해석개론 숙제 #2

제출일시 2010 년 9 월 28 일 14시

문제 1 교과서 문제 6.3.2, 6.4.1, 6.4.2, 6.5.1, 6.5.3, 6.5.5

문제 2 교과서 문제 6.6.4, 6.6.6, 6.6.7, 6.6.8, 6.6.11, 6.6.12, 6.6.13, 6.6.15, 6.6.16, 6.6.17

문제 3

(가) 거듭제곱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 의 수렴반경이 R 이고

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \qquad -R < x < R$$

이라 하자. 만일 f가 상수함수가 아니면, 해집합 $\{x \in (-R, R) : f(x) = 0\}$은 구간 $(-R, R)$ 안에서 극한점을 가지지 않음을 보여라. [도움말: 귀류법, 롤의 정리]

(나) 수렴반경이 같은 다음 두 거듭제곱급수

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad -R < x < R$$

이 주어져 있다. 또한, $(-R, R)$ 의 부분집합 A 가 구간 $(-R, R)$ 안에서 극한점을 가진다고 가정하자. 이 때, 각 $x \in A$에 대하여 $f(x) = g(x)$ 가 성립하면, 임의의 $x \in (-R, R)$ 에 대하여 $f(x) = g(x)$ 가 성립함을 보여라.

문제 4 양의 자연수가 아닌 실수 a와 자연수 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여

$$\binom{a}{0} = 1, \qquad \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$$

라 정의하자.

(가) 거듭제곱급수 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$의 수렴반경이 1임을 보여라.

(나) 위 함수 $f : (-1,) \to \mathbb{R}$ 는 다음 두 조건

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ af(x) = (1+x)f'(x), \qquad |x| < 1 \end{cases}$$

을 만족함을 보여라.

(다) 미분가능함수 $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ 가 위 두 조건을 만족하면 $f(x) = (1+x)^a$ 임을 보여라. 따라서, 등식

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \qquad |x| < 1$$

이 성립한다.

(라) 이 급수가 $x = \pm 1$에서 수렴하는지 살펴보아라.