해석개론 숙제 #3

제출일시 2010 년 10 월 5 일 18시 30분

문제 1 7.1.2, 7.2.2, 7.2.5, 7.5.1, 7.5.4, 7.5.7, 7.5.8, 7.5.9

문제 2 임의의 옹골집합은 셀수있는 조밀한 부분집합을 가짐을 보여라.

문제 3 옹골집합 X 위에서 정의된 함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 점별수렴하고 집합 $\{f_n\}$ 이 동등연속이면 함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 고르게 수렴함을 보여라.

문제 4 다음은 구간 $[-1, 1]$ 위에서 연속함수 $f(x) = |x|$ 로 고르게 수렴하는 다항함수열 $\langle P_n \rangle$ 을 직접 찾는 방법이다. 다항함수열 $\langle P_n \rangle$ 을 다음

$$P_o = 0, \qquad P_{n+1} = P_n(x) + \frac{x^2 - P_n^2(x)}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

과 같이 정의하자.

(가) 등식

$$|x| - P_{n+1}(x) = (|x| - P_n(x)) \left(1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2}\right)$$

이 성립함을 보여라.

(나) $|x| \le 1$ 이면, $0 \le P_n(x) \le P_{n+1} \le |x|$ 이 성립함을 보여라.

(다) $|x| \le 1$ 이면, $|x| - P_n(x) \le |x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n < \frac{2}{n+1}$ 이 성립함을 보여라.

(라) 함수 $y = P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$의 그래프를 한 좌표평면 위에 그려라.