

# 해석개론 시험

2010 년 5 월 4 일

문제 1 옹골집합의 정의를 써라. 또한, 이 정의를 이용하여 유계닫힌구간  $[0, 1]$  이 옹골집합임을 보여라.

문제 2 연결집합의 정의를 써라. 또한, 이 정의를 이용하여 유계닫힌구간  $[0, 1]$  이 연결집합임을 보여라.

문제 3 함수  $f : X \rightarrow Y$  에 대하여 다음이 동치임을 보여라.

(가) 임의의 닫힌집합  $F \subset Y$  에 대하여  $f^{-1}(F)$  는  $X$  의 닫힌집합이다.

(나) 임의의 부분집합  $A \subset X$  에 대하여  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$  이다.

(다) 임의의 부분집합  $B \subset Y$  에 대하여  $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$  이다.

문제 4 일변수함수의 사이값정리를 쓰고, 완비성 공리를 이용하여 직접 증명하여라.

문제 5 고른연속의 정의를 쓰고 그 부정을 써라. 또한, 옹골집합 위에서 정의된 연속함수는 고른연속임을 보여라.

문제 6 함수  $h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  에 대하여 함수  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  을 다음

$$f(x) = h(x) \sin \frac{1}{x}$$

과 같이 정의하자. 함수  $f$  가 구간  $(0, 1)$  위에서 고른연속함수가 될  $h$  의 조건을 찾고 그 이유를 밝혀라.

문제 7 유계구간에서 정의된 증가함수와 그 구간에 있는 수열  $\langle x_n \rangle$  에 대하여

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \quad f(\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n)$$

사이에 대소관계가 있는지 살펴보아라.

문제 8 아무 거나 써라.