해석개론 시험

2010 년 10 월 5 일

문제 1

(가) 고른수렴의 정의를 써라.

(나) 연속함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 함수 f 로 고르게 수렴할 때, 함수 f 가 연속임을 보이라.

(다) 옹골집합 X 에 대하여 연속함수공간 $C(X)$ 에 노음 $\| \cdot \|_{\sup}$ 를 부여하였을 때, 임의의 코시수열이 항상 수렴함을 보이라.

문제 2

(가) 등식 $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{mn} = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{mn}$이 성립하지 않는 이중수열 $\langle a_{mn} \rangle$의 예를 들어라.

(나) 각 $m, n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $a_{mn} \geq 0$ 이면, $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ 이 성립함을 보여라.

문제 3 다음 함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 주어진 구간 위에서 고르게 수렴하는지 살펴보고 그 이유를 써라. 기존의 정리를 이용하는 경우 그 정리를 명확하게 진술하고, 정리가 적용되는 이유를 명확하게 밝혀라.

(가) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}, \qquad -1 \leq x \leq 1$

(나) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}\sin kx, \qquad -\infty < x < \infty$

(다) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}\, x^k, \qquad 0 \leq x \leq 1$

문제 4 양의 자연수가 아닌 실수 a와 자연수 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여

$$\binom{a}{0} = 1, \qquad \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$$

라 정의하자.

(가) $|x| < 1$ 일 때, 등식 $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$ 이 성립함을 보여라.

(나) $a \geq 0$이면 이 급수가 $x = \pm 1$에서 수렴함을 보여라.

문제 5 함수열 $\langle P_n \rangle$이 다음 세 조건

(i) $-1 \leq x \leq 1$일 때 $P_n(t) \geq 0$이다.

(ii) 각 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $\int_{-1}^{1} P_n(t)\, dt = 1$이다.

(iii) 임의의 $\delta \in (0,1)$에 대하여 함수열 $\langle P_n \rangle$은 집합 $[-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$ 위에서 0으로 고르게 수렴한다.

을 만족한다고 가정하자. 이 때, 주기가 2인 연속주기함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에 대하여

$$f_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t)P_n(t)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}$$

이라 정의하면, 함수열 $\langle f_n \rangle$은 f로 고르게 수렴함을 증명하여라.

문제 6 노음공간 $\ell^1(\mathbb{N})$ 의 정의를 쓰고, 이 공간에서 임의의 코시수열이 수렴함을 보여라.

문제 7 각 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $\alpha_n > 0$인 수열 $\langle \alpha_n \rangle$에 대하여, 노음 공간 $\ell^2(\mathbb{N})$의 부분집합 K를 다음

$$K = \{a \in \ell^2(\mathbb{N}) : |a(n)| \leq \alpha_n\}$$

과 같이 정의하자. 이 때 집합 K가 옹골집합이면 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2 < \infty$임을 보여라.

문제 8 아무 거나 써라.

답압지 네 장(8쪽)을 작성하되 각 쪽에 한 문제만 풀고 각 쪽 상단에 학번 이름 문제 번호를 크게 쓴다.