해석개론 시험

2010 년 11 월 9 일

문제 1 다음 특이적분이 수렴하는 양수 p 의 값을 구하고, 그 이유를 써라.

(가) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx$

(나) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^p}\,dx$

문제 2 각 실수 $x \in [0,\infty)$ 에 대하여, 다음 등식

$$\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

이 성립함을 보이라.

문제 3 감마함수 $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 의 정의를 쓰고, 이 함수가 미분가능함을 보이라. 또한, 각 $x \in (0.1)$에 대하여 등식 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 이 성립함을 보이라.

문제 4 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 에 대하여 $f_n = f * \left(\frac{n}{2}\chi_{[-1/n,1/n]}\right)$ 이라 두자.

(가) 만일 f 가 연속이면, 함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 f 로 수렴함을 보이라.

(나) 만일 f 가 고른연속이면, 함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 f 로 고르게 수렴함을 보이라.

(다) 함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 f 로 수렴하지 않는 함수 f의 예를 들라.

문제 5

(가) 리만–르벡 정리를 쓰고, 증명하라.

(나) 함수 f 의 푸리에급수 $s_n(f;x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}$ 의 수렴여부가 함수 f 의 국소적인 성질에 의하여 결정된다는 사실을 명확하게 기술하고, 리만–르벡 정리를 이용하여 이를 증명하라.

문제 6 디리클렛핵 $\langle D_n \rangle$ 과 페제르핵 $\langle K_n \rangle$ 의 정의를 쓰고, 함수 D_n 과 K_n 의 푸리에계수를 구하라.

문제 7

(가) 구간 $[-\pi,\pi]$ 위에서 함수 $f(x) = x$ 의 푸리에급수를 구하고, 이를 이용하여 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ 의 값을 구하라.

(가) 구간 $[-\pi,\pi]$ 위에서 함수 $f(x) = |x|$ 의 푸리에급수를 구하고, 이를 이용하여 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ 의 값을 구하라.

문제 8 구간 $[-\pi,\pi]$ 위에서 함수 $f(x) = \chi_{[a,b]}$의 푸리에급수를 구하라. (단, $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$ 이고 $a \neq -\pi, b \neq \pi$ 이다) 이 급수가 어떤 x에 대해서도 절대수렴하지 않음을 보이라.

문제 9 아무 거나 써라.

답압지 네 장(8쪽)을 작성하되 각 쪽에 한 문제만 풀고 각 쪽 상단에 학번 이름 문제 번호를 크게 쓴다.