

해석개론 시험

2010 년 3 월 30 일

문제 1 유계함수 $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 다음 등식

$$\sup\{f(x, y) : x \in X, y \in Y\} = \sup\{\sup\{f(x, y) : x \in X\} : y \in Y\}$$

이 성립하는지 살펴보아라.

문제 2 다음 수열 $\langle a_n \rangle$ 이 수렴하는지 살펴보아라. 또한, 수렴하는 경우 그 극한값을 구하고, 수렴하지 않는 경우에는 그 상극한과 하극한을 구하여라.

(가) $a_n = \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{(n+1)\pi}{2}$

(나) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$

(다) $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$, 단 $a_1 = 1, a_2 = 3$

문제 3 다음 집합 $A \subseteq \mathbb{R}^2$ 에 대하여 $\text{int } A$ 와 A' 를 구하여라. (답만 써라.)

(가) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

(나) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \in \mathbb{Q}\}$

(다) $A = \left\{ \left(n, n + \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2 : m, n = 1, 2, \dots \right\}$

(라) $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, y = \sin^2 \frac{1}{x} \right\}$

문제 4 집합 $A \subset \mathbb{R}^n$ 에 대하여 \bar{A} 의 정의를 쓰고, \bar{A} 는 항상 닫힌집합임을 보여라.

문제 5 \mathbb{R} 의 부분집합들 가운데 열린집합이면서 동시에 닫힌집합은 \emptyset 또는 \mathbb{R} 임을 보여라.

문제 6 집합 $A \subset \mathbb{R}^n$ 에 대하여 $\partial A = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$ 라 정의하였을 때, A 가 열린집합이면 $\text{int}(\partial A) = \emptyset$ 임을 보여라.

문제 7 코시수열의 정의를 써라. 또한, 이 정의의 부정을 써라.

문제 8 집합 X 의 부분집합 전체의 집합을 $\mathcal{P}(X)$ 라 쓰자. 임의의 집합 X 에 대하여 X 에서 $\mathcal{P}(X)$ 로 가는 전사함수가 없음을 보여라.

문제 9 아무거나 써라.