.)

문제 5 (15 점) 함수 $f \in L^1(\mathbb{T})$ 에 대하여

$$C_f(\xi) = f * \xi, \qquad \xi \in L^2(\mathbb{T})$$

과 같이 정의하면, C_f는 $L^2(\mathbb{T})$에서 자기자신으로 가는 유계선형사상임을 보이고, 이 선형사상의 노음을 f의 푸리에계수를 이용하여 나타내어라.

문제 6 (10 점) 복소내적공간에서 쉬바르츠 부등식을 쓰고 증명하여라.

문제 7 (15 점) 각 $g \in \ell^1(\mathbb{Z})$ 에 대하여

$$\phi_g(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n), \qquad f \in \ell^\infty$$

라 정의하자. 이 때, 선형사상 $T : g \mapsto \phi_g$ 는 ℓ^1 에서 $(\ell^\infty)^*$ 로 가는 등거리 선형사상임을 보이고, 전사사상이 아님을 보여라.

문제 8 (10 점) 실직선 위의 유한 양정규 보렐측도들을 분류하고, 이를 스틸체스 적분과 관련지어 설명하여라.

문제 9 (10 점) X가 옹골집합일 때, $\phi \in C(X)^*$이 양선형범함수일 필요충분조건이 $\|\phi\| = \phi(1_X)$임을 보여라.

문제 10 (15 점) 임의의 $g, h \in L^2(\mathbb{R})$에 대하여 등식 $\widehat{g}\,\widehat{h} = \widehat{g * h}$이 성립함을 보여라. 이를 이용하여

$$\{\widehat{f} : f \in L^1(\mathbb{R})\} = \{g * h : g, h \in L^2(\mathbb{R})\}$$

을 보여라.

문제 11 (점) 아무 것이나 써라.