해석개론 시험

2010 년 6 월 10 일

문제 1 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 가 원시함수를 가지면, 임의의 구간 $I \subset \mathbb{R}$ 에 대하여 $f(I)$ 가 구간임을 보여라.

문제 2 함수 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ 가 연속이고, 임의의 점 $x \in (a,b) \setminus \{c\}$ 에서 미분가능하다고 하자. (단, $a < c < b$) 만일 극한값 $\lim_{x\to c} f'(x)$ 이 존재한다면, 함수 f 가 점 c 에서 미분가능하고 $f'(c) = \lim_{x\to c} f'(x)$ 임을 증명하여라.

문제 3 다음

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, 1 \text{ 이거나 무리수} \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q} \text{ 는 기약분수} \end{cases}$$

과 같이 정의된 함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 에 대하여 다음 물음에 답하라.

(가) 함수 f 는 정의역의 어느 점에서도 미분 가능하지 않음을 보여라.

(나) 함수 f는 구간 $[0,1]$ 위에서 리만적분가능함을 보여라.

문제 4 함수의 '적분'과 '미분'이 서로 역산 관계임을 두 가지 측면에서 명확하게 기술하고 이를 증명하여라.

문제 5 유계함수 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 이 주어져 있을 때, 리만합의 극한에 대한 다음 두 가지

$$\lim_{P\nearrow} R_a^b(f,P) = A, \qquad \lim_{\|P\|\to 0} R_a^b(f,P) = A$$

에 대하여 다음 물음에 답하라.

(가) 두 극한의 의미를 명확하게 정의하고, 두 극한의 존재가 서로 동치임을 보여라.

(나) 위 극한에서 리만합 $R_a^b(f,P)$ 을 리만-스틸체스합 $S_a^b(f,P,\alpha)$ 로 바꾸었을 때, 그 극한의 존재 여부가 달라지는 예를 들어라.

(다) 함수 f 가 연속이면 리만-스틸체스합 $S_a^b(f,P,\alpha)$ 에 대해서도 두 극한의 의미가 같음을 보여라.

문제 6 C^1-함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 가운데, 임의의 구간 $[a,b]$ 위에서 함수의 넓이 $\int_a^b f(x)\,dx$ 와 그래프의 길이 $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$ 가 항상 같은 함수들을 모두 찾아라.

문제 7 양수들의 수열 $\langle c_n \rangle$ 이 $\sum c_n < \infty$ 이고, $\langle x_n \rangle$ 이 $(0,1)$ 안에 있는 서로 다른 수들의 수열일 때, 함수 α, β를 다음

$$\beta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 & x > 0 \end{cases}, \qquad \alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta(x - x_n)$$

과 같이 정의하자. 함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$이 연속이면

$$\int_0^1 f\,d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(x_n)$$

임을 보여라.

문제 8 아무 거나 써라.

답압지 네 장(8쪽)을 작성하되 각 쪽에 한 문제만 풀고 각 쪽 상단에 학번 이름 문제 번호를 크게 쓴다.

강의에 대한 소감문을 작성하여 6월 11까지 메일로 제출한다. 강의 홈페이지 참조