해석개론 시험

2010 년 12 월 14 일

문제 1 복소수집합 $\{c_n : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 가 다음 조건

$$\lim_{n\to\pm\infty} |n^k c_n| = 0, \qquad k = 1, 2, \dots$$

을 만족할 때 $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_n e^{inx}$ 라 정의하면, f 는 C^∞-주기함수이고 각 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 에 대하여 $\widehat{f}(n) = c_n$ 임을 보여라.

문제 2 옹골집합 $K \subset \mathbb{R}$ 에 대하여 등식

$$\mu(K) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \inf_{y\in K} \|x - y\| < \frac{1}{n}\right\}\right)$$

이 성립함을 보여라. 만일 K 가 옹골집합이 아니면 어떻게 되는가?

문제 3 잴수있는 함수의 정의를 쓰고, 잴수있는 두 함수의 합이 잴수있음을 보여라.

문제 4 단조수렴정리, 파투정리 및 르벡수렴정리를 써라. 그리고, 다음 계산이 성립하는 이유를 명확하게 밝혀라.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nx} \sin x\, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{1 + n^2}$$

문제 5 실수 $\alpha \in (0, 1)$을 고정하자. 단위구간 $[0, 1]$ 의 한 가운데에서 길이가 $\frac{\alpha}{3}$ 인 열린구간을 들어내고 남는 집합을 D_1이라 두면 D_1은 두 닫힌구간으로 구성된다. 두 닫힌구간의 각 구간 한 가운데에서 다시 길이가 $\frac{\alpha}{3^2}$ 인 열린구간을 들어내고 남는 집합을 D_2 라 하자. D_2의 네 닫힌구간의 각 구간에서 다시 길이가 $\frac{\alpha}{3^3}$ 인 한 가운데 열린구간들을 들어내고 남는 집합을 D_3 라 하자. 이러한 방식을 계속 적용하여 집합열 $\langle D_n \rangle$ 을 얻었을 때, $D = \bigcap_{n=1}^\infty D_n$ 이라 두자.

(가) 집합 D 가 잴수있는 집합임을 보이고 그 측도를 구하여라.

(나) 함수 χ_D 가 점 t 에서 불연속일 필요충분조건은 $t \in D$ 임을 보여라.

(다) $g \in L^1[0, 1]$ 이고 $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\chi_{D_n} - g| = 0$ 이면 거의 모든 점에서 $g(x) = \chi_D(x)$ 임을 보여라.

(라) 수열 $\langle \chi_{D_n} \rangle$ 는 노음공간 $\mathcal{R}^1[0, 1]$ 에서 코시수열이지만 수렴하지 않음을 보여라.

문제 6 잴수있는 집합 $E \subset [0, 1]$ 에 대하여 다음 물음에 답하라.

(가) 임의의 양수 $\epsilon > 0$ 에 대하여 $\mu\{x \in [0, 1] : g(x) \neq \chi_E(x)\} < \epsilon$ 인 연속함수 $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 이 존재함을 보여라.

(나) $0 \le g_n \le 1$ 이고 거의 모든 점에서 $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \chi_E(x)$ 인 연속함수열 $\langle g_n \rangle$ 이 존재함을 보여라.

문제 7 임의의 $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$ 에 대하여 $\widehat{f} = c$ 인 $f \in L^2[-\pi, \pi]$ 가 존재함을 보여라.

문제 8 아무 거나 써라.

답압지 네 장(8쪽)을 작성하되 각 쪽에 한 문제만 풀고 각 쪽 상단에 학번 이름 문제 번호를 크게 쓴다.